Université de M'sila

Faculté de : Technologie **Socle commun**

Série de TD N° 03

EXERCICE 01 (FIG.1) : Potentiel électrostatique

Trois charges ponctuelles situées sur les sommets d'un triangle rectangle en $\boldsymbol{A}$ ***fig.1***. *Les charges ont les valeurs* $Q_A(0;0;0) = -2\mu C$, $Q_B(-3;0;0) = 3\mu C$, *et* $Q_C(0;0;3) = 4\mu C$ *(les unités en cm).*

1° - *Déterminer le potentiel crée par les charges* $Q_A; Q_B; Q_C$ *au point* $D(0;4;0)$.

2° - *Déterminer la relation entre le champ et le potentiel électrostatique.*

EXERCICE 02 (FIG.2) : Théorème de GAUSS

Une sphère de rayon $\boldsymbol{R}$, *de centre* $\boldsymbol{O}$ *contient une charge distribuée en surface de densité* $\frac{3}{4}\boldsymbol{\sigma}$. *Au centre est placé une charge ponctuelle* $Q_0 = \sigma\pi R^2$

1° - *Calculer la charge totale du système en fonction de* $\boldsymbol{\sigma}$ *et* $\boldsymbol{R}$.

2° - *En utilisant le théorème de GAUSS, calculer le champ électrique* $\vec{E}$ *en tout point de l'espace ?*

3°- *Déduire le potentiel* $V(\vec{r})$ *en tout point de l'espace. Tracer l'allure de* $E(\vec{r})$ *et* $V(\vec{r})$

Si la sphère est conductrice et privée de la charge du milieu

4°- *Déduire le potentiel* $V(\vec{r})$ *en tout point de l'espace, ainsi que la capacité de ce conducteur.*

EXERCICE 03 (FIG.3) : Association de condensateur

Soit le circuit ci-contre constitué de 4 condensateurs de capacités "$C_1 = 15\mu F$", "$C_2 = 3\mu F$", "$C_3 = 6\mu F$", *et* "$C_4 = 20\mu F$" alimentés par une source de force électromotrice $\mathcal{E} = 15V$

1° - Calculer la capacité équivalente.

2° - *Calculer la charge* "Q_i", *et la différence de potentielle* "U_i" *pour chaque condensateur*

(Question à traiter dans la série 04)

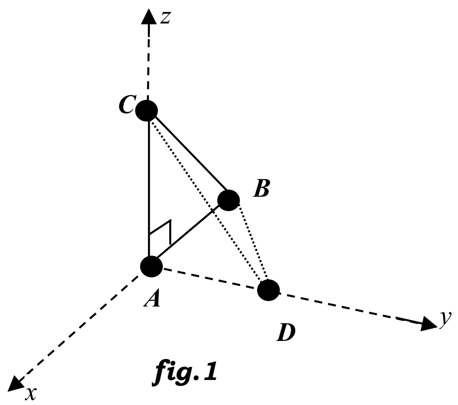


fig.1

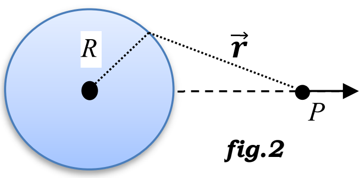


fig.2

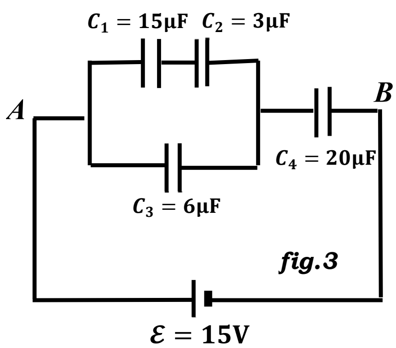


fig.3

Enseignant : L.Laïssaoui

EXERCICE 04 (SUPPLEMENTAIRE) : ***fig.4***

On considère un fil électrique, ayant une distribution de charge linéaire λ uniforme, de très grande longueur $\boldsymbol{l}$ placé au centre d'une couche cylindrique de rayon $\boldsymbol{r}$ et de même hauteur $(\boldsymbol{h} = \boldsymbol{l})$**.** *La couche cylindrique porte une distribution uniforme de charge superficielle* $\boldsymbol{\sigma}$**.**

1° - *En utilisant le théorème de Gauss, calculer le champ électrique, à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre.*

EXERCICE 04 (SUPPLEMENTAIRE) :

*On considère un fil rectiligne de longueur $\boldsymbol{a}$, comme indiqué sur la figure (**fig.5**), portant une densité de charge linéique $\boldsymbol{\lambda}$ (constante).*

1° - *Déterminer la composante $\boldsymbol{d\vec{E}_x}$ du champ électrique crée en un point $\boldsymbol{M}$ de coordonnées $\left(\frac{3}{2}a, 0{,}0\right)$ par l'élément de longueur $\boldsymbol{dx}$ repéré par $\boldsymbol{x}$.*

2° - *Déduire la grandeur du champ électrique au point $\boldsymbol{M}$*

3° - *Quel est le potentiel électrique au point $\boldsymbol{M}$* **?**

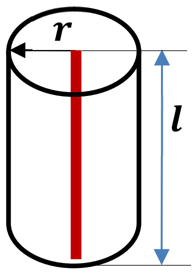


fig.4

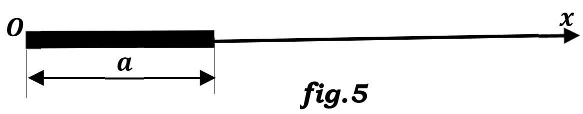
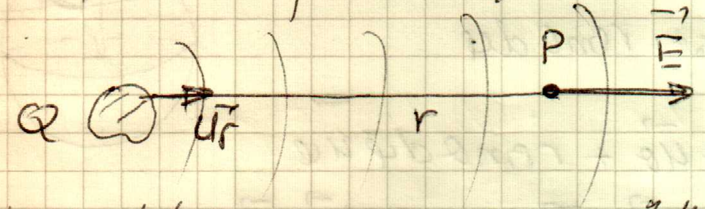


fig.5

Ex01 : On rappelle que l'énergie potentielle est à l'opposée du travail exterieur (dû à l'environnement ou l'agent exterieur)

$$W = \int \vec{F} \circ \vec{dl} = -\Delta U = -(U_f - U_i)$$

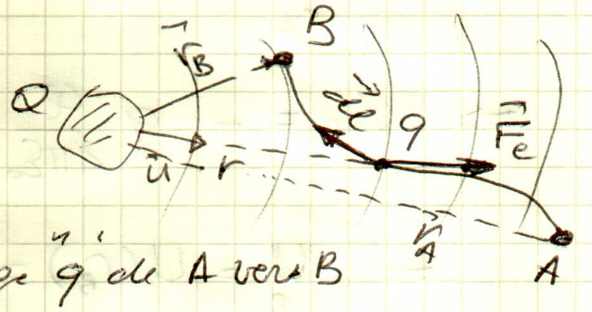
- soit "Q" une charge ponctuelle (ou distribuée), elle crée un champ életrique dans tout l'espace.



au pt "P" le champ $\vec{E}$ est : $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u_r}$

Si On fait déplacer une charge "q" dans le champ $\vec{E}$, créé par "Q", on effectu un travail à l'encontre de la force électrostatique dûe à l'interaction des deux charges (Q, q) : Car $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Qq}{r^2} \vec{u_r} = q\vec{E}$

la charge se deplace de A —> B
elle subit l'action de $\vec{F} = q\vec{E}$
le travail effectué par l'agent exterieur pour ramener la charge "q" de A vers B

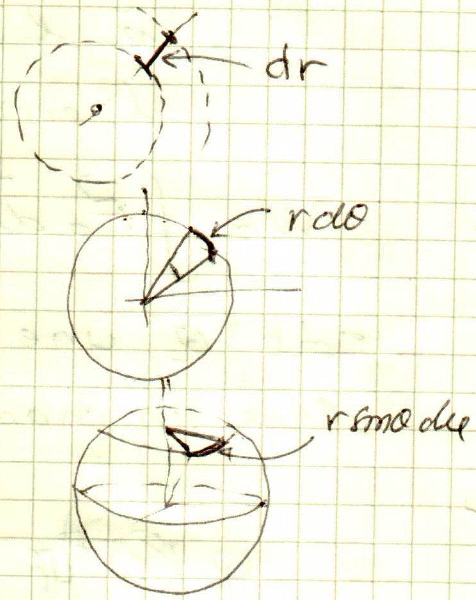


est : $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \circ \vec{dl}$, la force appliquée est à l'opposé de la force électostatique si $Q > 0$, $q > 0$ $F = F_e$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \circ \vec{dl} = \int q \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \vec{u_r} \circ \vec{dl}$$

$\vec{dl}$ est le déplacement infinitsimal sur le chemin AB : en coordonnées cartesiennes : $\vec{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

mais vue la configuration du système, on peut utilisé le système de coordonnées sphérique :
$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi) \longrightarrow (r, \theta, \varphi)$.



- le déplacement suivant la direction radiale est dr
- le déplacement suivant la direction polaire est $r\,d\theta$
- le déplacement suivant la direction azimutale est $r\sin\theta\,d\varphi$

$$\Rightarrow \vec{dl} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{u}_\varphi$$

d'où $\vec{u}_r \circ \vec{dl} = dr\,\underbrace{(\vec{u}_r \circ \vec{u}_r)}_{1} + r\,d\theta\,\underbrace{(\vec{u}_r \circ \vec{u}_\theta)}_{0} + r\sin\theta\,d\varphi\,\underbrace{(\vec{u}_r \circ \vec{u}_\varphi)}_{0}$

$$\Rightarrow \vec{u}_r \circ \vec{dl} = dr$$

$$W_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} q\,\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dr}{r^2} = -q\,\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}\Big|_{r_A}^{r_B} = -(U_f - U_i) = -(U_B - U_A)$$

$$\Rightarrow W_{AB} = -q\,\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) = -(U_B - U_A)$$

$$\Rightarrow U_B = U(r_B) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r_B}$$

$$U_A = U(r_A) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r_A}$$

pour r quelconque, $U(r) = \dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{1}{r}$

c'est l'énergie potentielle pour différent position

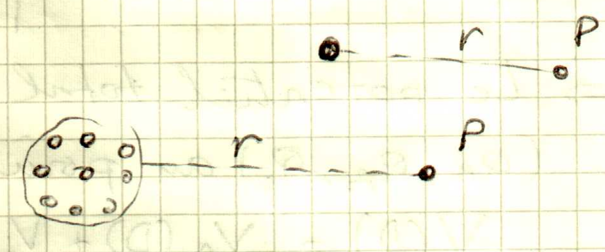
- On définit le potentiel $V(r)$ comme étant l'énergie potentielle par unité de charge

$$V(r) = \frac{U(r)}{q} \Longrightarrow V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$$

le potentielle, comme l'énergie potentielle, c'est la différence qui a un effet physique, donc on fait un choix de telle sorte que le potentiel de référence $V_0 = 0$, et on mesure la potentielle par rapport à cette référence.

_ Pour une charge ponctuelle : $V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$

_ Pour une distribution de "n" charge ponctuelles



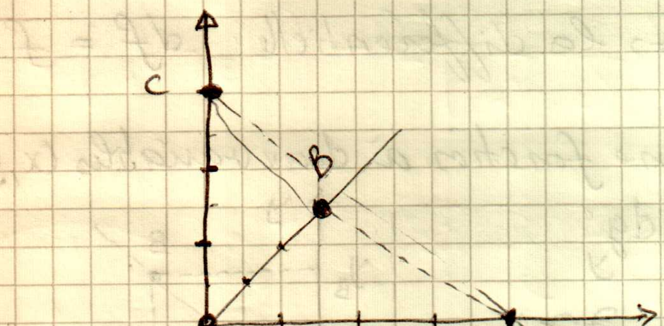
$$V(P) = V(r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_i}{r_i}$$

_ Pour une distribution continue :

$$V(P) = V(r) = \int \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$dq = \lambda dl$ = distribution linéique
$dq = \sigma ds$ = distribution surf
$dQ = \rho dv$ => dist volumique

_ Dans notre exercice on a 3 charges : Q_A, Q_B, Q_C situées aux sommets d'un triangle rectangle en A



$V_A(D)$: est le potentielle créée par la charge Q_A au p^t D.

$$V_A(D) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_A}{|\vec{AD}|} \qquad \vec{AD} = 4\vec{j} \qquad |\vec{AD}| = 4 \text{ cm}$$

- $V_B(D)$: est le potentiel créé par la charge Q_B au p^t D

$$V_B(D) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_B}{|\vec{BD}|} \qquad \vec{BD} = +3\vec{i} + 4\vec{j} = \vec{BA} + \vec{AD}$$

$$|\vec{BD}| = \sqrt{(+3)^2 + 4^2} = 5 \text{ cm.}$$

- V_c : est le potentiel créé par la charge Q_c au p^t D

$$V_c(D) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_c}{|\vec{CD}|} \qquad \vec{CD} = -3\vec{k} + 4\vec{j} = \vec{CA} + \vec{AD}$$

$$|\vec{CD}| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = 5 \text{ cm}.$$

$\Rightarrow$ Le potentiel total créé par les trois charges (Q_A, Q_B, Q_c) au point D est :

$$V(D) = V_A(D) + V_B(D) + V_C(D) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_A}{|\vec{AD}|} + \frac{Q_B}{|\vec{BD}|} + \frac{Q_C}{|\vec{BD}|}\right)$$

$$V(D) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{2\,10^{-6}}{4\,10^{-2}} + \frac{3\,10^{-6}}{5\,10^{-2}} + \frac{4\,10^{-6}}{5\,10^{-2}}\right) \qquad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 9\,10^9$$

$$\Rightarrow \boxed{V(D) = 81.10^4 \text{ volts} = 810 \text{ kvolt}}$$

2°/ Notion du gradient :

soit $f(x)$: une fonction à une seule variable

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{df}{dx} \Rightarrow \text{la différentielle } df = f'(x)\,dx$$

- Si maintenant on a une fonction à deux variables (x, y)

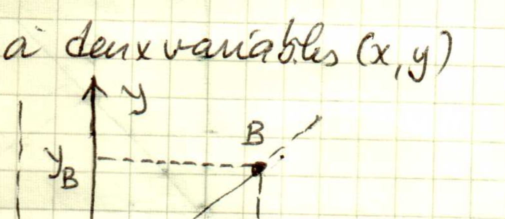
$$g(x, y) \Rightarrow dg = dg_x + dg_y$$

$$dg_x = \frac{\partial g}{\partial x} dx \ , \quad dg_y = \frac{\partial g}{\partial y} dy$$

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x} dx \Big|_{y = C^{st}} + \frac{\partial g}{\partial y} dy \Big|_{x = C^{st}}$$

$\frac{\partial g}{\partial x}$: dérivée partielle / à x

$\frac{\partial g}{\partial y}$: dérivée partielle / à y



Pour faire un déplacement infinitésimal AB, on peut passer de A $\to$ B directement ou on passe de A $\to$ O ($y = C^{ste}$) puis de O $\to$ B ($x = C^{ste}$)

– Pour une fonction à 3 variables (x, y, z)

$$h(x,y,z) \Rightarrow dh = \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{y,z=c^{te}} dx + \left.\frac{\partial h}{\partial y}\right|_{x,z=c^{te}} dy + \left.\frac{\partial h}{\partial z}\right|_{x,y=c^{te}} dz$$

$\vec{dl}$: déplacement infinitésimal

$$\vec{dl} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad dh = \frac{\partial h}{\partial x}dx + \frac{\partial h}{\partial y}dy + \frac{\partial h}{\partial z}dz = \left(\frac{\partial h}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial h}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial h}{\partial z}\vec{k}\right)\circ\left(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}\right)$$

$$dh = \vec{grad}(h(x,y,z)) \circ \vec{dl}$$

$$\vec{grad}\,h = \frac{\partial h}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial h}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial h}{\partial z}\vec{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)h$$

$$= \vec{\nabla}h$$

$\vec{grad}\,h$ est le gradient de la fonction scalaire $h(x,y,z)$

• puisque $V(r)$ est une quantité scalaire :

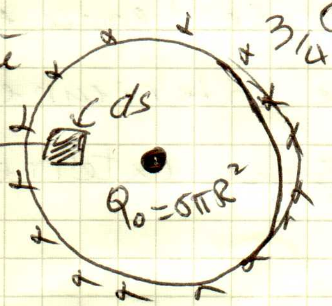
$$① \quad dV = \left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right) = \overbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right)}^{\vec{grad}(V)} \circ \vec{dl}$$

$$\text{or} \quad \Delta V = -\int_A^B \vec{E}\circ\vec{dl} = V_B - V_A = \int_A^B dV \Rightarrow dV = -\vec{E}\circ\vec{dl} \quad ②$$

$$① \text{ et } ② \Rightarrow dV = -\vec{E}\circ\vec{dl} = \vec{grad}(V)\circ\vec{dl}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\vec{grad}(V)}$$

<u>Exo 2</u> : Surface chargée uniformément + une charge ponctuelle au centre de la sphère



On appelle : Q_1 : la charge totale de la sphère

On prend un élément ds, il contient la charge $dQ = \frac{3}{4}\sigma\,ds$

$$\Rightarrow Q_1 = \int_0^{Q_1} dQ = \iint_S \frac{3}{4}\sigma\,ds = \frac{3}{4}\sigma \iint ds$$

$Q_1 = \frac{3\sigma}{4} S$ S: surface de la sphère de rayon "R"

et. $S = 4\pi R^2$

$Q_1 = \frac{3}{4}\sigma(4\pi R^2) \Rightarrow \boxed{Q_1 = 3\sigma\pi R^2}$

la charge totale du système et. $Q_T = Q_0 + Q_1 = \sigma\pi R^2 + 3\sigma\pi R^2$

$\Rightarrow \boxed{Q_T = 4\sigma\pi R^2}$

2°/ Théorème de GAUSS

Ce Théorème stipule : "Le flux du champ (Vecteur) électrique à travers une surface fermée est égal à la charge totale que contient cette surface sur ε_0

$$\phi = \oiint_{SG} \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{(Q_{in})_{SG}}{\varepsilon_0}$$

SG : surface de Gauss

- Le Théorème est général, mais son efficacité et sa maniabilité est plus importante dans le cas où on est en présence de symétrie (sphérique, cylindrique, ...)

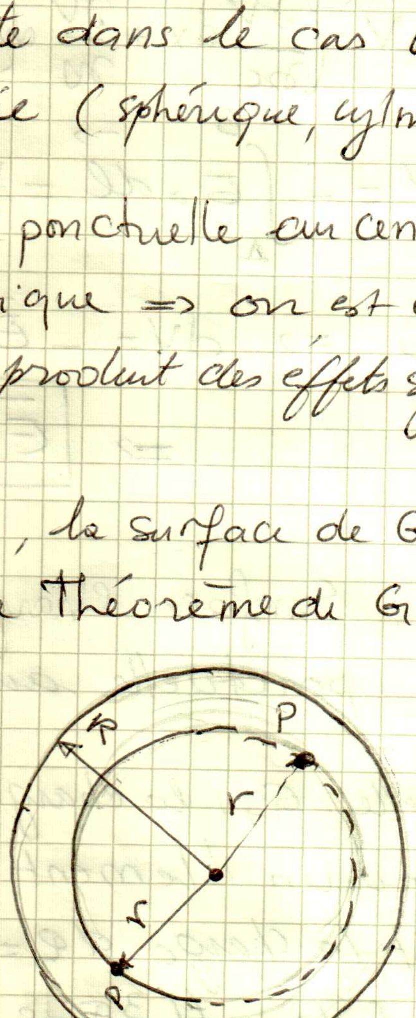
- Dans notre cas, on a un charge ponctuelle au centre et une distribution surfacique sphérique $\Rightarrow$ on est en présence d'une symétrie de charges qui produit des effets symétriques "les champs électriques"

vue la symetrie de cette charge, la surface de Gauss adéquate à l'application de Théorème de GAUSS est la surface sphérique.

on divise l'espace en deux zones

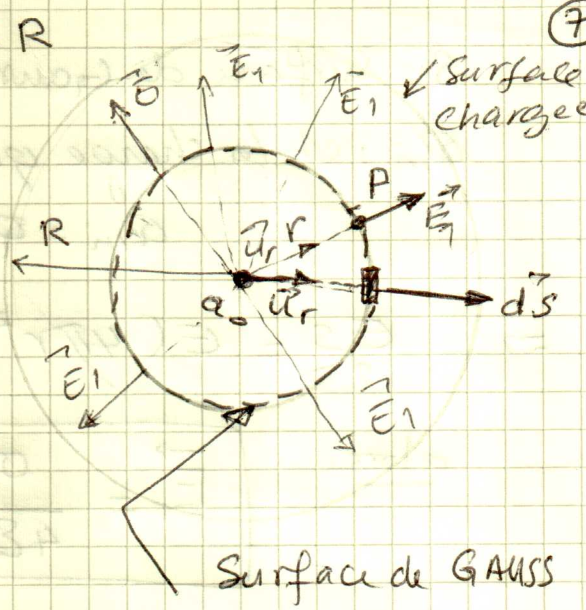
zone intérieure $r < R$

et zone extérieure $r \geq R$



1^{er} cas : Zone intérieure : $r < R$

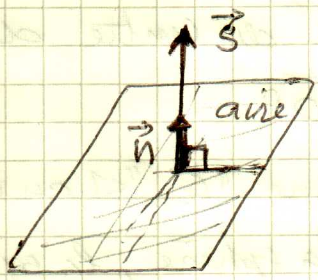
- On choisit un point dans cette zone, distant de "r" de la charge ponctuelle "Q_0" et on trace une sphère de rayon " $r = |\vec{Q_0P}|$ qui contient le point "P" sur la surface automatiquement. Cette surface est la surface de GAUSS



La surface, est une quantité vectorielle, elle à un module (l'aire) et une direction normale à cette surface

$$\boxed{\vec{S} = S\vec{n}}$$

- Symetrie sphérique



- Pour la surface de Gauss, l'élément de surface $d\vec{S} = dS\vec{n}$ est radiale $\vec{n} \equiv \vec{u_r}$
- le champ est aussi radial.

$$\vec{E} = E\vec{u_r}$$

$$\Rightarrow \Phi = \oint\!\!\oint_{SG} \vec{E_1} \cdot d\vec{S} = \oint\!\!\oint_{SG} E_1 \vec{u_r} \cdot dS\vec{u_r} = \oint\!\!\oint_{SG} E_1\, dS\, \underbrace{(\vec{u_r}\cdot\vec{u_r})}_{1}$$

$$\Phi = \oint\!\!\oint_{SG} E_1\, dS \qquad SG \text{ : Surface de GAUSS.}$$

- Charge à une distribution uniforme (invariante) le champ tout au long de la surface de Gauss est uniforme (en module) car : $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$ et les pts de la surface sont tous à des distance égale à "$r = \vec{Q_0P}$"

$$\Rightarrow \oint\!\!\oint_{SG} \vec{E_1}\, dS = E_1 \oint\!\!\oint_{SG} dS = E_1(S) = \frac{(Q_{in})_{SG}}{\varepsilon_0}$$

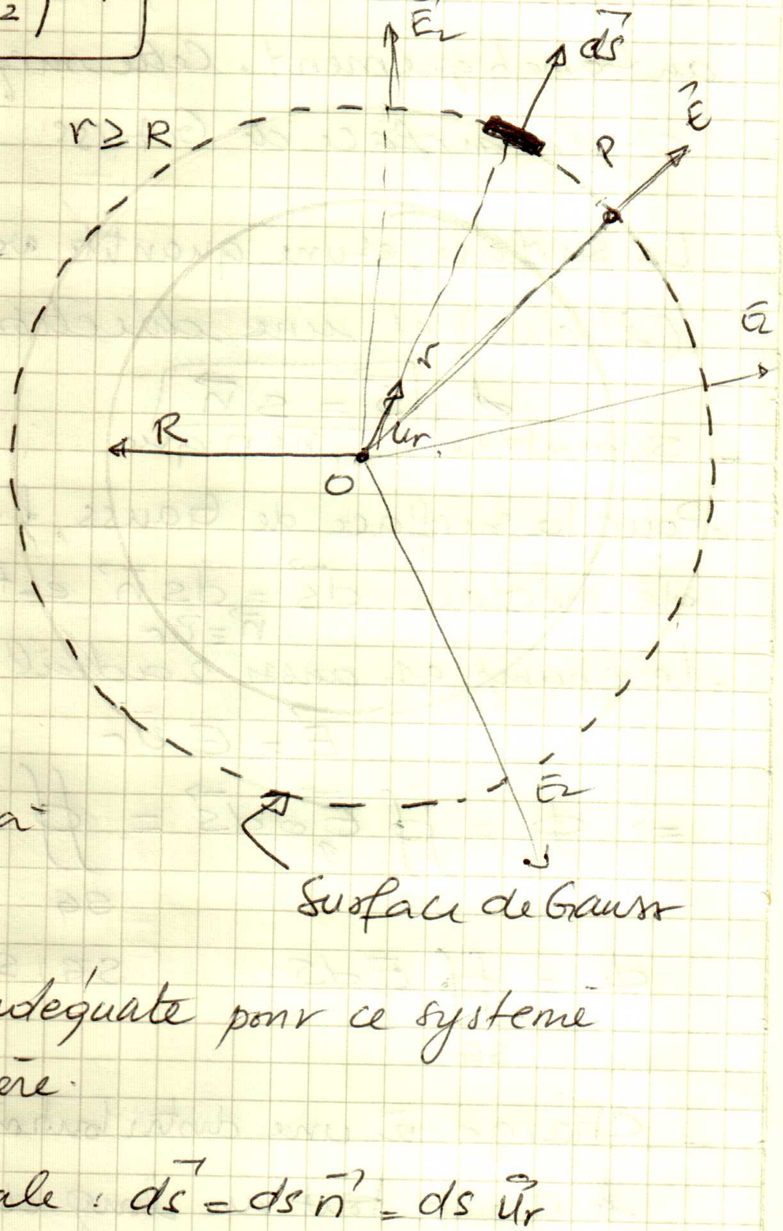
S : Surface de Gauss, $S = 4\pi r^2$

Q_{in} : est la charge que contient la surface de Gauss

$$Q_{in} = Q_0 = \sigma \pi R^2$$

$$\Rightarrow \quad E_1 S = E(4\pi r^2) = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \pi R^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_1 = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^2$$

alors : $\boxed{\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{R}{r^2}\right) \vec{u}_r}$



2ème Cas ; zone extérieure : $r \geq R$

On prend un point "P" quelconque à l'extérieur de la sphère éloigné du centre de de r $\vec{r} = \vec{OP}$

- Puisque "Q_0" est au centre de la sphère, la symétrie correspondante est sphérique

- la charge superficielle est à distribution sphérique.

$\Rightarrow$ La surface de Gauss adequate pour ce système de charges est une sphère.

$\Rightarrow$ la surface est radiale : $\vec{ds} = ds\,\vec{n} = ds\,\vec{u}_r$

de même, le champ $\vec{E}_2$ est radial : $\vec{E}_2 = E_2\,\vec{u}_r$

ce qui donne : $\Phi = \oiint_{SG} \vec{E}_2 \cdot \vec{ds} = \oiint_{SG} E_2 \vec{u}_r \cdot ds\,\vec{u}_r = \oiint_{SG} E_2\, ds$

charge invariante $\Rightarrow$ champ uniforme sur la surface de Gauss.

$$\Rightarrow \oiint E_2\, dS = E_2 \oiint dS = E_2 (S) = \frac{(Q_{in})_{SG}}{\varepsilon_0}$$ 9

S : surface de Gauss $\qquad S = 4\pi r^2$

Q_{in} = la charge totale $\qquad Q_{in} = Q_T = 4\sigma\pi R^2$

$$\Rightarrow E_2 (4\pi r^2) = \frac{4\sigma\pi R^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^2$$

$$\boxed{\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \vec{u}_r}$$

3°/ Le potentiel en tout point de l'espace dû à ce système de charge

On sait qu'il y a une entre le champ $\vec{E}$ et le potentiel $V(r)$:

$$\vec{E} = -\vec{grad}(V(r)) \iff \Delta V = -\int \vec{E} \circ \vec{dl}$$

① $\qquad$ ②

On utilise la relation ②, car on connait le champ. Le potentiel et donc la primitive du champ $\vec{E}$

$$V(r) = -\int \vec{E} \circ \vec{dl} + C \qquad C, \text{ Constante}$$

On divise l'espace en deux zones $r < R$, $r \geq R$

1ère zone : $r < R$: $\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \vec{u}_r$

$$\Rightarrow V_1(r) = -\int \vec{E}_1 \circ \vec{dl} + C_1 = -\int \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \overbrace{\vec{u}_r \circ \vec{dl}}^{dr}$$

$$V_1(r) = -\int \frac{\sigma R^2}{4\varepsilon_0} \frac{dr}{r^2} + C \quad : \quad \boxed{V_1(r) = \frac{\sigma R^2}{4\varepsilon_0} \frac{1}{r} + C_1}$$

$2^{\text{ème}}$ Zone : $r \geq R$. $\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \vec{u}_r$

$$\Rightarrow V_2(r) = -\int \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\underbrace{\vec{u}_r \cdot \vec{dl}}_{dr} + C_2 = -\int \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} + C_2$$

$$\boxed{V_2(r) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C_2}$$

Les constantes C_1 et C_2 se déterminent des conditions aux limites.

$1^{\text{ère}}$ C^{dt} – Condition de continuité du potentiel à la surface de la sphère chargée, qui sépare les deux zones

2^{nd} C^{dt} – Le point de référence pour lequel le potentiel est nul.

* 2^{nd} Condition : Le point de référence pour lequel $V(r) = 0$.
On choisit l'infini $\lim_{r \to \infty} V(r) = 0$

pour $r \to \infty$, on est dans la deuxième zone

$$\Rightarrow \lim_{r \to \infty} V_2(r) = \lim_{r \to \infty}\left(\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C_2\right) = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$$

* $1^{\text{ère}}$ Condition : la Continuité de $V(r)$ à la surface chargée

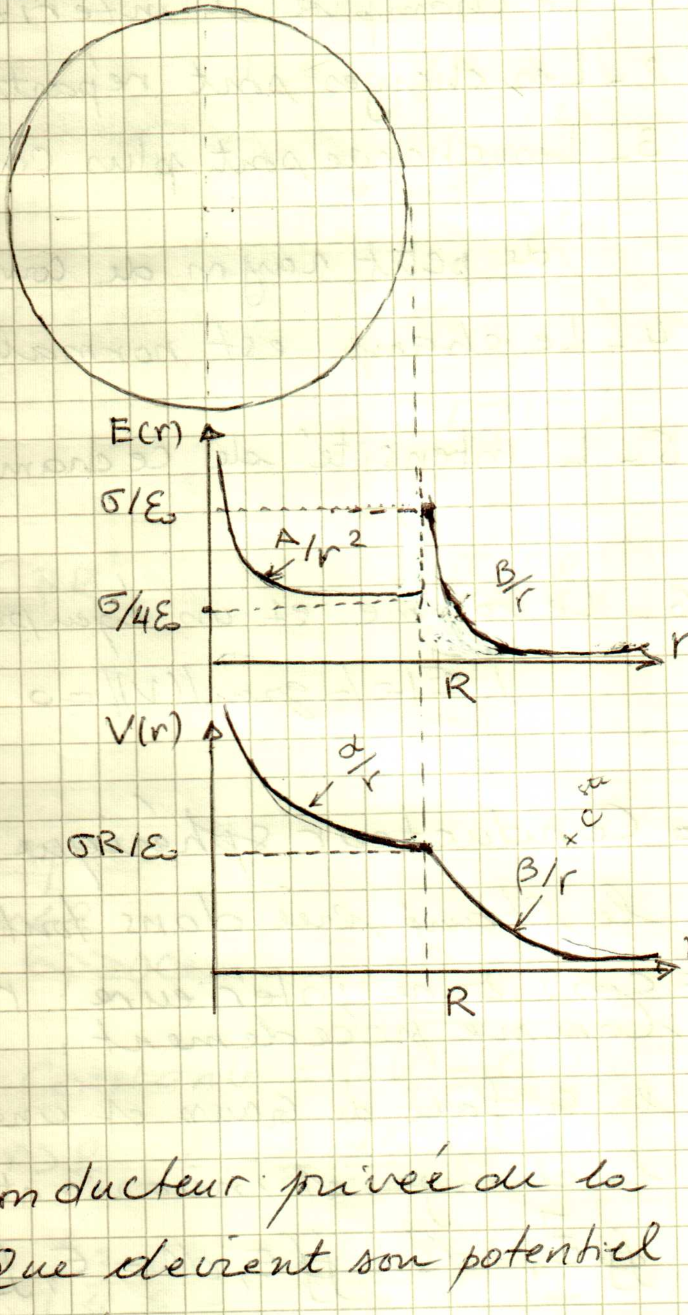
$$\lim_{r \to R} V_1(r) = \lim_{r \to R} V_2(r)$$

$$\Rightarrow \lim_{r \to R}\left(\frac{\sigma R^2}{4\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C_1\right) = \lim_{r \to R}\left(\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}\right)$$

$$\frac{\sigma R}{4\varepsilon_0} + C_1 = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \Rightarrow C_1 = \frac{3}{4}\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad V(r) = \begin{cases} V_1(r) = \dfrac{\sigma R}{4\varepsilon_0}\left(\dfrac{R}{r}+3\right) & ; \ r < R \\ V_2(r) = \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} & , \ r \geq R \end{cases}$$

Représentation de $E(r)$ et $V(r)$



• $r < R$

$$E_1 = \frac{\sigma R^2}{4\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{A}{r^2}$$

$$A = \frac{\sigma R^2}{4\varepsilon_0} = \text{Constante}$$

$$V_1(r) = \frac{\sigma R}{4\varepsilon_0}\left(\frac{R}{r}+3\right)$$

$$r = R \Rightarrow V_1(R) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$$

• $r \geq R$

$$E_2(r) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} = \frac{B}{r^2}$$

$$B = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} \ ; \ \text{Constante}$$

$$V_2(r) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} \qquad V_2(R) = \frac{\sigma R}{\varepsilon}$$

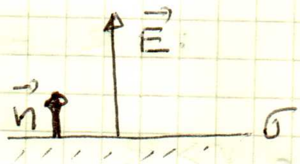
4°/ Si la sphère est un conducteur privée de la charge du centre, Que devient son potentiel et Quelle et sa capacite

Rappelle ; Un conducteur et un matériau où les charges (électrons.) sont susceptible de se déplacer librement quelque soit le champ appliqué même ~~si~~ ~~a~~ une infime quantite

- Un conducteur en équilibre électrostatique et un conducteur où les charges sont au repos (pas de mouvement), ce qui lui procure certaines propriétés :

1- Le champ à l'interieur du conducteur et nul ($E=0$)
2- Les charges sont réparties en surface.
3- Les charge sont plus concentrées sur les surfaces de petit rayon de courbure
4- Le champ est normale à la surface du conducteur
5- L'intensité de ce champ et $E = \sigma / \varepsilon_0$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}$$

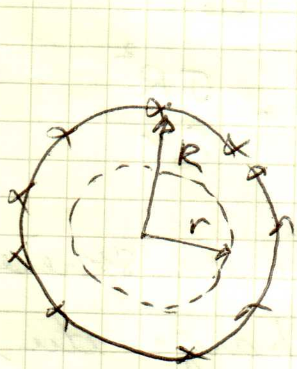


6- Le volume et un équipotentiel.

$$|\vec{E}| = |-\vec{grad}(V)| = 0 \Rightarrow V = const$$

- Conducteur sphérique de charge superficielle $\frac{3}{4}\sigma$, le champ crée dans tout l'epace.

1er cas : Zone intérieure : $r < R$
Comme précedement :
la surface de Gauss et une sphere
la charge et invariante



$$\oiint \vec{E_1} \cdot \vec{dS} = \oiint E_1 \, dS = E_1 \oiint dS$$

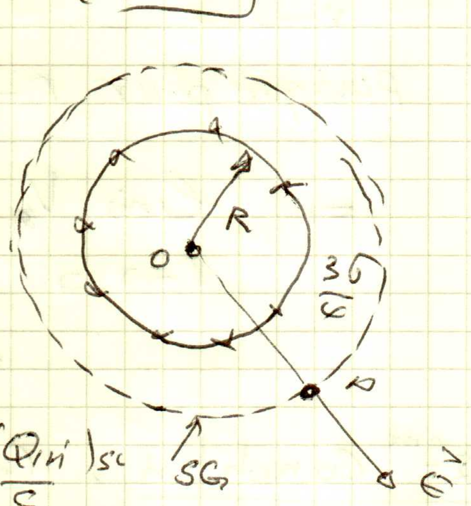
$$= E_1 (S) = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$$ or il n'y a pas de charge à l'interieur $\Rightarrow Q_{in} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{E_1 = 0}$$

Ou bien on utilise la propriétés des conducteur : qu'à l'intérieur du conducteur le champ est nul $\boxed{E=0}$

2^{em} Cas : Zone extérieure $r \geq 0$

- Charge distribuée uniformément
=> Symétrie sphérique
- charge invariante : champ uniform sur la surface de Gauss



$$\Rightarrow \oiint_{SG} \vec{E_2} \cdot \vec{ds} = \oiint E_2 ds = E_2 \oiint ds = E_2(S) = \frac{(Q_{int})_{sc}}{\varepsilon_0}$$

$|\vec{OP}| = r$

$Q_{in} = 3\sigma\pi R^2$, $|\vec{OP}| = r$

$$\Rightarrow E_2(4\pi r^2) = \frac{3\sigma\pi R^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{3}{4}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^2$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{3}{4}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \vec{u_r}}$$

Le potentiel dans tout l'espace

1^{er} Cas : Zone intérieure : $r<R$ $\cancel{E_1=0}$ $E_1 = 0$

$$\Rightarrow V = -\int E \cdot ds = \text{Constante} \Rightarrow \boxed{V_1 = C_1}$$

2^{eme} Cas : Zone extérieure, $r>R$ $\vec{E_2} = \frac{3}{4}\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}$

$$V_2 = -\int \vec{E_2} \cdot \vec{dl} + C_2 = -\int \frac{3}{4}\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\frac{\vec{u_r} \cdot \vec{dl}}{r^2} + C_2$$

$$\boxed{V(r) = \frac{3}{4}\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} + C_2}$$

Comme dans les questions précédentes, C_1 et C_2 se déterminent des conditions aux limites

1ère Condition : le point de référence pour lequel le potentiel est nul est l'infini

$$\lim_{r \to \infty} V(r) = 0$$

puisque pour $r \to \infty$, on est dans le 2ème cas $r \geq R$

$$\Rightarrow \lim_{r \to \infty} V(r) = \lim_{r \to \infty} V_2(r) = \lim_{r \to \infty} \left(\frac{3}{4} \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} + C_2 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$$

2ème Condition : Condition de continuité du potentiel à la surface qui sépare les deux zones -

$$\lim_{r \to R} V_1(r) = \lim_{R \to \infty} V_2(r) \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{3}{4} \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}}$$

$$\Rightarrow V(r) = \begin{cases} V_1(r) = \frac{3}{4} \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} & r < R \\ V_2(r) = \frac{3}{4} \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} & r \geq R \end{cases}$$

* La capacité du Conducteur :

On définit une caractéristique du conducteur qui relie le potentiel à la charge qui le crée par :

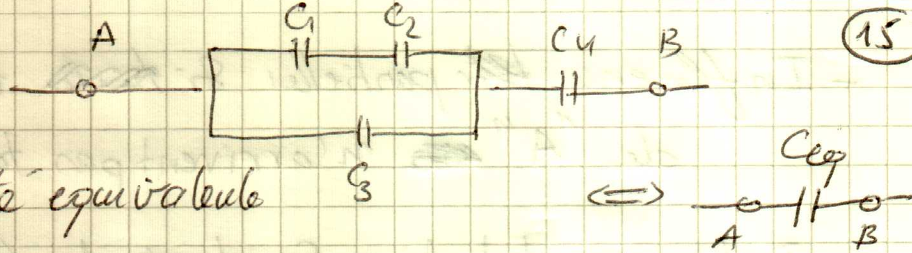
$$Q = CV \Rightarrow C = Q/V$$

Pour le conducteur sphérique, à sa surface : $V(R) = \frac{3}{4} \frac{\sigma R^2}{\varepsilon R} = \frac{3}{4} \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$

et la charge à la surface est : $Q = 3 \sigma \pi R^2$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{V} = \frac{\cancel{3} \cancel{\sigma} \pi R^2}{\frac{\cancel{3}}{4} \frac{\cancel{\sigma} R}{\varepsilon_0}} \Rightarrow \boxed{C = 4 \pi \varepsilon_0 R}$$

Ex : 03 :

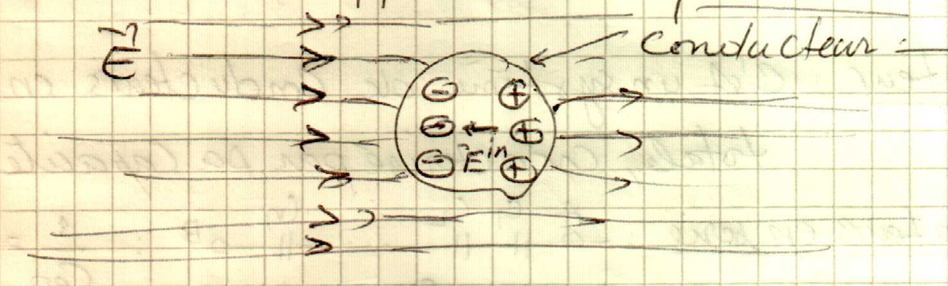


Calculer la Capacité équivalente $\Longleftrightarrow$

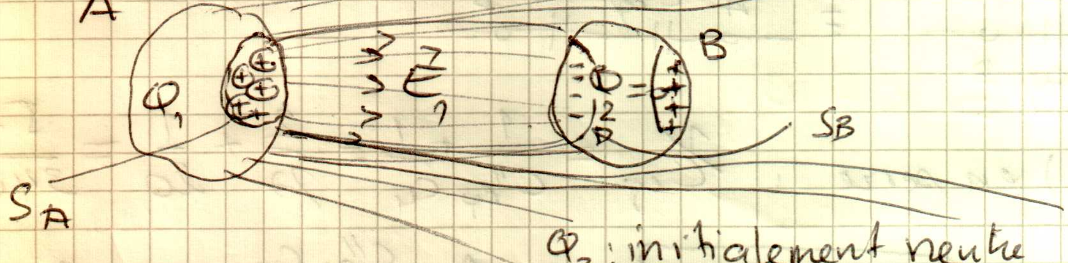
Rappelle : Conducteur en influence.

- Une charge Q soumise à l'action de champ $\vec{E}$ ~~et~~ subit une force $\vec{F} = Q\vec{E}$

$\Rightarrow$ les charge à l'interieur du conducteur vont dans le sens du champ si elles sont positives et dans le sens opposé au champ si elles sont négatives.



- Si on prend un conducteur "A" de charge Q_1 ; il crée un champ $\vec{E}_1$ dans tout l'espace
- ~~[illegible]~~ Si on met un conducteur "B" neutre ($Q_2 = 0$), dans le champ $\vec{E}_1$ du au conducteur A il y a séparation de charge (le charge ⊕ vont dans le sens de $\vec{E}_1$ à l'opposé des charges ⊖ qui vont dans le sens contraire de $\vec{E}_1$)



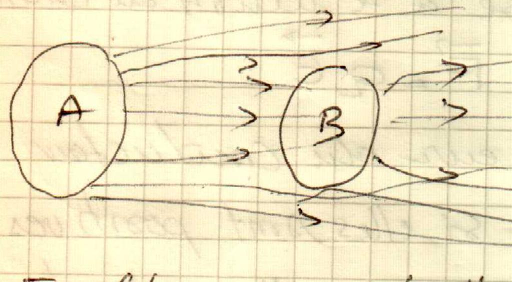
Q_2 : initialement neutre

une zone "S_A" du conducteur "A" va créer un champ qui couvre la surface "S_B" qui porte une charge égale et opposée

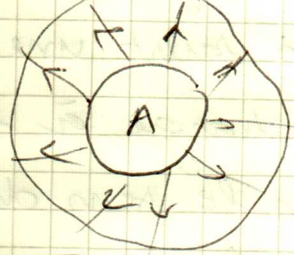
c.à.d $Q_B = -Q_A$: (S_A, S_B) : élement correspondants

- Influence ~~tota~~ partielle : Si ~~toute~~ les lignes de champ issuent de "A" ~~~~ n'arrivent pas toutes sur B

- Influence totale ; Si ~~toute~~ les lignes de champ issuent de "A" arrivent toutes sur B



Influence partielle



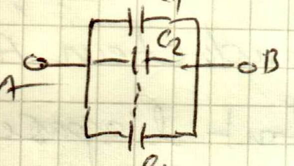
Influence totale

- Condensateur : C'est un système de conducteurs en influence totale, caractérisé par sa capacité "C"

• Condensateurs en série :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

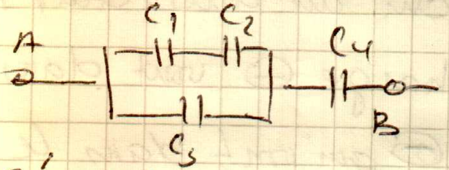
• Condensateurs en parallèles :



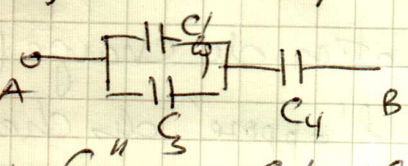
$$\Rightarrow C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

Pour notre système

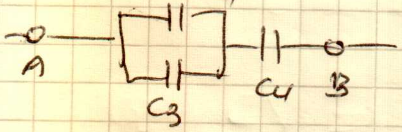
- (C_1, C_2) sont en série : $\frac{1}{C'_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{15} + \frac{1}{3} \Rightarrow C'_{eq} = \frac{5}{2}\,\mu F$



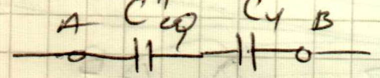
$\equiv$



- (C'_{eq}, C_3) en parallèles , $C''_{eq} = C'_{eq} + C_3 = \frac{5}{2} + 6 \Rightarrow C''_{eq} = \frac{17}{2}\,\mu F$

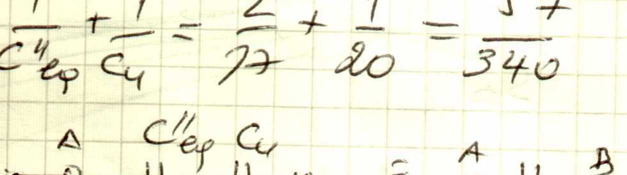


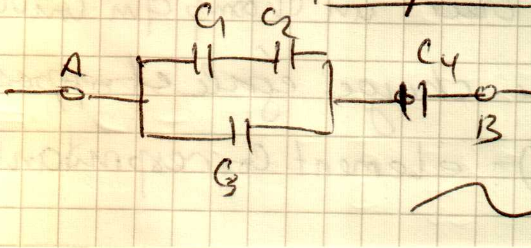
$\equiv$



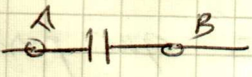
- (C''_{eq}, C_4) en série : $1/C_{eq} = \frac{1}{C''_{eq}} + \frac{1}{C_4} = \frac{2}{17} + \frac{1}{20} = \frac{57}{340}$

$$\Rightarrow \boxed{C_{eq} \simeq 6\,\mu F}$$





$\equiv$



$C_{eq} = 6\,\mu F$