Université de M'sila
Faculté des mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques
$2^{ième}$ **année Mathématiques(2021-2022)**

Série N° 01(Analyse complexe)

N.B: Les questions $(*)$ sont hors **T.D.**

Exercice 1 $(*)$ *1) Ecrivez les nombres complexes suivants sous la forme algébrique:* $z_1 = \dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$ *et* $z_2 = \dfrac{1+\lambda i}{2\lambda + \left(\lambda^2 - 1\right) i}, \lambda \in \mathbb{R}$.
2) Mettre sous la forme trigonométrique les nombres complexes suivants: $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ *et* $z_2 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$.
3) Ecrire sous la forme exponentielle les nombres complexes suivants: $a = 1 - i, b = -3, c = \sin x + i \cos x, x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 *1) Calculer* $\sin(i), \cos(i), \log(i), \log(-1), Log(i), Log(-1)$.
2) Comparer entre $Log(i-1)^2$ *et* $2Log(i-1)$, *puis conclure.*
3) Résoudre les équations: $\sin(z) = 2$, $\exp(z) = -1$, $\exp(z) = i$, $z^5 - 1 = i$.

Exercice 3 *1) Trouver tous les points de discontinuité des fonctions suivantes:*
a) $f(z) = \dfrac{z-2}{z^2+4z+10}$; *b)*$^{(*)}$ $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2+1)}$; *c)*$^{(*)}$ $f(z) = \dfrac{z^2+3}{z^3-27}$; *d)* $f(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$.
2)$^{(*)}$ *Soit f une fonction complexe donnée par:*

$$f(z) = \frac{z^2 - 2iz - 1}{z^4 + 2z^2 + 1}$$

a) Calculer $\lim\limits_{z \mapsto i} f(z)$.
b) f *est-elle continue en* $z = i$?
c) f *est-elle prolongeable par contnuité en* $z = i$?

Exercice 4 *1) Soit $G = P + IQ$, exprimer les fonctions P, Q en fonction de x et y dans les cas suivants:*
a) $G = z^3$; *b)* $G = z + \dfrac{1}{z}$; *c)*$^{(*)}$ $G = \dfrac{z}{z+1}$; *d)*$^{(*)}$ $G = ze^z$.
2) Trouver un domaine Ω sur lequel les fonctions suivantes sont holomorphes, puis trouver l'expréssion de f' en fonction de z:
a) $f(z) = z^3$; *b)* $f(z) = \sin(z)$; *c)*$^{(*)}$ $f(x+iy) = \dfrac{x - iy}{(x^2+y^2)^2}$; *d)* $f(x+iy) = x^2 + y^2$; *e)* $f(x+iy) = x^2 + y^2 - 2ixy$; *f)*$^{(*)}$ $f(z) = \left(z - \frac{1}{z}\right)^3$; *g)*$^{(*)}$ $f(z) = \dfrac{z^2 - 2}{z^2 - 3z - 2}$.
3)$^{(*)}$ *Exprimer les conditions de Cauchy-Riemann, en fonction de coordonnes polaires.*

Exercice 5 *a) Montrer que la fonction P est la partie réelle d'une fonction holomorphe dans les cas suivants:*
1) $P(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$ *et* $f(0) = i$; *2)* $P(x,y) = x^3 - 3xy^2$; *3)* $P(r,\theta) = r^3\cos(3\theta)$; *4)*$^{(*)}$ $P(x,y) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$.
b)$^{(*)}$ *Soit $P(x,y) = x^3 - 3\lambda xy^2 + 2x + 1$. Donnez une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que P soit la partie réelle d'une fonction holomorphe f sur $\mathbb{C}$ et trouver f.*
c)$^{(*)}$ *Le théorème des accroisements finis est -il valable pour les fonctions holomorphes?*

Correction (série 1)

Exercice 2 :

1) on a $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, donc

$\sin(i) = \frac{e^{-1} - e^{1}}{2i} = sh(1)\, i$

(*) $\log(i) = \ln|i| + i \arg i = \ln(1) + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

$= i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$

* $Log(i) = \ln|i| + i\, Arg(i) = \frac{\pi}{2} i$
* $Log(-1) = \ln|-1| + i\, Arg(-1)$

$= \pi i$

2) on compare entre $Log(i-1)^2$ et $2\,Log(i-1)$:

on a : $Log(i-1)^2 = Log(-2i) =$

$\ln|-2i| + i\, Arg(-2i) = \ln 2 - \frac{\pi}{2} i$

et $2\,Log(i-1) = 2(\ln|i-1| + i\, Arg(i-1))$

$= \ln 2 + \frac{3\pi}{2} i$

donc $Log(i-1)^2 \neq 2\, Lg(i-1)$

3) $\sin(z) = 2 \iff \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2$

on pose $w = e^{iz}$, on trouve

$$w^2 - 4iw - 1 = 0 \iff \begin{cases} w = (2+\sqrt{3})i \\ w = (2-\sqrt{3})i \end{cases}$$

donc

$\sin(z) = 2 \iff z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - \ln(2 \pm \sqrt{3})i$ avec $k \in \mathbb{Z}$

*) $\exp(z) = -1 \iff z = \ln|-1| + i \arg(-1)$

$\iff z = (2k+1)\pi i$ avec $k \in \mathbb{Z}$

*) $z^5 - 1 = i \iff z^5 = 1 + i$, donc

z est la racine 5ième de $(1+i)$

$z_k = \sqrt[10]{2} + e^{i(\pi/20 + \frac{2k\pi}{5})}$ avec

$k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Exo 3

a) $f(z) = \frac{z-2}{z^2 + 4z + 10}$

f définie $\iff z^2 + 4z + 10 \neq 0$

donc les pts de discontinuité de f sont $a = (-2 + i\sqrt{6})$ et $(-2 - i\sqrt{6}) = b$

$\lim_{z \to a} f(z)$ ~~∄~~ n'est pas finie.

b) $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$

f définie $\iff z(z^2+1) \neq 0$

$\iff z \neq 0$ ou $z \neq i$ ou $z = -i$

~~et on a $\lim_{z \to 0} f(z) = +\infty$ et~~

~~$\lim_{z \to i} f(z) = \infty$, donc les pts de~~

~~disco~~ discontinuité ~~son~~t :

$z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$

d) $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$ défini ssi

$z^4+1 \neq 0 \iff z^4 \neq -1$

on trouve la racine $4^{ième}$ de (-1)

$$z_k = |-1|^{\frac{1}{4}}\left(\cos\left(\frac{Arg(-1)+2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{Arg(-1)+2k\pi}{4}\right)\right)$$

$k = 0,1,2,3$

sont les pts de discontinuité.

EX 4:

1) on exprime les f^{cts} P et φ en f^{ct} de x et y : on a $z = x+iy$.

a) $G = z^3 = (x+iy)^3 = \underbrace{x^3-3xy^2}_{P} + i\underbrace{(3yx^2-y^3)}_{\varphi}$

b) $G = z + \frac{1}{z} = (x+iy) + \frac{1}{x+iy}$

$$= \underbrace{x + \frac{x}{x^2+y^2}}_{P} + i\underbrace{\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)}_{\varphi}$$

2) On cherche Ω tq les f^{cts} sont holomorphes :

a) $f(z) = z^3 \iff f(x+iy) = (\cancel{x+iy})^3$

$$= \underbrace{x^3-3xy^2}_{P} + i\underbrace{(3yx^2-y^3)}_{\varphi}$$

f holomorphe $\Rightarrow$ les C.C.R sont vérifiées, ~~i.e~~ et on a.

$\frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$

et $\frac{\partial P}{\partial y} = -6xy = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ alors f satisfait aux C.C.R sur $\mathbb{C} = \Omega$. et $f'(z) = 3z^2$

d) $f(x+iy) = \underbrace{x^2+y^2}_{P} + i\cdot \underbrace{0}_{\varphi=0}$

~~on a~~ Si on prend f est holomorphe, alors f satisfait les C.C.R, ~~i.e~~. Et on a.

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = 2x \text{ et } \frac{\partial P}{\partial y} = 2y \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

donc f satisfait les C.C.R ssi $x = y = 0$, alors $\Omega = \{0\}$ mais Ω n'est pas ouvert ~~donc~~ et plus son intérieur est vide.

e) $f(x+iy) = \underbrace{x^2+y^2}_{P} \underbrace{-2iy}_{\varphi}$

$\frac{\partial P}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial P}{\partial y} = -2x$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$

$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -2y$, alors f satisfait les C.C.R ssi

$x = 0$ et $y \in \mathbb{R}$.

f holomorphe sur $U = \{iy, y \in \mathbb{R}\}$.

et en plus

$$f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x - 2iy$$

$$= 2(x - iy) = 2\bar{z}$$

3) On exprime les C.C.R en $f^{\underline{ct}}$ de (r, θ) ; On pose $z = re^{i\theta}$ où

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, on a $\theta = \arg(z)$ et $|z| = r$

et on a $f(z) = P(x,y) + i\varphi(x,y)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\cdot\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial P}{\partial y} \\ \quad = \frac{\partial P}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial P}{\partial y}\sin\theta \quad \text{--- (1)} \\ \frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \quad = -r\frac{\partial P}{\partial x}\sin\theta + r\frac{\partial P}{\partial y}\cos\theta \quad \text{--- (2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} \\ \quad = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\sin\theta \quad \text{--- (3)} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \quad = -r\frac{\partial \varphi}{\partial x}\sin\theta + r\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos\theta \quad \text{--- (4)} \end{cases}$$

(1) + (2) + (3) + (4) et on a les C.C.R sont vérifiées pour x et y alors

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$$

on trouve les C.C.R en coordonnées polaires comme suit,

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \text{ et } \frac{\partial P}{\partial \theta} = -r\frac{\partial \varphi}{\partial r}}$$

Ex 5 :

a) On montre que P est la partie réelle d'une $f^{\underline{ct}}$ holomorphe :

1) $P(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$ et $f(0) = i$

Si on prend $f = P + i\varphi$ holomorphe

$\Rightarrow P$ et φ sont harmoniques

on a $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \Delta P = 0$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, ce qui donne

elle existe un $f^{\underline{ct}}$ $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tq $f = P + i\varphi$ soit holomorphe

En utilisant les C.C.R, on a :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2 + 12xy - 3y^2$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y) = \int \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + k(x)$$

$$= \boxed{3x^2y + 6xy^2 - y^3 + kx}$$

D'autre part, on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y} \Leftrightarrow$$

$$6xy + 6y^2 + k'(x) = -6x^2 + 6xy + 6y^2$$

$$k'(x) = -6x^2 \Rightarrow k(x) = -2x^3 + C$$

alors

$\varphi(x,y) = 3x^2y + 6xy^2 - y^3 - 2x^3 + C,\ C\in\mathbb{R}$

et

$f(z) = f(x+iy) = P + i\varphi$

~~on pose~~

$= x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3 +$

$i(3x^2y + 6xy^2 - y^3 - 2x^3 + C)$

on pose $y=0$, on obtient

$f(x) = x^3 + i(-2x^3 + C)$ ~~donc~~

et on remplace x par z, on a

$$\boxed{f(z) = z^3(1-2i) + Ci,\ C\in\mathbb{R}}$$

lorsque $f(0) = i \Rightarrow C = 1$, donc

$$\boxed{f(z) = (1-3i)z^3 + i}$$

3) $P(r,\theta) = r^3\cos(3\theta)$.

on a $\Delta P = 0$ pour tout r,θ

donc $\exists\ \varphi(r,\theta)$ tq: $f = P + i\varphi$

soit holomorphe.

En utilisant les C.C.R:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial P}{\partial \theta} = -r\dfrac{\partial \varphi}{\partial r} \end{cases}$$, on a

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta} = r\dfrac{\partial P}{\partial r} = 3r^3\cos(3\theta)$

$\Rightarrow \varphi(r,\theta) = \displaystyle\int \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\,d\theta + K(r)$

$= r^3\sin(3\theta) + K(r)$

d'autre part, on a

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial r} = 3r^2\sin(3\theta) + K'(r) = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial \theta}$

$= \dfrac{3}{r}\cdot r^3\sin(3\theta) \Rightarrow K(r) = C \in\mathbb{R}$

donc

$\varphi(x,y) = r^3\sin(3\theta) + K,\ K\in\mathbb{R}$

et $f(z) = f(re^{i\theta})$

$= r^3\cos(3\theta) + i(r^3\sin(3\theta) + d)$

on pose $\theta = 0$, on obtient

$f(r) = r^3 + Ci$ et on remplace

r par z donc

$f(z) = z^3 + Ci \mid C\in\mathbb{R}$.