RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF -M'SILA-

FACULTÉ DE THECHNOLOGIE

Cours

D'Analyse Complexe (Chapitre 1 et 2)

Spécialité:

Mathématiques L2

Présenté Par:

Tallab Abdelhamid

Année Universitaire : 2021/ 2022

Table des matières

Chapitre 1

Généralités sur les nombres complexse

Dans ce chapiter on suppose que $\Bbbk$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Forme algébrique d'un nombre complexe

Définition 1.1.1 *Un nombre complexe z s'écrit sous la forme $z = x + iy \quad$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, et i est appelé l'unité imaginaire, par covention $i^2 = -1$ ou $z = x + iy$ s'ppelle la forme algébrique de z.*
Le nombre x s'appelle la partie réelle de z et notée par $x = Re(z)$. Le nombre y s'appelle la partie imaginaire de z et notée $y = Im(z)$. L'ensemble des nombres complexes est noté par $\mathbb{C}$.

Remarque 1.1.1 *1) On a l'inclusion ensembliste suivante:*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Définition 1.1.2 (Somme et produit de deux nombres complexes) *1) La somme de deux nombres complexes $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ est un nombre complexe définit par*

$$\begin{cases} z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2) \\ où \\ Re(z_1 + z_2) = x_1 + x_2 \text{ et } Im(z_1 + z_2) = y_1 + y_2. \end{cases}$$

2) Le produit de deux nombres complexes $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ *est un nombre complexe définit par*

$$\begin{cases} z = z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2) \\ \text{où} \\ Re(z_1z_2) = x_1x_2 - y_1y_2 \text{ et } Im(z_1z_2) = x_1y_2 + y_1x_2. \end{cases}$$

Remarque 1.1.2 $(\mathbb{C}, +, \times)$*est un corps commutatif.*

Définition 1.1.3 *Soit* $z \in \mathbb{C}$,

1) Le module de z *est défini par*

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y2}.$$

2) Le conjugué de z *est défini par*

$$\overline{z} = \overline{x + iy} = x - iy.$$

3) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ *et* $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2i}$.

Remarque 1.1.3 *1)En particulier, on a identiquement*

$$|z|^2 = z\overline{z}.$$

2) Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1 - z_2|$ *est la distance euclidienne entre* z_1 *et* z_2. *Cela donne une preuve géométrique de l'inégalité triangulaire*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Définition 1.1.4 *L'argument* $\arg(z)$ *d'un nombre complexe non nul* z *est l'angle, défini modulo* 2π, *entre le vecteur* z *et l'axe des* x. *On a donc*

$$\arg z = \theta, \text{ donc } \cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \text{ et } \sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}.$$

Un nombre complexe non nul est complètement détermié par son module et son argument : si $|z| = r$ *et* $\arg z = \theta$, *alors* $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, *et donc*

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{1.1.1}$$

On dit que r *et* θ *sont les coordonnées polaires de* z. *Et la forme* (1.1.1) *s'appelle la forme trigonometrique de* z.

Remarque 1.1.4 *L'argument principal noté $Arg(z)$ avec*

$$-\pi \leq Arg(z) \leq \pi.$$

Proposition 1.1.1 *Soient $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, on a*
1) la forme trigonometrique de z_1z_2 est donnée par

$$z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)),$$

donc $|z_1z_2| = |z_1||z_2| = r_1r_2$ et $\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 = \theta_1+\theta_2$.
2) la forme trigonometrique de $\frac{z_1}{z_2}$ $(z_2 \neq 0)$ est donnée par

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)),$$

donc $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{r_1}{r_2}$ et $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 = \theta_1 - \theta_2$.
3) Si $z_1 = z_2 = ... = z_n = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, on obtient

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta), n \in \mathbb{N},$$

donc $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n\arg(z) = n\theta$.

1.2 Forme exponentielle d'un nombre complexe

Nous introduisons dans la définition suivante une autre forme d'un nombre complexe, appelée forme exponentielle.

Ainsi, si on applique la formule d'Euler,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

alors on peut réprésenter un nombre complexe de module r et d'argument θ dans la définition suivante.

Définition 1.2.1 (La forme exponentielle d'un nombre complexe) *La forme exponentielle d'un nombre complexe*

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

est

$$z = re^{i\theta} \textit{ ou } z = |z|\, re^{i\arg z}.$$

1.2.1 Puissances, Racines, Formule de Moivre

Définition 1.2.2 *Soit $n \in \mathbb{N}$, on a*

1) $z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$. *Si* $r = 1$, *on trouve* $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ *ou* $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta)$ *cette formule s'appelle la formule de Moivre.*

2) Un nombre complexe ω est dit une racine $n^{\text{ième}}$ de z si

$$\omega = z^{\frac{1}{n}} \text{ ou } \omega^n = z$$

si $\omega = r_1(\cos\theta + i\sin\theta)$ *et* $z = r_2(\cos\beta + i\sin\beta)$, *alors*

$$\omega^n = z \Leftrightarrow \begin{cases} r_1^n = r_2 \\ n\theta = \beta + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} r_1 = r_2^{\frac{1}{n}} \\ \theta = \frac{\beta+2k\pi}{n} \end{matrix}, k = 0, 1, ..., n-1. \text{ i.e.,}$$

$$\begin{aligned} \omega &= |z|^{\frac{1}{n}} \left(\cos\left(\frac{Arg\,(z) + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{Arg\,(z) + 2k\pi}{n}\right)\right), \\ k &= 0, 1, ..., n-1. \end{aligned}$$

Exemple 1.2.1 *Trouver la racine troisième de* (-8). *Depuis* $(-8) = 8(\cos\pi + i\sin\pi) = 8e^{i\pi}$, *alors*

$$(-8)^{\frac{1}{3}} = \left(8e^{i\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow z_k = 2\exp\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right), k = 0, 1, 2$$

donc

$$(-8)^{\frac{1}{3}} = \begin{cases} z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3} \\ z_1 = 2e^{i\pi} = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2 \\ z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}. \end{cases}$$

2) On trouve la racine troisième de (-1). *On a* $(-1) = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = e^{i\pi}$, *donc*

$$(-1)^{\frac{1}{4}} = \left(8e^{i\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow z_k = \exp\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right), k = 0, 1, 2, 3$$

donc

$$(-1)^{\frac{1}{4}} = \begin{cases} z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} \\ z_1 = e^{i3\frac{\pi}{4}} \\ z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}} \\ z_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}}. \end{cases}$$

1.3 Topologie dans $\mathbb{C}$

Définition 1.3.1 (Cercle, disque ouvert, disque fermé) *Soient r un réel positif et $z_0 \in \mathbb{C}$, on appelle*

- le cercle de centre z_0 et de rayon r, l'ensemble

$$C_r = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = r\}.$$

- le disque ouvert de centre z_0 et de rayon r, l'ensemble

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}.$$

- le disque fermé de centre z_0 et de rayon r, l'ensemble

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq r\}.$$

Définition 1.3.2 (Ouvert, voisinage,connexe) *1) On dit qu'une partie V de $\mathbb{C}$ est un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$ si elle contient une boule ouverte centrée en z_0 de rayon strictement positif.*
2) Une partie $\Omega \subset \mathbb{C}$ est dite ***ouverte*** *si et seulement si pour tout point $z \in \Omega$, il existe un disque ouvert de centre z_0 et tout entier inclus dans Ω i.e., $D(z_0, r) \subset \Omega$.*
3) Un sous-ensemble U de $\mathbb{C}$ est connexe (par arcs) si deux points quelconques de U peuvent être rejoints par une arc incluse dans U.

Exercice 1.3.1 (Exercice 1(série1)) *1) Ecrivez les nombres complexes suivants sous la forme algébrique: $z_1 = \dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$ et $z_2 = \dfrac{1+\lambda i}{2\lambda + (\lambda^2 - 1)\, i}, \lambda \in \mathbb{R}$.*
2) Mettre sous la forme trigonométrique les nombres complexes suivants: $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_2 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$.
3) Ecrire sous la forme exponentielle les nombres complexes suivants: $a = 1 - i, b = -3, c = \sin x + i\cos x, x \in \mathbb{R}$.
***Solution:* 1)** *On a* $z_1 = \dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7} = (1+i)^2 \dfrac{(1+i)^7}{(1-i)^7} = 2i\dfrac{(2i)^7}{2^7} = 2$, *donc* $\mathrm{Re}\,(z_1) = 2$ *et* $\mathrm{Im}\,(z_1) = 0$.

On a

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{1+\lambda i}{2\lambda + \left(\lambda^2-1\right) i} = \frac{i\left(-i+\lambda\right)}{i\left(-2\lambda i + \left(\lambda^2-1\right)\right)} \\ &= \frac{\lambda - i}{\left(\lambda - i\right)^2} = \underbrace{\frac{\lambda}{\lambda^2+1}}_{\mathrm{Re}(z_2)} + i\underbrace{\frac{1}{\lambda^2+1}}_{\mathrm{Im}(z_2)}. \end{aligned}$$

Chapitre 2

Les fonctions à variable complexe

2.1 Fonctions complexes

Définition 2.1.1 *Si a chaque nombre complexe z variable il correspond une ou plusieurs valeurs w, nous dirons que w est une fonction de z . En générale on appelle fonction complexe de la variable complexe z toute application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui fait associer à chaque nombre complexe z un nombre complexe w tel que*

$$w = f(z); z \in \mathbb{C} \xrightarrow{f} w = f(z) \in \mathbb{C}.$$

Ou si $w = f(z)$ est un nombre complexe, donc il s'écrit sous la forme

$$w = f(z) = P + iQ$$

Puisque $z = x + iy$, alors $P = P(x, y); Q = Q(x, y)$, P est la partie réelle de w et Q la partie imaginaire de w.

Exemple 2.1.1 • $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $x+iy \mapsto e^x \cos y + ie^x \sin y$; $z \mapsto e^z$ *(exponentielle complexe).*
• $f :\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $x + iy \mapsto \dfrac{e^{-y} + e^y}{2} \cos x + i\dfrac{e^{-y} - e^y}{2} \sin x = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
• $z \mapsto \cos z$ *(cosinus complexe).*

Exemple 2.1.2 *Soit la fonction $z \mapsto z^2$, on va écrire la fonction $z \mapsto z^2$ sous la forme $P + iQ$, depuis $z = x + iy$, donc $x + iy \mapsto x^2 - y^2 + i2xy$, alors $P(x, y) = x^2 - y^2$ et $Q(x, y) = 2xy$.*

2.1.1 Fonctions uniformes

Définition 2.1.2 *Une fonction complexe f de la variable complexe z est dite* ***fonction uniforme*** *si pour chaque une valeur donnée de la variable complexe z, la fonction $f(z)$ peut prendre une valeur unique. Si non la fonction est multi-formes (ou multivaleurs)*

Exemple 2.1.3 *1) La fonction $z \mapsto f(z) = z^3$ est uniforme, car pour $z = z_0$, $f(z_0)$ prend la valeur unique z_0^3.*
2) La fonction $z \mapsto f(z) = \sqrt{z}$ est mult-iforme.

2.2 Fonctions usuelles

2.2.1 Fonction exponentielle

Définition 2.2.1 *On désigne par exponentielle la fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par*

$$e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}.$$

Cette définition a bien un sens, car le théorème de Hadamard garantit que le rayon de convergence de la série précidente $R = \infty$.
Si $z = x + iy$, donc $e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$.

Proposition 2.2.1 *On a les properiétés suivantes:*
1) $e^0 = 1$.
2) $e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$.
3) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.
4) $|e^z| = e^x$.
5) $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$.
6) *La fonction exponentielle complexe n'est pas bijective sur $\mathbb{C}$, mais la restrection de* exp *à $\mathbb{R}$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$.*

2.2.2 Le logarithme complexe

Définition 2.2.2 *Dans le cas réel nous concevons la fonction logarithmique comme l'inverse de l'exponentielle. La formule $z = |z| e^{i \arg z}$ montre qu'un nombre admet une infinité de* *logarithmes, définis modulo* 2π *par*

$$\log z = \ln|z| + i \arg z.$$

Remarque 2.2.1 *La fonction* $f(z) = \log z$ *est une fonction multi-forme qui s'appelent déterminations,*

$$f(z) = \log z = \log r + i\left(Arg\,(z) + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$$

En particulier, lorsque $k = 0$*, la quantité* $lnr + i\theta$ *s'appelle la détermination principale de* $log(z)$ *et on la note par*

$$Log\,(z) = \ln|z| + iArg\,(z) = \ln r + i\theta$$

avec $\theta = Arg\,(z)\,, i.e., (-\pi \leq \theta \leq \pi)$ *est l'argument principale de* z*.*

Exemple 2.2.1 1) *Comme* $Arg\,(3) = 0$*, donc* $\log(3) = \ln 3 + i2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ *mais* $Log\,(3) = \ln 3$.
2) *On a* $\left|i + \sqrt{3}\right| = 2$ *et* $Arg\left(i + \sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi}{6}$*, donc* $\log\left(i + \sqrt{3}\right) = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ *et* $Log\left(i + \sqrt{3}\right) = \ln 2 + \dfrac{\pi}{6}$.

Proposition 2.2.2 *Le logarithme d'une variable complexe* z *possède les propriétés suivantes:*
1) $\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$.
2) $\log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log(z_1) - \log(z_2)$.
3) $e^{\log z} = z$.
4) $\log(e^z) = z + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 2.2.2 *Si* $z_1 = z_2 = -1$*, on a* $Log\,(z_1 z_2) = Log\,(1) = 0$ *et* $Log\,(-1) + Log\,(-1) = 2\pi i$*, donc en générale* $Log\,(z_1 z_2) \neq Log\,(z_1) + Log\,(z_2)$.

2.2.3 Les fonctions trigonométriques et hyperboliques

Définition 2.2.3 1) *Les fonctions sinus et cosinus sont définies par*

$$\cos z = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n z^{2n}}{2n!}, \sin z = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

De plus, on a

$$\left\{\begin{array}{l} e^{iz}=\cos z+i\sin z \\ e^{-iz}=\cos z-i\sin z \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \\ \sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \end{array}\right. .$$

2) Autres fonctions trigonométriques et hyperboliques sont définis de la même manière comme suit

$$\begin{aligned}
\tan z &= -i\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}, \\
\cot z &= i\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}, \\
\cosh z &= \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}, \\
\sinh z &= \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}, \\
\tanh z &= \frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}}, \\
\coth z &= \frac{e^{z}+e^{-z}}{e^{z}-e^{-z}}.
\end{aligned}$$

Remarque 2.2.2 1) *On a*

$$\cos z=\cosh(iz), \sinh(iz)=i\sin z.$$

2) *En changeant z par iz, on trouve*

$$\cos(iz)=\cosh z, \sin(iz)=i\sinh z.$$

3) *Les fonctions sinus et cosinus ne sont pas bornées sur $\mathbb{C}$.*

2.2.4 Autres fonctions

1) Fonctions polynômiales. La fonction **polynômiale ou polynôme** est une fonction sous la forme

$$\begin{array}{rcl} P_n & : & \mathbb{C}\to\mathbb{C} \\ z & \longmapsto & P_n(z)=a_0+a_1z+a_2z^2...+a_nz^n. \end{array}$$

L'équation $P_n(z)=0$ admet exactement n racines complexes dans $\mathbb{C}$.

1) Fonctions rationnelles. La fonction **rationnelle** est une fonction sous la forme $z\longmapsto\dfrac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ avec P_n, Q_n sont des polynômes avec $Q_n(z)\neq 0$.

Dans la suite la notation fonction représente fonction uniforme.

2.3 Countinuité des fonctions

Les concepts de limite et la countinuité sont similaires à celui du cas réel.

2.3.1 Limites

Définition 2.3.1 *On dit que le nombre complexe l est une limite de f au point z_0 si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0; \mid z - z_0 \mid < \eta \Longrightarrow \mid f(z) - l \mid < \varepsilon$$

et on dit $l = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$. *Comme* $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ *donc* $a = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y0}} P(x;y)$ *et* $b = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} Q(x;y)$ *tel que* $l = a + ib$.
On a aussi

- $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0$ tel que $|z| > A \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon$.
- $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \eta > 0$tel que $|z - z_0| < \eta \Rightarrow |f(z)| > A$.
- $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0$ tel que $|z| > B \Rightarrow |f(z)| > A$.

Remarque 2.3.1 *Pour l'infini en l'analyse complexe, on a*

$$z \to \infty \Leftrightarrow \left(\frac{1}{z} \to 0 \text{ et } |z| \to \infty \right)$$

$$\text{et}$$

$$\left. \begin{array}{l} z \to \infty \\ \omega \to a \end{array} \right\} \Leftrightarrow z + \omega \to \infty$$

$$\text{et}$$

$$\left. \begin{array}{l} z \to \infty \\ \omega \to a \end{array} \right\} \Leftrightarrow z\omega \to \infty \ (a \neq 0).$$

Proposition 2.3.1 *Soient f,g deux fonctions complexes et l, l' ses limites respectivement au point z_0, alors on a les propriétés suivantes:*

1. $\lim\limits_{z \to z_0} (f \pm g) = l \pm l'$,
2. $\lim\limits_{z \to z_0} (fg) = ll'$,
3. $\lim\limits_{z \to z_0} (\frac{f}{g}) = \frac{l}{l'}$ *si* $l' \neq 0$,
4. pour $\lambda \in \mathbb{R}$, *alors* $\lim\limits_{z \to z_0} (\lambda f) = \lambda l$.

2.3.2 Continuité

Définition 2.3.2 *Soit f une fonction complexe (uniforme) définie au voisinage d'un point z_0. On dit que la fonction f est continue en z_0 si*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Les trois conditions suivantes sont simultanément remplies:

1) La limite de $f(z)$ au point z_0 existe c'est-à-dire $\lim_{z \to z_0} f(z) = l$ existe et finie.

2) $f(z)$ est définie au point z_0 c'est-à-dire $f(z_0)$ existe.

3) $l = f(z_0)$.

Remarque 2.3.2 *1. Une fonction $f(z)$ est dite continue dans un domaine du plan complexe,si elle est continue en chaque point de ce domaine.*

2. Si la fonction $f(z)$ est continue au point z_0 alors

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0 \text{ tel que pour } \mid z - z_0 \mid < \delta \Rightarrow \mid f(z) - f(z_0) \mid \leq \varepsilon.$$

Exemple 2.3.1 *Soit $f(z) = exp(z)$ on a*

$$l = \lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} exp(z) = 1 \text{ et } f(0) = exp(0) = 1,$$

donc cette fonction est continue en $z_0 = 0$.

2.3.3 Prolongement par continuité

Définition 2.3.3 *Si la fonction f admet une limite l en z_0, mais n'est pas définie en ce point, alors on peut associer à f une fonction g avec $\lim_{z \to z_0} g(z) = l = g(z_0)$,telle que*

$$g(z) = \begin{cases} f(z) \text{ si } z \neq z_0 \\ l \text{ si } z = z_0 \end{cases}$$

C'est-à-dire que la fonction g est continue en $z_0$dans ce cas on dit que la fonction f est prolongeable par continuité en z_0 et et son prolongement soit g.

Exemple 2.3.2 *Soit f une fonction complexe donnée par:*

$$f(z) = \frac{z^2 - 2iz - 1}{z^4 + 2z^2 + 1}$$

a) Calculer $\lim\limits_{z \mapsto i} f(z)$.

b) f *est-elle continue en* $z = i$?

c) f *est-elle prolongeable par contnuité en* $z = i$?

Solution: *On a* $\lim\limits_{z \mapsto i} f(z) = \lim\limits_{z \mapsto i} \frac{z^2 - 2iz - 1}{z^4 + 2z^2 + 1} = \lim\limits_{z \mapsto i} \frac{(z-i)^2}{(z-i)^2 (z+i)^2} = -\frac{1}{4}$ *et comme* f *n'est pas définie en* i, *donc* f *est prolongeable par contnuité en* $z = i$ *son prolongement par continuité est*

$$g(z) = \begin{cases} \frac{z^2 - 2iz - 1}{z^4 + 2z^2 + 1} & si\ z \neq i \\ -\frac{1}{4}\ si\ z = i. \end{cases}$$

2.4 Fonctions holomorphes

2.4.1 Dérivation complexe

On donne deux définitions équivalents de dérivabilité d'une fonction d'une variable complexe.

Définition 2.4.1 *Soit* f *est une fonction complexe définie dans un domaine (ouvert connexe)* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *contenant* z_0. *Si la limite*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe et est finie, alors on l'appelle la dérivée de la fonction f *au point* z_0 *et est désigné par* $f'(z_0)$. *Dans ce cas, on écrit*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

and on dit que f *est dérivable en* z_0.*i.e.,*

$$f \text{ est dérivable en } z_0 \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = l$$

et l *est une constante complexe finie et on écrit* $f'(z_0) = l$.

Définition 2.4.2 *Soit la fonction f définie et continue dans un domaine simplement connexe D. La fonction f est dérivable en z_0 s'il existe une fonction $L : D \to \mathbb{C}$ soit continue en z_0 telle que*

$$f(z) = f(a) + (z - z_0) L(z) \text{ pour tout } z \in D.$$

Si L existe, il est déterminé par f,

$$L(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ por tout } z_0 \in D - \{z_0\}.$$

posant $h = z - z_0$, la continuité de L implique que

$$L(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

La constante $L(z_0) \in \mathbb{C}$ est dite la dérivée de f en z_0 et on écrit

$$L(z_0) = f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0).$$

Définition 2.4.3 *Si la dérivée de f existe en tout point z d'un domaine D, alors f est dite holomorphe dans D. Une fonction f est dite holomorphe en un point z_0 si elle est dérivable dans un disque ouvert centré en z_0 $(D(z_0, r))$. i.e.,*

$$\boxed{f \text{ holomorphe en } z_0 \Leftrightarrow f \text{ dérivable en } z_0.}$$

Exemple 2.4.1 *1) La fonction $f(z) = z^3$ en $z_0 \in \mathbb{C}$, on a*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z^3 - z_0^3}{z - z_0} = 3z_0^2.$$

Donc f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
2) $f(z) = x^2 + y^2$ en $z_0 = 0$, donc

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{x^2 + y^2 - 0}{x + iy} = \lim_{r \to 0} r(\cos\theta - i\sin\theta) = 0.$$

Remarque 2.4.1 *Les proprietés de dérivation restes valables comme dans $\mathbb{R}$ (somme, multiplication par un scalaire, produit, fraction, composition...).*

2.5 Conditions de Cauchy-Riemann

2.5.1 En coordonnés cartésiennes

Définition 2.5.1 *Soit la fonction $f(z) = f(z) = P(x,y)+iQ(x,y)$ définie et continue dans un domaine $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. On dit que les fonctions P, Q vérifiant les* ***conditions de Cauchy - Reimann(C.C.R.)*** *si:*

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y),\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

Remarque 2.5.1 *L'expression de $f'(z)$ est donnée en fonction de P et Q comme suit:*

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial x} \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} - i\frac{\partial P}{\partial y}. \end{aligned}$$

Théorème 2.5.1 *La fonction $z \mapsto f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ est est holomorphe dans un domaine $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, alors les quatres dérivées partielles de P et Q existent et satisfont les conditions de Cauchy-Riemann en tous points de Ω et on a*

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y), \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

Théorème 2.5.2 *Si les fonctions à deux variable P, Q sont déférentiables en point (x_0, y_0) et leurs dérivées partielles sont continues et satisfont les conditions de Cauchy-Riemann, donc la fonction*

$$z \mapsto f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$$

est différentiable en $z_0 = x_0 + iy_0$.

Proposition 2.5.1 (En coordonnés polaires) *Soit $f\left(re^{i\theta}\right) = u\left(r,\theta\right)+iv\left(r,\theta\right)$. Les conditions de Cauchy-Riemann en coordonnés polaires données par*

$$\frac{\partial u}{\partial r}(x,y) = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}(x,y), \frac{\partial v}{\partial r}(x,y) = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}(x,y).$$

En plus

$$f'(re^{i\theta}) = e^{-i\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(u\left(r,\theta\right) + iv\left(r,\theta\right)\right).$$

Remarque 2.5.2 *1) Remarquons qu'on a,*

$$\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial(P+iQ)}{\partial x}+i\frac{\partial(P+iQ)}{\partial y}=(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y})+i(\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y})=0.$$

Une forme condensée des conditions de Cauchy-Riemann est

$$\forall(x,y)\in\Omega\subset\mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}=0. \tag{2.5.1}$$

2) *On a aussi* $df(z)=\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}$. *Comme*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \overline{z}}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} \tag{2.5.2}$$

Proposition 2.5.2 *Si f est holomorphe, alors* $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$.

Preuve. On a

$$\begin{cases} x=\frac{z+\overline{z}}{2} \\ y=\frac{z-\overline{z}}{2i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2} \\ \frac{\partial y}{\partial \overline{z}}=-\frac{1}{2i} \end{cases}.$$

En substituant ces dernières relations dans 2.5.2 et en utilisant 2.5.1, *on a*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \overline{z}}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y} \\ & \frac{1}{2}(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y})-\frac{1}{2}(\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y})=0.\end{aligned}$$

■

Finalement, f *dérivable* $\Rightarrow df(z)=\frac{\partial f}{\partial z}dz=f'(z)dz$.

Donc, si f est dérivable, $f(z)$ ne doit pas contenir de termes en $\overline{z}$.

Remarque 2.5.3 *Les conditions de Cauchy-Reimann sont nécessaires mais pas suffisantes.Comme on peut le voir avec líexercice suivant*

Exemple 2.5.1 *Soit f une fonction définie par:*

$$f(z)=f(x+iy)=\begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}+i\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & si \quad z\neq 0 \\ 0 & si \quad z=0, \end{cases}$$

il est claire que f est continue sur $\mathbb{C}^*$ et o a

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0} f(x+iy) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} + i\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{\rho\to 0} \rho\left[\cos^3\theta - \sin^3\theta + i(\cos^3\theta + \sin^3\theta)\right] = 0 = f(0),\end{aligned}$$

donc f est continue sur $\mathbb{C}$.
D'autre part, on a $\frac{\partial P}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(0,0) = 1$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}(0,0) = -\frac{\partial P}{\partial y}(0,0) = -1$, alors f satisfait aux conditions de Cauchy-Riemann en $z=0$. Mais

$$f'(0) = \lim_{z=x+iy\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{x\to 0, y\to 0} \frac{1}{x+iy}\left(\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} + i\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right)$$

Pour $y=0$, on obtient

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{(1+i)\,x^3}{x^3} = 1+i.$$

Pour $y=x$, on a

$$f'(0) = \lim_{x\to 0, y\to 0} \frac{ix}{(1+i)\,x} = \tfrac{1}{2}(1+i).$$

donc f n'est pas dérivable en 0 (car la limite n'est pas unique) malgré le fait qu'elle vérifie les conditions de Cauchy-Riemann.

2.6 Fonctions Harmoniques

Définition 2.6.1 *Soit φ une application de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, φ est dite de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω, (on note $\varphi \in C^2(\Omega)$, si $\forall (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$ existent et sont continues.*

Remarque 2.6.1 *Pour les fonctions de classe C^2, le théorème de Schwarz assure l'égalité suivante :*

$$\forall (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}.$$

Définition 2.6.2 *Soit φ une application de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2, on dit que φ est harmonique si*

$$\forall (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 : \triangle\varphi\,(x,y) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$$

et la fonction $\triangle\varphi = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$ *est appelée l'opérateur de Laplace ou «Laplacien» de* φ.

Exemple 2.6.1 *La fonction* $(x, y) \mapsto f(x, y) = x^2 - y^2$ *est harmonique.*

Proposition 2.6.1 *Si* $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ *est holomorphe et* $P, Q \in \mathcal{C}^2$*, alors que ses parties réelle et imaginaire sont harmoniques.*

Preuve. Soit $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ une fonction holomorphe et $P, Q \in \mathcal{C}^2$, donc P et Q satisfont les conditions de Cauchy-Riemann, alors

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) \overset{Schwarz}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$$

ce qui donne $\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$, d'oú P est harmonique.

La même méthode pour montrer que Q est harmonique. ■

Proposition 2.6.2 (Laplacien en coordonnés polaires) *En coordonnées polaires l'équation de Laplace deviendera*

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} = 0.$$

2.6.1 Conjuguée harmonique

Soit $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ une fonction holomorphe dans un domaine D, alors P et Q sont harmoniques dans D. Maintenant, supposons que $P(x, y)$ est une fonction réelle harmonique dans D. Si on peut trouver une fonction $Q(x, y)$ telle que $P(x, y) + iQ(x, y)$ est holomorphe dans D, alors $Q(x, y)$ sera apellée la fonction conjuguée harmonique de $P(x, y)$.

Exemple 2.6.2 *Soit la fonction définie par* $P(x, y) = x^2 - y^2 + x$*. Trouver la conjuguée harmonique de* P*.*
On a $\Delta P = \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$*, donc* P *est harmonique. Pour trouver une fonction* Q *pour que* $f = P + iQ$ *soit holomorphe, en utilisant les équations de Cauchy-Riemann, alors*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial y} = \dfrac{\partial P}{\partial x} = 2x + 1 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y \end{cases}$$

En intégrant la première équation par rapport à y, on obtient

$$Q(x,y) = \int (2x+1)\, dy = 2xy + y + h(x)$$

où $h(x)$ est une fonction réelle de x et on a

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y + h'(x) = 2y,$$

alors $h(x) = c$ où $c \in \mathbb{R}$. Donc la fonction harmonique conjuguée est $Q(x,y) = 2xy + y + c$ et la fonction holomorphe $f = P + iQ = x^2 - y^2 + x + i(2xy + y + c)$.

2.7 Fonctions analytiques

Définition 2.7.1 *On appelle série entière de la variable complexe z toute série de fonctions $\sum f_n$, avec*

$$f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto a_n z^n,$$

oú $a_n \in \mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On dit que a_n est le coefficient d'indice n de la série, et que a_0 en est le terme constant. Et on la note par $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

2.7.1 Rayon de convergence

Théorème 2.7.1 (Lemme d'Abel) *Soient $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$. On suppose que la suite $(a_n z_0^n)_n$ est bornée. Alors, la série $\sum a_n z^n$ est normalement convergente dans tout disque $\overline{D}(0,r)$, avec $r < |z_0|$.*

Preuve. On peut supposer $z_0 \neq 0$. Soient M un majorant de la suite $(|a_n z_0^n|)_n$ et r un réel positif tel que $r < |z_0|$. Si $|z| \leq r$, on a

$$|a_n z^n| = \left| a_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0}\right)^n \right| \leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M \left|\frac{r}{z_0}\right|^n,$$

et on a $\sum \left|\frac{r}{z_0}\right|^n$ est une série géométrique convergente, car $r < |z_0|$, donc $\sum a_n z^n$ *est normalement convergente dans tout disque $\overline{D}(0,r)$.* ■

Corollaire 2.7.1 *Si la série entière $\sum a_n z^n$ converge pour $z_0 \in \mathbb{C}$, elle converge normalement dans tout disque $\overline{D}(0,r)$, avec $r < |z_0|$.*

Définition 2.7.2 *Etant donnée une série entière $\sum a_n z^n$, on appelle le nombre R le* ***rayon de convergence*** *de cette série tel que:*

$$R = \sup \{r \in \mathbb{R}_+ : (a_n r^n) \text{ soit bornée}\} \in [0, +\infty].$$

En plus
i) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente..
ii) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ est divergente.
On dit que $D(0, r)$ le disque de convergence, et que $C(0, r)$ lecercle de convergence.

Proposition 2.7.1 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont les coefficients sont non nuls à partir d'un certain rang.*
1) Si la suite $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ tend vers l lorsque n tend vers l'infini, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est $R = \frac{1}{l}$ (avec la convention $R = +\infty$ si $l = 0$ et $R = 0$ si $l = \infty$).
2) De même, si la suite $\sqrt[n]{|a_n|}$ tend vers l lorsque n tend vers l'infini, alors $R = \frac{1}{l}$ avec la même convention.

Exemple 2.7.1 *Pour $a_n = \frac{1}{n}$ et $z \neq 0$, on a*

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\to} 1 = l,$$

donc le rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{n}$ est $R = \frac{1}{l} = 1$, il résulte que:

Si $|z| < 1$, alors que la série converge absolument.
Si $|z| > 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n z^n| = +\infty$ et la série $\sum \frac{z^n}{n}$ diverge.
Si $|z| = 1$, la série $\sum \frac{z^n}{n}$ diverge.
Le domaine de convergence de $\sum \frac{z^n}{n}$ est $\overline{D}(0, 1) \backslash \{1\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} \backslash \{1\}$.

Définition 2.7.3 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit que une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ et est analytique en $z_0 \in U$ s'il existe un réel $R > 0$ et une série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence supérieur ou égale à R tel que:*
1) $D(z_0, R) \subseteq U$.
2) $\forall z \in D(z_0, R) : f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.
La fonction est dite analytique sur U s'elle analytique en tout point de U.

Exemple 2.7.2 *1)* $f(z) = \exp(z)$ *est analytique sur* $\mathbb{C}$ *car*

$$\forall z_0 \in \mathbb{C} : e^z = e^{z-z_0+z_0} \quad = e^{z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!} \text{ où } a_n = \frac{e^{z_0}}{n!}.$$

2) $f(z) = \frac{1}{z}$ *est analytique sur* $\mathbb{C}^*$, *car*

$$\forall z_0 \in \mathbb{C} : \frac{1}{z} = \frac{1}{z_0 \left(\frac{z-z_0}{z_0} + 1 \right)} = \frac{1}{z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z_0^n} (z-z_0)^n \text{où } |z-z_0| \leq |z_0| .$$

Corollaire 2.7.2 *Si* f *est analytique sur* U, *alors* f' *est aussi analytique sur* U.

Remarque 2.7.1 *1) Comme les fonctions holomorphes, les opérations élémentaires restes valables pour les fonctions analytiques.*
2) L'holomorphie et l'analycité sont des concepts équivalents. Beaucoup de mathématiciens les utilisent comme synonymes.
3) Il est clair que sur un domaine Ω : f *analytique* $\Leftrightarrow$ f *holomorphe.*
4) La région d'analycité ne contient que des points intérieurs, donc les fonctions analytiques sont définies seulement dans des domaines (ouverts et connexes).
5) On a donc: analycité $\Rightarrow$*différentiabilité, mais la réciproque est fausse.*

2.7.2 Principe du prolengement analytique

Théorème 2.7.2 *Soient* U *un ouvert connexe de* $\mathbb{C}$, $a \in U$ *et* $f : U \to \mathbb{C}$ *une fonction analytique en* a. *Les conditions suivantes sont equivalentes*
1) f $(f = 0)$ *est identiquement nulle dans* U.
2) $\exists R > 0$ *tel que* $(\forall z \in D(a, R) \Rightarrow f(z) = 0)$.
3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(a) = 0$.

Corollaire 2.7.3 *Soient* U *un ouvert connexe de* $\mathbb{C}$, *si* f, g *sont analytique et s'il existe* $a \in U$ *et* $R > 0$ *telle que* $\forall z \in D(a, R) \Rightarrow f(z) = g(z)$, *alors* $f \equiv g$ *pour tout* $z \in U$.

2.7.3 Principe des zéros isolés

Définition 2.7.4 *Soit* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. *Le point* a *dit isolé dans* Ω, *s'il existe* R *tel que*

$$D(0, R) \cap \Omega = \{a\}.$$

Exemple 2.7.3 *Les points de* $\mathbb{N}$ *sont isolés dans* $\mathbb{N}$, *car ona*

$$D\left(n, \frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{N} = \{n\}.$$

Théorème 2.7.3 *Soit* Ω *un ouvert connexe (domaine) et* f *une fonction analytique sur* Ω *qui n'est pas identiquement nulle, alors les zéros de* f *dans* Ω *sont isolés.*

2.7.4 Ordre d'un zéro d'une fonction analytique

Théorème 2.7.4 *Soit* Ω *un ouvert connexe (domaine) et* f *une fonction analytique sur* Ω *et* $z_0 \in \Omega$. *Les deux assertions sont équivalentes*

1) $\exists k \in \mathbb{N} : f(z_0) = f'(z_0) = ... = f^{(k-1)}(z_0)$ *et* $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

2) Il existe une fonction analytique g *sur* Ω *telle que:*

$$g(z_0) \neq 0 \text{ et pour tout } z \in \Omega : f(z) = (z - z_0)^k g(z).$$

Définition 2.7.5 *On dit que* $z_0 \in \Omega$ *est un zéro díordre* k *de la fonction* f *si l'une des assertions du Théorème 2.7.4 est vraie.*

Exemple 2.7.4 *Le point* $z_0 = 0$ *est un zéro d'ordre* 2 *de la fonction* $f(z) = e^{z^2} - 1$, *car* $f(0) = f'(0) = 0$ *et* $f''(0) \neq 0$.