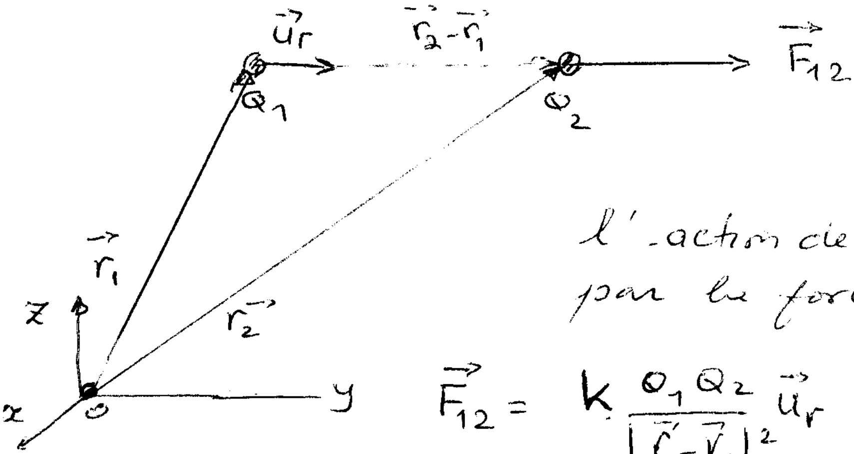
Ex 01 :

On rappelle la loi de Coulomb:
force dû à l'interaction de deux charges



l'action de Q_1 sur Q_2 est donné par la force $\vec{F_{12}}$

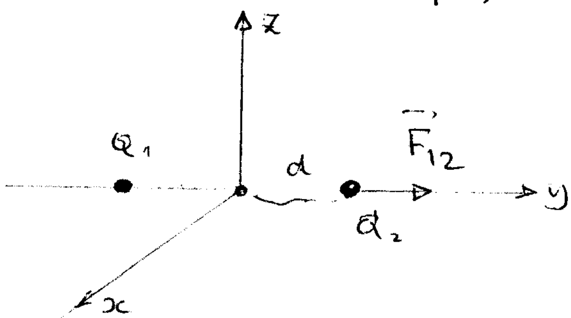
$$\vec{F_{12}} = k \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r_2}-\vec{r_1}|^2} \vec{u_r} \qquad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9$$

$$\varepsilon_0 = 8{,}85\ 10^{-12}$$

$$\vec{r_2}-\vec{r_1} = |\vec{r_2}-\vec{r_1}|\,\vec{u_r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F_{12}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r_2}-\vec{r_1}|^3} (\vec{r_2}-\vec{r_1})}$$

1°/ Deux charges $Q_1(0,-d,0) = q$, $Q_2(0,d,0) = 2q$



$Q_1 > 0$, $Q_2 > 0$ $\Rightarrow$ $\vec{F_{12}}$: est une force de répulsion.

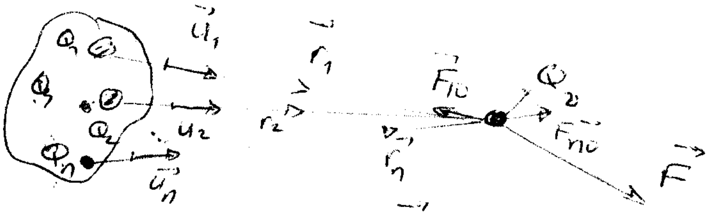
$$\vec{F_{12}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r_2}-\vec{r_1}|^3} (\vec{r_2}-\vec{r_1}) \quad ; \quad \vec{r_2}-\vec{r_1} = (x_2-x_1)\vec{i} + (y_2-y_1)\vec{j} + (z_2-z_1)\vec{k}$$

$$\vec{r_2}-\vec{r_1} = 2d\,\vec{j} \Rightarrow \vec{F_{12}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(q)(2q)}{(2d)^3} (2d\,\vec{j}) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q}{d}\right)^2 \vec{j}$$

$$\boxed{\vec{F_{12}} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q}{d}\right)^2 \vec{j}}$$

Principe de superposition

Si une charge Q_0 est soumise à l'action de plusieurs charges



chaque couple de charges produit une force $\vec{F}_{i0}$

(Q_1, Q_0) : $\vec{F}_{10} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_0}{r_1^2} \vec{u}_1$

(Q_2, Q_0) : $\vec{F}_{20} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_2 Q_0}{r_2^2} \vec{u}_2$

$\vdots$

(Q_n, Q_0) : $\vec{F}_{n0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_n Q_0}{r_n^2} \vec{u}_n$

la force résultante est

$$\vec{F} = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} + \dots + \vec{F}_{n0} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

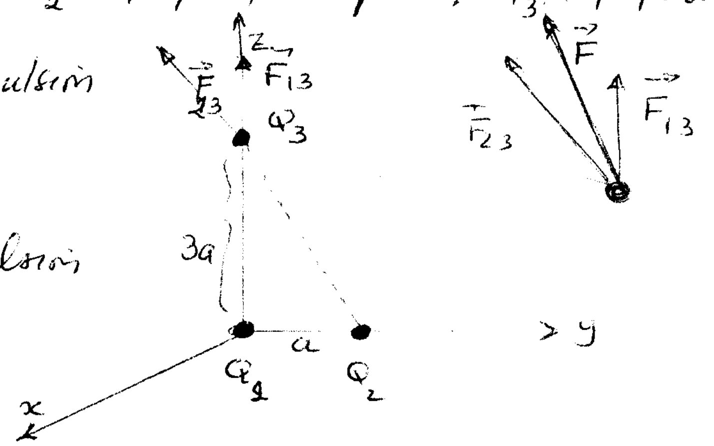
$$\boxed{\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_i Q_0}{r_i^2} \vec{u}_i}$$

- Dans le cas de l'exercice 3 charges.

$Q_1(0,0,0) = 2q$; $Q_2(0, a, 0) = 4q$. $Q_3(0, 0, 3a) = q_0$

$Q_1 = 2q > 0$
$Q_3 = q_0 > 0$ $\Rightarrow$ force de répulsion

$\begin{pmatrix} Q_2 = 4q > 0 \\ Q_3 = q_0 > 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ force de répulsion



* $\vec{F}_{13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)$; $\vec{r}_3 - \vec{r}_1 = (x_3 - x_1)\vec{i} + (y_3 - y_1)\vec{j} + (z_3 - z_1)\vec{k} = 3a\vec{k}$

$$\vec{F}_{13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(2q)(q_0)}{(3a)^3} (3a)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{F}_{13} = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \cdot \frac{2}{9} k}$$

* $\vec{F}_{23} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_2 Q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_2)$; $\vec{r}_3 - \vec{r}_2 = (x_3 - x_2)\vec{i} + (y_3 - y_2)\vec{j} + (z_3 - z_2)\vec{k} = a(-\vec{j} + 3\vec{k})$

$|\vec{r}_3 - \vec{r}_2| = \sqrt{10}\, a$

$$\vec{F}_{23} = \frac{q_0 (4q)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{a(-\vec{j} + 3\vec{k})}{(\sqrt{10}a)^3} = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{4(-\vec{j} + 3\vec{k})}{10\sqrt{10}\, a^2}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\frac{2}{9}\vec{k} + \frac{4}{10\sqrt{10}}(-\vec{j}+3\vec{k})\right) = \frac{10^{-2}\, q q_0}{4\pi\varepsilon_0 a^2}(+60{,}17\vec{k} + 126{,}5\vec{j})$$

$$\boxed{\vec{F} = (-113{,}85\,\vec{j} + 541{,}53)\,10^{7}\cdot\frac{q q_0}{a^2}\ N}$$

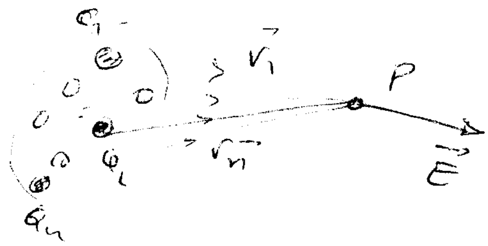
Ex02 : Champ électrostatique

On rappelle que le champ créé par une charge "Q" à une position $\vec{r}$ de cette charge est :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}$$

Pour plusieurs charges, le champ résultant créé par plusieurs charges au point "P" est :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^2}\vec{u}_i$$

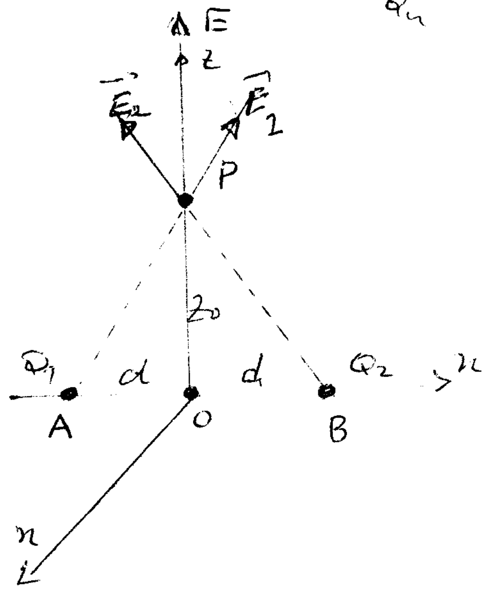


Dans l'exercice on a :

$Q_1\,(0,-d,0) = q > 0$

$Q_2\,(0,d,0) = q > 0$

$P\,(0,0,Z_0)$



$Q_1 > 0 \Rightarrow$ champ dirigé vers l'extérieur de la charge

$Q_2 > 0 \Rightarrow$ le champ est aussi dirigé vers l'extérieur de la charge

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{|\vec{AP}|^3}\vec{AP}, \quad \vec{AP} = \vec{AO} + \vec{OP} = d\vec{j} + z_0\vec{k}, \quad |\vec{AP}| = \sqrt{z_0^2 + d^2}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{|\vec{BP}|^3}\vec{BP}; \quad \vec{BP} = \vec{BO} + \vec{OP} = -d\vec{j} + z_0\vec{k}, \quad |\vec{BP}| = \sqrt{z_0^2 + d^2} = |\vec{AP}|$$

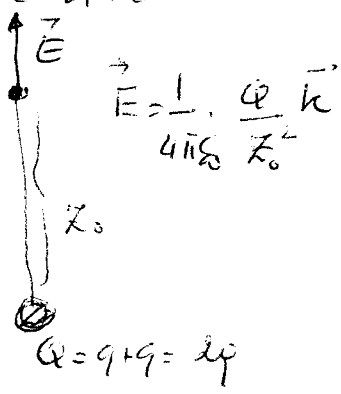
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,(d\vec{j}+z_0\vec{k})}{(d^2+z_0^2)^{3/2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(d^2+z_0^2)^{3/2}}(-d\vec{j}+z_0\vec{k})$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (d^2+z_0^2)^{3/2}}\left[(d\vec{j}+z_0\vec{k}) + (-d\vec{j}+z_0\vec{k})\right]$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{2q z_0}{4\pi\varepsilon_0 (z_0^2+d^2)^{3/2}}\vec{k}}$$

2°/ $z_0 >> 0 \Rightarrow (z_0^2+d^2)^{3/2} \longrightarrow z_0^3 \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\vec{k}}$

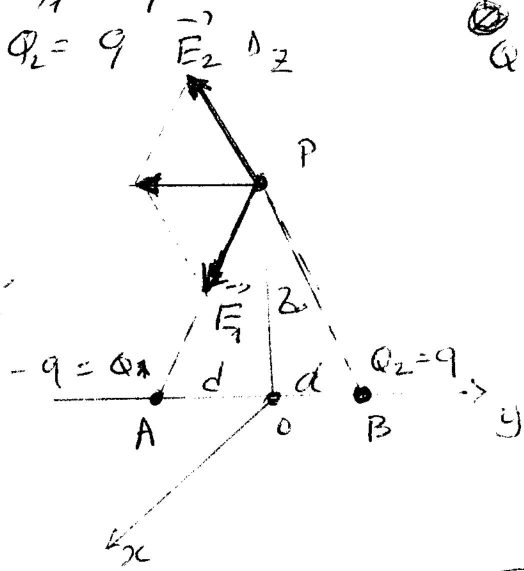
On constate comme si le champ est crée par une charge Q ($Q = 2q$) qui est égale à la somme algébrique des deux charges en A et B et qui se trouve à l'origine c.a.d éloignée de z_0 du pt "P"



3°/ Si ~~maintenant~~ maintenant $Q_1 = -q$
$Q_2 = q$

$Q_1 = -q < 0 \Rightarrow$ le champ est orienté vers la charge Q_1

$Q_2 = q > 0 \Rightarrow$ le champ est orienté vers l'extérieur de la charge Q_2



$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{|AP|^3}\vec{AP}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_2}{|BP|^3}\vec{BP}$$

$\vec{AP} = d\vec{j} + z_0\vec{k}$ $\quad |\vec{AP}| = \sqrt{z_0^2+d^2}$

$\vec{BP} = -d\vec{j} + z_0\vec{k}$ $\quad |\vec{BP}| = \sqrt{z_0^2+d^2} = |\vec{AP}|$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-q\,(d\vec{j}+z_0\vec{k})}{(z_0^2+d^2)^{3/2}} + \frac{q}{(z_0^2+d^2)^{3/2}}(-d\vec{j}+z_0\vec{k})\right)$$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{2qd}{4\pi\varepsilon_0 (z_0^2 + d^2)^{3/2}} \vec{j}}$$

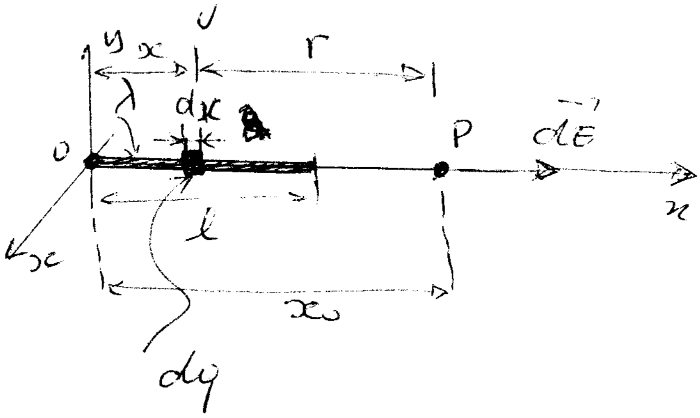
4°/ le cas limite : $z_0 \gg d \Rightarrow (z_0^2 + d^2)^{3/2} \longrightarrow z_0^3$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{2qd}{4\pi\varepsilon_0 z^3} \vec{j}}$$

Contrairement à la constation précédente, malgré que la somme algébrique des deux charges est nulle ($Q = q - q$), il existe un champ le cas particulier et important constitu un dipôle électrique, caractérisé par un moment dipolaire : "2qd" orienté de la charge négative vers la charge positive.

Ex03 Supplémentaire : le champ créé par une distribution continue de charge

Une tige de longueur "l" porte une distribution linéique "λ"



- On prend un élement de longueur de la tige "dx"
- Cet élément porte la charge : $dq = \lambda dx$
- cette charge dq, créée un champ $d\vec{E}$ au point P telle que :

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{|\vec{r}|^3} \vec{r} \qquad \vec{r} = (x_0 - x)\vec{i} \qquad \boxed{|\vec{r}| = (x_0 - x)}$$

le champ élémentaire et :

$$\boxed{d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda\, dx}{(x_0 - x)^2}\, \vec{i}}$$

le champ total créé par la tige et égal à la somme de toutes les champs infinitisimaux $d\vec{E}$, créés par toutes les charges infinitisimales dq, ce qui ~~se~~ traduit cette somme par une intégrale le long de toute la tige.

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int_0^l \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\lambda}{(x_0 - x)^2} dx \right) \vec{i} \;:$$

$\vec{i} = c^{ste}$, il sort de l'intégrale.

Distribution uniforme : $\lambda = c^{ste}$

$$\vec{E} = \left(\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^l \frac{dx}{(x_0 - x)^2} \right) \vec{i},$$

si on fait un changement de variable

$x_0 - x = t \Rightarrow -dx = dt$

ou $dx = -dt$

$$\vec{E} = \left(\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{t_0}^{t} - \frac{dt}{t^2} \right) \vec{i}$$

$$\vec{E} = \left(\frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{t_0}^{t} t^{-2}\, dt \right) \vec{i}$$

on applique le cas général de l'intégration

$$\int t^n dt = \frac{1}{n+1} t^{n+1} + C$$

$n \neq -1$

Dans notre cas : $n = -2$

$n + 1 = -1$

$$\Rightarrow \vec{E} = \left(- \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{-1} t^{-1} \Big|_{t_0}^{t} \right) \vec{i} = \left(\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{t} \Big|_{t_0}^{t} \right) \vec{i}$$

on revient au changement initial $x_0 - x = t$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{x_0 - x} \Big|_0^l \vec{i} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{x_0 - l} - \frac{1}{x_0} \right] \vec{i} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{x_0 - (x_0 - l)}{x_0 (x_0 - l)} \right) \vec{i}$$

or la charge totale et $Q = \lambda l$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon x_0 (x_0 - l)} \vec{i}}$