الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté de Technologie
Socle commun

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة محمد بوضياف بالمسيلة
كلية التكنولوجيا
قاعدة الجذع المشترك

Niveau : **LICENCE** L1 **2019/2020** Option : **ST**

Module : Physique 2

SERIE N° : 01

EXERCICE 01 :

Soient les fonctions scalaire $f(x,y,z)$*, et vectorielle* $\vec{g}(x,y,z)$ *telle que :*

$f(x,y,z) = xy + yz + zx$ *et* $\vec{g}(x,y,z) = x^2y\vec{i} + y^2z\vec{j} + z^2x\vec{k}$

1° - Calculer la différentielle des deux fonctions.

2° - Calcule le gradient de $f(x,y,z)$ *ainsi que la divergence et le rotationnel de* $\vec{g}(x,y,z)$.

EXERCICE 02 :

Soit la fonction scalaire $T(x,y,z)$,

1°*- Montrer que la dérivée directionnelle est la projection de son gradient sur cette direction.*

2°*- Si* $T(x,y,z) = x^2y + xz$*, que vaut la dérivée directionnelle au point* $A(1,2,-1)$ *dans la direction* $\vec{n}(2,-2,1)$

EXERCICE 03 :

Calculer les intégrales suivantes :

- $\int_0^1 \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$ et $\int_0^1 \frac{x\,dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$

EXERCICE 04 :

- *Soit la fonction* $f(x,y) = xy$,

1°- Calculer l'intégrale de surface dans le domaine $x = 0, x = a$ *et* $y = 0, y = x$.

- *Si* $f(x,y) = 1$,

2°- Calculer son intégrale sur la surface d'une sphère de rayon " R *"*

3°- Calculer son intégrale sur le volume d'une sphère de rayon " R *"*

EXERCICE 06 : SUPPLÉMENTAIRE :

Soit le champ vectoriel $\vec{A}(x,y,z) = a\vec{r}$ *de symétrie sphérique. "* r *" est le rayon de la sphère*

1°*- Vérifier le théorème de Green-Ostrogradski à travers l'hémisphère supérieur.*

Si le champ vectoriel $\vec{A}(x,y,z) = 2y\vec{i} + 3x\vec{j} - z^2\vec{k}$

2°- *Vérifier le théorème de Stokes à travers l'hémisphère supérieur d'une sphère d'équation* $x^2+y^2+z^2=9$ *où " C " est le contour sur lequel s'appuie cette surface*

3°- *Pour un vecteur irrotationnel (potentiel)* $\vec{A}$ *, Montrer que la circulation de ce vecteur est indépendante du chemin suivit, et qu'il dérive d'une fonction scalaire* $\varphi(x,y,z)$.

EXERCICE 06 : SUPPLÉMENTAIRE :

Sachant que :
$$\begin{cases} div(\vec{a}f) = f div(\vec{a}) + \vec{a}\circ\overrightarrow{grad}(f) = \nabla\circ(\vec{a}f(r)) = f\nabla\circ\vec{a} + \vec{a}\circ\nabla f \\ \overrightarrow{rot}(\vec{a}f) = f\overrightarrow{rot}(\vec{a}) + \vec{a}\wedge\overrightarrow{grad}(f) = \nabla\wedge(\vec{a}f(r)) = f\nabla\wedge\vec{a} + \vec{a}\wedge\nabla f \end{cases}$$

1°- *Calculer* $\nabla\circ\vec{r}$ *et* $\nabla\circ(r^{n-1}\vec{r})$

2°- *Montrer que* $\nabla\wedge(\vec{r}f(r)) = 0$

3°- *Montrer les égalités suivantes* :($\overrightarrow{rot}\equiv\vec{\nabla}\wedge$; $\overrightarrow{grad}\equiv\vec{\nabla}$; $div\equiv\vec{\nabla}\circ$; $\Delta\equiv\vec{\nabla}\circ\vec{\nabla}$)

- $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}) = 0$; $div(\overrightarrow{grad}) = \Delta$; $div(\overrightarrow{rot}) = 0$
- $\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\circ\vec{A}) - \Delta\vec{A}$, $\vec{\nabla}\circ(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\circ\vec{\nabla}\wedge\vec{A} - \vec{A}\circ\vec{\nabla}\wedge\vec{B}$, $\vec{\nabla}(UV) = V\vec{\nabla}U + U\vec{\nabla}V$
- $\vec{\nabla}(\vec{A}\circ\vec{B}) = \vec{A}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}) + \vec{B}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) + (\vec{B}\circ\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A}\circ\vec{\nabla})\vec{B}$
- $\vec{\nabla}\wedge(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{A}(\vec{\nabla}\circ\vec{B}) - (\vec{A}\circ\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{B}(\vec{\nabla}\circ\vec{A}) - (\vec{B}\circ\vec{\nabla})\vec{A}$

4°- **(D.M)**

Montrer que le gradient de la fonction f, *la divergence et le rotationnel de la fonction* $\vec{g}$ *s'écrivent*

En coordonnées cylindriques : $f = f(\rho;\theta;z) = f_\rho\vec{u}_\rho + f_\theta\vec{u}_\theta + f_z\vec{k}$

- $\overrightarrow{grad}(f) = \frac{\partial f_\rho}{\partial\rho}\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f_\theta}{\partial\theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f_z}{\partial z}\vec{k}$
- $\vec{\nabla}\circ\vec{g} = Div(\vec{g}) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho g_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial g_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial g_z}{\partial z}$
- $\vec{\nabla}\wedge\vec{g} = \overrightarrow{rot}(\vec{g}) = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial g_z}{\partial\theta} - \frac{\partial g_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_\rho + \left(\frac{\partial g_\rho}{\partial z} - \frac{\partial g_z}{\partial\rho}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho g_\theta) - \frac{\partial g_\rho}{\partial\theta}\right)\vec{k}$

En coordonnées sphériques : $\vec{g} = g(r;\theta;\varphi) = g_\rho\vec{u}_\rho + g_\theta\vec{u}_\rho + g_\varphi\vec{u}_\rho$

- $\overrightarrow{grad}(f) = \frac{\partial f_r}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f_\theta}{\partial\theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r sin\theta}\frac{\partial f_z}{\partial z}\vec{u}_\varphi$
- $\vec{\nabla}\circ\vec{g} = Div(\vec{g}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 g_r) + \frac{1}{r sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(sin\theta g_\theta) + \frac{1}{r sin\theta}\frac{\partial(g_\varphi)}{\partial\varphi}$
- $\vec{\nabla}\wedge\vec{g} = \overrightarrow{rot}(\vec{g}) = \frac{1}{r sin\theta}\left(\frac{\partial(sin\theta g_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial g_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{u}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial g_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(r g_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r g_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial g_r}{\partial\theta}\right)\vec{k}$

Exo1 : $f(x,y,z) = xy + yz + zx$:

1°/ ⊛ $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$: $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x} = (y+z) ; \frac{\partial f}{\partial y} = (x+z) ; \frac{\partial f}{\partial z} = (x+y) \right.$

$\Rightarrow df = (y+z)dx + (x+z)dx + (y+x)dz$

⊛ $\vec{g}(x,y,z) = x^2y\vec{i} + y^2z\vec{j} + z^2x\vec{k}$: $\left\{ \frac{\partial g_x}{\partial x} = \ldots ; \frac{\partial g_y}{\partial y} = \ldots ; \frac{\partial g_x}{\partial z} = \ldots ; \partial g_y/\partial x = \ldots ; \partial g_y/\partial y = \ldots ; \frac{\partial g_y}{\partial z} = \ldots ; \partial g_z/\partial x = \ldots ; = \right.$

$\vec{g} = g_x\vec{i} + g_y\vec{j} + g_z\vec{k}$

$$\boxed{d\vec{g} = (2xy\vec{i} + z^2\vec{k})dx + (x^2\vec{i} + 2yz\vec{j})dy + (y^2\vec{j} + 2xz\vec{k})dz}$$

2°/ * $\overrightarrow{grad}(f(x,y,z)) = \vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$

* $\operatorname{div}\vec{g}(x,y,z) = \vec{\nabla}\cdot\vec{g} = \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2z) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2x)$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{g} = 2(xy + yz + zx)$

* $\overrightarrow{rot}\,\vec{g} = \vec{\nabla}\wedge\vec{g} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & y^2z & z^2x \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(z^2x)}{\partial y} - \frac{\partial(y^2z)}{\partial z}\right)\vec{i} + \vec{j}\left(\frac{\partial(x^2y)}{\partial z} - \frac{\partial(z^2x)}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial(y^2z)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2y)}{\partial y}\right)$

$\vec{\nabla}\wedge\vec{g} = -\left(y^2\vec{i} + z^2\vec{j} + x^2\vec{k}\right)$

Exo2 : Soit $T(x,y,z)$. Soit la variation $\vec{dr} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz = dr\vec{u}$

$\vec{u}$ est dans la direction de dr qui a pour coef directeurs ~~par rapport~~ (dans le système cartesien, ($\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$) $\left[(\vec{dr},\vec{ox}), (\vec{dr},\vec{oy}), (\vec{dr},\vec{oz})\right]$

Soit la differentielle de T : $dT = \frac{\partial T}{\partial x}dx + \frac{\partial T}{\partial y}dy + \frac{\partial T}{\partial z}dz$

$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right)$

$= \left(\frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left((\vec{dr}\cdot\vec{i})\vec{i} + (\vec{dr}\cdot\vec{j})\vec{j} + (\vec{dr}\cdot\vec{k})\vec{k}\right)$

$= \left(\frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(dr\cos\alpha\,\vec{i} + dr\cos\beta\,\vec{j} + dr\cos\gamma\,\vec{k}\right)$

$= (\qquad\qquad)\cdot dr\left(\cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}\right) = \vec{\nabla}f\cdot dr\vec{u}$

$$dT = \vec{\nabla}T \cdot dr\vec{u} \Rightarrow \boxed{\frac{dT}{dr} = \vec{\nabla}T \cdot \vec{u}}$$

2°/ $T(x,y,z) = x^2y + xz$

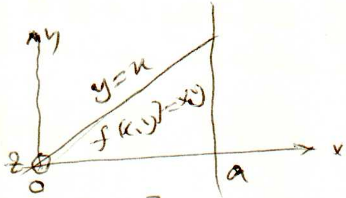
Au p^t A, $(1,2,-1)$, $\quad \vec{grad}\,T = \frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k} =$

$$= (2xy+z)\vec{i} + x^2\vec{j} + x\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{grad}\,T(1,2,-1) = 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{n}(2,-2,1) \Rightarrow \vec{u}_n = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{3}\left(2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}\right)$$

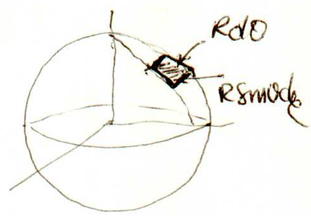
$$\Rightarrow \frac{dT}{dn} = \vec{\nabla}T \cdot \vec{u}_n = \left(3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right) \cdot \frac{1}{3}\left(2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}\right) = 5/3$$



<u>Exercice 03</u>: 1/ $f(x,y) = xy \quad D: \begin{pmatrix} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le x \end{pmatrix}$

$$I = \iint f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^a \left[\int_0^x xy \cdot dy\right] dx = \int_0^a \left[x\frac{y^2}{2}\Big|_0^x\right] dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^a x^3\,dx = \frac{1}{8}x^4\Big|_0^a = a^4/8$$



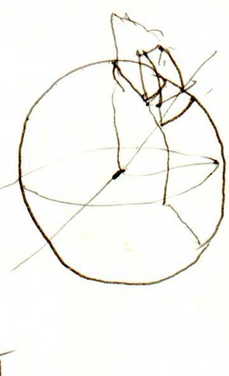
2°/ ~~[illegible]~~ $f(x,y) = 1$

$$I_s = \iint_S f(x,y)\,dS$$, <u>en coordonnées sphériques</u>: $dS = R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$ $\begin{pmatrix} 0 \le \theta < \pi \\ 0 \le \varphi < 2\pi \end{pmatrix}$

$I_s = \iint 1 \cdot R^2 \sin\theta\,d\theta\,d\varphi$, puisque "$\theta$" et "$\varphi$" sont indépendante l'une de l'autre

$$\Rightarrow I_s = R^2 \int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = R^2\left(-\cos\theta\Big|_0^{\pi}\right)\left(\varphi\Big|_0^{2\pi}\right) = 4\pi R^2$$

$$I_v = \iiint f(x,y,z)\,dv$$ en coordonnées sphériques: $dv = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr$



$I_v = \iiint 1 \cdot r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$; puisque "r", "θ" et "φ" sont indépendantes l'une de l'autre, on peut écrire cette intégrale.

$$I_v = \left(\int_0^R r^2\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\left(\int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta\right)$$

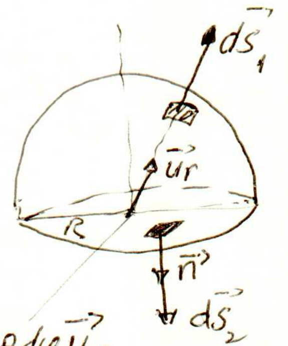
$0 \le r < R$
$0 \le \theta < \pi$
$0 \le \varphi < 2\pi$

$$I_v = \left(\frac{1}{3} r^3 \Big|_0^R\right)\left(\varphi \Big|_0^{2\pi}\right)\left(-\cos\theta \Big|_0^{\pi}\right) = \frac{1}{3} R^3 . 2\pi . 2 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Exercice 04 : $\vec{A} = a\vec{r} = aR\vec{u}_r$. Symétrie sphérique.

* Théorème de la divergence (Green_Ostrogradski) :

$$\oiint \vec{A} \circ \vec{dS} = \iiint_V \mathrm{Div}\,\vec{A}\, dv$$



$\vec{dS}_1 = dS_1 \vec{u}_r$, $dS_1 = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$: $\vec{u}_r$: direction radiale

$\vec{dS}_2 = dS_2 \vec{n}$, $dS_2 = r\, dr\, d\varphi$

$$\Rightarrow \oiint \vec{A} \circ \vec{dS} = \iint_{S_1} \vec{A} \circ \vec{dS}_1 + \iint_{S_2} \vec{A} \circ \vec{dS}_2 = \iint_{S_1} aR\vec{u}_r \circ R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \vec{u}_r + \iint_{S_2} aR\vec{u}_r \circ r\, d\varphi\, dr\, \vec{n}$$

$$\oiint \vec{A} \cdot \vec{dS} = aR^3 \iint \sin\theta\, d\theta\, d\varphi + \cancel{\iint aR . r\, d\varphi\, dr\, \underbrace{(\vec{u}_r \circ \vec{n})}_{\frac{\pi}{2}}} \to 0$$

$$= aR^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi a R^3$$

$$\boxed{\oiint \vec{A} \circ \vec{dS} = 2\pi a R^3}$$

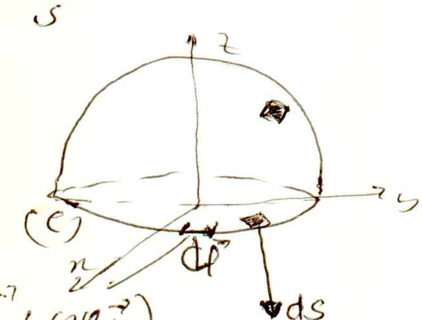
$$\iiint \nabla \circ \vec{A} . dv = \iiint 3a\; dv = 3a \int_0^R r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi a R^3$$

Car $\mathrm{Div}\, \vec{A} = 3a$

2/ $\vec{A} = 2y\vec{i} + 3x\vec{j} - z^2\vec{k}$

* Théorème du rotationnel (STOKES) ; $\oint \vec{A} \circ \vec{dl} = \iint_S \vec{rot}(\vec{A}) \circ \vec{dS}$

$\mathcal{C}$: Contour délimitant l'hémisphère supérieur dont l'équation est ; $x^2 + y^2 + z^2 = 9$



on a, $\vec{rot} A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & 3x & -z^2 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + (3-2)\vec{k}$

$\vec{rot}\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{k}$ et $\vec{dl} = r\, d\varphi\, \vec{u}_\varphi = r\, d\varphi\, (-\sin\varphi\, \vec{i} + \cos\varphi\, \vec{j})$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ "C" $\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases}$ $\Rightarrow \oint \vec{A} \cdot \vec{dl} = \oint (2y\vec{i} + 3x\vec{j} - z^2\vec{k}) \circ (-\sin\varphi\, \vec{i} + \cos\varphi\, \vec{j})\, r\, d\varphi$.

$$\oint \vec{A} \cdot \vec{dl} = \oint \left[2R\sin\varphi(-\sin\varphi) + 3R\cos\varphi(\cos\theta)\right] R\, d\varphi = \dots\dots = 9\pi$$

$\vec{rot}\vec{A} = \vec{k} \Rightarrow \iint \vec{rot}\vec{A} \cdot \vec{dS} = \iint_S \vec{k} \cdot dS\,\vec{u_r} = \iint dS(\vec{k} \cdot \vec{u_r})$

$dS = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \; 0 \leq \varphi < 2\pi \Rightarrow \iint \vec{rot}\vec{A} \cdot \vec{dS} = \iint \cos\theta \cdot dS$

$\Rightarrow R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta\, d\theta = 9\pi$

alors $\oint \vec{A} \cdot \vec{dl} = \iint_S \vec{rot}(\vec{A}) \cdot \vec{dS} = 9\pi$

3/ $\vec{A}$: vecteur irrotationnel $\Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = 0$

D'après le Théorème de STOKES $\iint_S \vec{rot}\vec{A} \cdot \vec{dS} = \oint \vec{A} \cdot \vec{dl} = 0$

$\Rightarrow \oint \vec{A} \cdot \vec{dl} = 0$ et indépendant du chemin suivi

on a, $\vec{A} \cdot \vec{dl} = 0 \Rightarrow (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) = 0$

$A_x dx + A_y dy + A_z dz = d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = 0$

$d\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$

$d\phi = \vec{grad}\varphi \cdot \vec{dl} = \vec{A} \cdot \vec{dl} \Rightarrow \boxed{\vec{A} = \vec{grad}\,\phi}$

pour verifier Maths $\vec{rot}(\text{grad} \ldots) = 0$