Chapitre2
les différences finies

Pour passer d'un problème exact continu régit par une EDP au problème approché discret, il existe trois grandes familles de méthodes :

Les différences finies: La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou noeuds du maillage.

Avantages : grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.

Inconvénients : limitation à des géométries simples, difficultés de prise en compte des conditions aux limites de type Neumann.

II-1 Principe - ordre de précision

La méthode des différences finies consiste à approximer les dérivées des équations de la physique au moyen des développements de Taylor et se déduit directement de la définition de la dérivée. Elle est due aux travaux de plusieurs mathématiciens du 18ème siècle (Euler, Taylor, Leibniz...).

Soit $u(x)$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ si la fonction est de classe C^n, alors le développement de Taylor de la fonction $u(x+h)$ au voisinage de x, donne

$$u(x+h) = u(x)+hu'(x)+\frac{h^2}{2!}u''(x)+\frac{h^3}{3!}u^{(3)}(x)+\frac{h^4}{4!}u^{(4)}(x)+...+\frac{h^n}{n!}u^{(n)}(x)+O(h^n)$$

en tronquant la série au premier ordre en h, on trouve

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + O(h)$$

d'où

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + O(h)$$

L'approximation de la dérivée $u'(x)$ est alors d'ordre 1 indiquant que l'erreur de troncature $O(h)$ tend vers zéro comme la puissance première de h.

Définition:la puissance de h avec laquelle l'erreur de troncature tend vers zéro est appelée **l'ordre de la méthode**.

De la même façon que précédente on peut déduire plusieurs formule qu'on les a besoin, telles que

II-2 **Notation indicielle**

Dans notre travail, on souhaite déterminer une grandeur $u(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$. La recherche d'une solution discrète de la grandeur u amène à constituer un maillage de l'intervalle de définition. On considère un maillage (ou grille de calcul) composé de $N+1$ points x_i pour $i = 0, ..., N$ régulièrement espacés avec un pas $h = \frac{b-a}{N+1}$. Les points $x_i = a + ih$ sont appelés les noeuds du maillage.

Le problème continu de départ de détermination d'une grandeur sur un ensemble de dimension finie se ramène ainsi à la recherche de N valeurs discrètes de cette grandeur aux différents

noeuds du maillage.

Notation

on note u_i la valeur discrète de $u(x)$ au point x_i, de même pour la dérivée de $u(x)$ au noeud x_i, on note u'_i la valeur discrète de $u'(x)$ au point x_i, Cette notation s'utilise de façon

équivalente pour toutes les dérivées d'ordre successif de la grandeur u.

Le schéma aux différences finies d'ordre 1 présenté au-dessus s'écrit, en notation indicielle

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + O(h)$$

II-3 **Exemple simple 1D avec conditions de Dirichlet**

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), \quad x \in]0,1[\\ u(0) = \alpha, \ u(1) = \beta \end{cases}$$

où f est une fonction continue.

On commence par une discrétisation de l'intervalle $[0,1]$ en introduisant $N+2$ points équidistants, comme suit

$$x_i = ih, \quad 0 \leq \ i \leq N+1$$

avec $h = \frac{1}{N+1}$.

L'équation à résoudre s'écrit, sous forme discrète en chaque noeud x_i

$$-u''(x_i) = f(x_i),$$

Approximons la dérivée seconde de u au moyen d'un schéma centré à l'ordre 2

$$u''_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

D'où l'équation discrétisée est donneé par

$$2u_i - u_{i+1} - u_{i-1} = h^2 f_i, \quad \text{pour } 1 \leq \ i \leq N$$

La forme matricielle de ce système d'équations linéaires $AU = f$ s'écrit comme suit

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & . & . & 0 \\ -1 & 2 & -1 & . & . & . \\ 0 & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & -1 \\ 0 & . & . & . & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f_1 + \frac{\alpha}{h^2} \\ f_2 \\ . \\ . \\ f_{n-1} \\ f_n + \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix}$$

il reste à démontrer que la matrice A est inversible, d'où la solution $U = (u_1, u_2, ..., u_n)$

Exemple

Trouver une solution appprochée par un schéma de différences finies pour $n = 3$ du problème suivant

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), \quad x \in]0,\pi[\\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

Solution

On a $h = \dfrac{b-a}{N+1} = \dfrac{1}{\pi},\ x_i = \dfrac{i}{\pi}, 0 \leq i \leq 4$

Approximons la dérivée seconde de u au moyen d'un schéma centré à l'ordre 2

$$u_i'' = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

D'où le problème discrétisé est donneé par

$$\begin{cases} 2u_i - u_{i+1} - u_{i-1} = \frac{\pi^2}{16}\sin(x_i) \quad \text{pour } 1 \leq\ i \leq 3 \\ u(0) = u(4) = 0 \end{cases}$$

écrivant la forme matricielle du problème

pour $i = 1 \qquad 2u_1 - u_2 - u_0 = \frac{\pi^2}{16}\sin(x_1)$

pour $i = 2 \qquad 2u_2 - u_3 - u_1 = \frac{\pi^2}{16}\sin(x_2)$

pour $i = 3 \qquad 2u_3 - u_4 - u_2 = \frac{\pi^2}{16}\sin(x_3)$

tels que $x_1 = \dfrac{\pi}{4},\ x_1 = \dfrac{\pi}{2},\ x_1 = \dfrac{3\pi}{4},\ u_0 = 0,\ u(4) = 0.$

d'où, le système $AU = F$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \frac{\pi^2}{16} \begin{pmatrix} \sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{3\pi}{4}) \end{pmatrix}$$

La matrice A est symetrique et définie positive, en effet:

1. $A = A^t$
2. Soit $X^t = (x_1, x_2, x_3)^t \neq (0,0,0)^t$. On a

$$\begin{aligned} X^tAX &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_1^2 + x_3^2 > 0 \end{aligned}$$

D'où la matrice A est inversible. On en déduire que le système matriciel $AU = F$ admet une unique solution.

Calculons la solution

$$\left\{\begin{array}{l} 2u_1 - u_2 = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{32} \\ -u_1 + u_2 - u_3 = \frac{\pi^2}{16} \\ -u_2 + u_3 = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{32} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} u_1 = \frac{(1+\sqrt{2})\pi^2}{32} \\ u_2 = \frac{(2+\sqrt{2})\pi^2}{32} \\ u_3 = \frac{(1+\sqrt{2})\pi^2}{32} \end{array}\right.$$

- **II-4 Exemple simple 1D avec conditions mixtes Dirichlet-Neumann**

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\left\{\begin{array}{c} -u''(x) = f(x), \quad x \in]0,1[\\ u(0) = \alpha,\ u'(1) = \beta \end{array}\right.$$

où l'on a cette fois une condition de Neumann en $x = 1$.

Les modifications du problème discrétisé par rapport au cas précédent sont les suivantes.

Tout d'abord, le nombre d'inconnues a changé. Il y a une inconnue au bord en $x = 1$. Le problème discret a donc maintenant, sur la base du même maillage que précédemment, $N + 1$ inconnues u_i pour i variant de 1 à $N + 1$.

D'autre part, il faut discrétisée la condition de Neumann $u'(1) = \beta$. Plusieurs choix sont possibles pour approximer cette dérivée première. C'est un des inconvénients de la méthode des différences finies : elle ne donne pas de façon naturelle une bonne approximation des conditions de Neumann.

Dans notre cas, nous utilisons une approximation d'ordre 1 : $u'(1) = \dfrac{u_N - u_{N-1}}{h}$

Sous forme matricielle, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & & . \\ . & & & & & & . \\ . & & & & & & . \\ . & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 2 \\ 0 & . & . & . & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f_1 + \frac{\alpha}{h^2} \\ f_2 \\ . \\ . \\ f_{n-1} \\ f_n \\ \frac{\beta}{h} \end{pmatrix}$$

il reste à démontrer que la matrice A est inversible, d'où la solution $U = (u_1, u_2, ..., u_n, u_{N+1})$

Exemple

Trouver une solution appprochée par un schéma de différences finies pour $n = 3$ du problème suivant

$$\left\{\begin{array}{c} -u''(x) = f(x), \quad x \in]0,\pi[\\ u(0) = 0,\ u'(\pi) = 0 \end{array}\right.$$

Solution

On a $h = \dfrac{b-a}{N+1} = \dfrac{1}{\pi},\ x_i = \dfrac{i}{\pi}, 0 \leq i \leq 4$

Approximons la dérivée seconde de u au moyen d'un schéma centré à l'ordre 2

$$u_i'' = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

discrétisons la condition de Neumann $u'(1) = \beta$, au moyen d'un schéma décentré à droite

$$u'_{N+1} = \frac{u_{N+1} - u_N}{h} = \beta$$

D'où le problème discrétisé est donneé par

$$\begin{cases} 2u_i - u_{i+1} - u_{i-1} = \frac{\pi^2}{16}\sin(x_i) \quad \text{pour } 1 \leq\ i \leq 3 \\ u(0) = 0,\ \dfrac{u_4 - u_3}{h} = 0 \end{cases}$$

écrivant la forme matricielle du problème

pour $i = 1$ $\qquad 2u_1 - u_2 - u_0 = \frac{\pi^2}{16}\sin(x_1)$

pour $i = 2$ $\qquad 2u_2 - u_3 - u_1 = \frac{\pi^2}{16}\sin(x_2)$

pour $i = 3$ $\qquad 2u_3 - u_4 - u_2 = \frac{\pi^2}{16}\sin(x_3)$

$$u_4 - u_3 = h\beta = 0$$

tels que $x_1 = \dfrac{\pi}{4},\ x_1 = \dfrac{\pi}{2},\ x_1 = \dfrac{3\pi}{4},\ u_0 = 0.$

d'où, le système $AU = F$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \frac{\pi^2}{16} \begin{pmatrix} \sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{3\pi}{4}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

det(a)=1, alors:La matrice A est inversible. On en déduire que le système matriciel $AU = F$ admet une unique solution.

Calculons la solution

$$\begin{aligned} U &= A^{-1}F \\ &= \begin{pmatrix} 1.4892 \\ 2.5422 \\ 2.9784 \\ 2.9784 \end{pmatrix} \end{aligned}$$