Exercice 01 :

I • Soit la fonction scalaire $F(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^4$

Le gradient de la fonction scalaire est définit comme suit : (le résultat est un vecteur)

$$\overrightarrow{grad}\, F(x,y,z) = \vec{\nabla} F(x,y,z) = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}$$

$\frac{\partial F}{\partial x}$: est la dérivée partielle de F

c.a.d, qu'on éffectu la derivée de F que par rapport à la variable "x", alors que les autres variables "y" et "z" sont supposées constante.

$\frac{\partial F}{\partial y}$: derivée par rapport a "y" avec "x" et "z" constants

$\frac{\partial F}{\partial z}$: derivée par rapport à "z" avec "x" et "y" constants

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^3 + z^4) = 2x + 0 + 0 = 2x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^3 + z^4) = 0 + 3y^2 + 0 = 3y^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^3 + z^4) = 0 + 0 + 4z^3 = 4z^3$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} F(x,y,z) = 2x\vec{i} + 3y^2\vec{j} + 4z^3\vec{k}}$$

II La montagne à une hauteur d'équation

$$z = h(x,y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 - 9x + 6y \quad (km)$$

• 2°/ Localisation du sommet ;

Le Sommet est donné, si le gradient est nul

$$\vec{\nabla} h(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial h}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial h}{\partial y}\vec{j} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial [2xy - 3x^2 - 2y^2 - 9x + 6y]}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x} = 2y - 6x - 9 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 2x - 4y + 6 = 0 \quad (2)$$

pour trouver les coordonnées du sommet on résout le système d'équation suivant

$$\begin{cases} 2y - 6x = 9 & (1) \\ 2x - 4y = -6 & \\ x - 2y = -3 & (2) \end{cases} \qquad (2) \longrightarrow x = 2y - 3$$

on remplace dans (1) $\Rightarrow$ $2y - 6(2y-3) = 9$

$$-10y = -9 \Rightarrow \boxed{y = 0{,}9\ km}$$

et $x = 2(0{,}9) - 3 = -1{,}2\ km$

$$\Rightarrow \boxed{x = -1{,}2\ km}$$

Le sommet st au point $h_m \begin{pmatrix} -1{,}2 \\ 0{,}9 \end{pmatrix}$ km

3°/ La hauteur de la [redacted] montagne.

$x = -1{,}2$ km

$y = 0{,}9$ km

$$\Rightarrow h(-1{,}2\,;\,0{,}9) = 2(-1{,}2)(0{,}9) - 3(-1{,}2)^2 - 2(0{,}9)^2 - 9(-1{,}2) + 6(0{,}9)$$

après calcul on trouve $\boxed{h = 8{,}1\ km}$

Exercice : 02. Soit la fonction vectorielle suivante :

$$\vec{G}_1(x,y,z) = x^2\vec{i} + 3xz^2\vec{j} - 2xz\vec{k} = G_x\vec{i} + G_y\vec{j} + G_z\vec{k}$$

$G_x = x^2 = G_x(x,y,z)$

$G_y = 3xz^2 = G_y(x,y,z)$

$G_z = -2xz = G_z(x,y,z)$

La divergence d'une fonction vectorielle est définit comme suit

$$Div(\vec{G}) = \vec{\nabla} \circ \vec{G} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right] \bullet \left[G_x\vec{i} + G_y\vec{j} + G_z\vec{k}\right]$$

$$\vec{\nabla} \circ \vec{G} = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}$$ qui est un scalaire

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{\partial G_x}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2) = 2x \\ \frac{\partial G_y}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(3xz^2) = 0 \\ \frac{\partial G_z}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(-2xz) = -2x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{\nabla} \circ \vec{G} = 2x + 0 - 2x = 0$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \circ \vec{G} = 0}$$

Puisque la divergence de $\vec{G}$ est nulle alors cette fonction est dite "Solénoïdale"

II, Soit la fonction vectorielle, $\vec{K}(x,y,z)$:

$$\vec{K}(x,y,z) = y^2\vec{i} + (2xy + z^2)\vec{j} + 2yz\vec{k} = K_x\vec{i} + K_y\vec{j} + K_z\vec{k}$$

Le rotationnel est définit le produit vectoriel de l'opérateur $\vec{\nabla}$ avec la fonction vectorielle

$$\vec{rot}(\vec{G}(x,y,z)) = \vec{\nabla} \wedge \vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ K_x & K_y & K_z \end{vmatrix}$$ qui est un vecteur

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{K} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2 & 2xy + z^2 & 2yz \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}(2yz) - \frac{\partial}{\partial z}(2xy + z^2)\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}(yz) - \frac{\partial}{\partial z}\right.$$

$$+ \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(2xy + z^2) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2)\right)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{K} = (2z - 2z)\vec{i} - (0 - 0)\vec{j} + (2y - 2y)\vec{k} = 0$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{K} = 0}$$

La fonction $\vec{K}(x,y,z)$ a un rotationnel qui est nul elle dite irrotationnelle. $\vec{K}$ dérive d'une fonction (champ) scalaire.

Exercice 03 :

Soient deux charges ponctuelles

$Q_1 = 9\,\mu C = 9 \cdot 10^{-6}\,C$

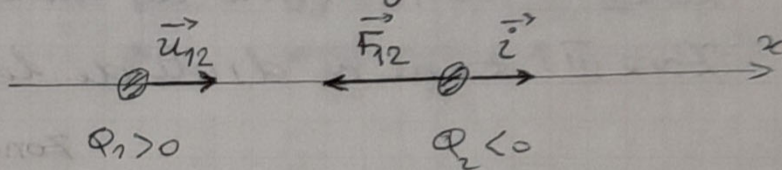
$Q_2 = -1\,\mu C = -1\ 10^{-6}\,C$

séparées par une distance $d = 10\,cm$

1/ Force exercée de chaccune des charges sur l'autre.

a/ Q_1 : source

Q_2 : cible



L'action de Q_1 sur Q_2 se traduit par une force donnée par la loi de Coulomb

$$\vec{F}_{12} = K \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{12}$$

puisque $Q_1 > 0$ et $Q_2 < 0$ La force est une force d'attraction $K = 1/4\pi\varepsilon_0$

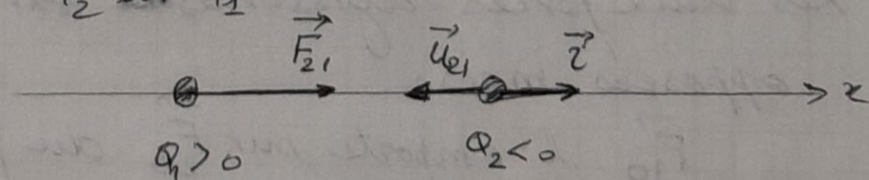
$\vec{F}_{12}$ est dirigée vers Q_1 et $\vec{u}_{12} = \vec{i}$

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \vec{i} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(9 \cdot 10^{-6})(-1 \cdot 10^{-6})}{(0,1)^2} \vec{i} = \boxed{\vec{F}_{12} = -8{,}1\,\vec{i}\ N}$$

b/ Action de la charge Q_2 sur Q_1

Q_2 : source

Q_1 : cible



$Q_1 > 0$

$Q_2 < 0$ => La force entre les charges est une force d'attraction

La loi de Coulomb est : $\vec{F}_{21} = K.\dfrac{Q_2 Q_1}{r_{21}^2}\,\vec{u}_{21}$

puisque c'est une attraction $\vec{u}_{21} \equiv -\vec{i}$

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(Q_2)(Q_1)}{r_{21}^2}(-\vec{i}) = 9.10^9\,\frac{(-1.10^{-6})(9\,10^{-6})}{d^2}(-\vec{i})$$

$$= \boxed{\vec{F}_{21} = 8{,}1\,\vec{i}\ N}$$

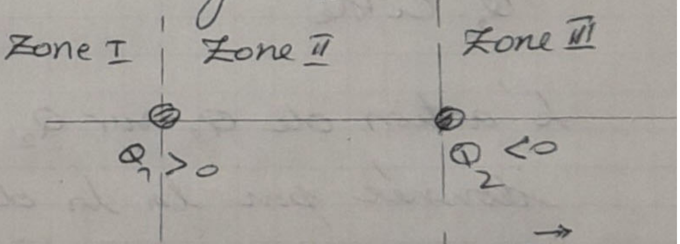
$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ (Principe de réciprocité : 3ème loi de Newton)

2°/ On divise l'espace en 3 zones.

Zone I : Zone à gauche de la charge Q_1

Zone II : Zone entre les deux charges.

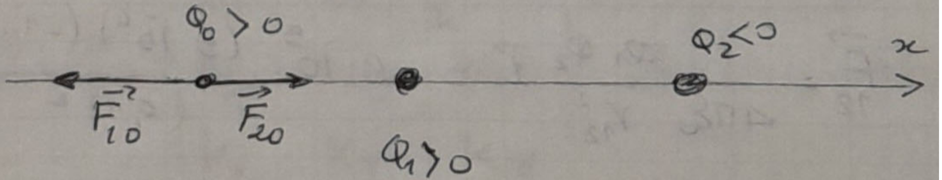
Zone III : Zone à droite de la charge Q_2



• Zone I : à gauche de Q_1

$\begin{cases} Q_1 > 0 \\ Q_0 > 0 \end{cases}$; on a une force de répulsion $\vec{F}_{10}$

$\begin{cases} Q_2 < 0 \\ Q_0 > 0 \end{cases}$: on a une force d'attraction $\vec{F}_{20}$



Les deux forces agissantes sur Q_0 sont de sens opposées mais :

$\vec{F}_{10}$ l'emporte sur $\vec{F}_{20}$ du point de vu des charges car la force est proportionnelle à la charge

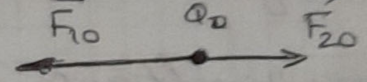
$$|\vec{F}_{10}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_1||Q_0|}{r_{10}^2} \quad \text{et} \quad |\vec{F}_{20}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_2||Q_0|}{r_{20}^2}$$

puisque $|Q_1| > |Q_2| \Rightarrow \vec{F}_{10} > \vec{F}_1$

- aussi $\vec{F}_{10}$ l'emporte sur $\vec{F}_{20}$ du point de vue de la distance de séparation

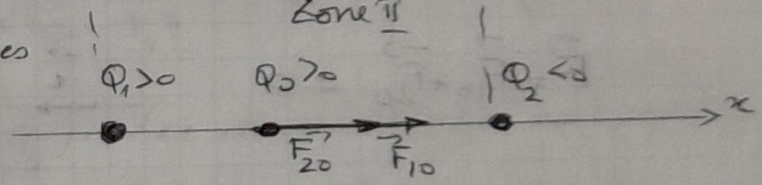
$$r_{10} < r_{20}$$

$\Rightarrow$ Dans les deux situations la force $\vec{F}_{10}$ est toujours supérieure à $\vec{F}_{20}$ $\Rightarrow$ La resultante $\vec{F} = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20}$ n'est jamais nulle.



Dans la zone **I** : la charge Q_0 n'est jamais en équilibre

- Zone II : entre les charges



$Q_1 > 0$
$Q_0 > 0$ $\Rightarrow$ repulsion

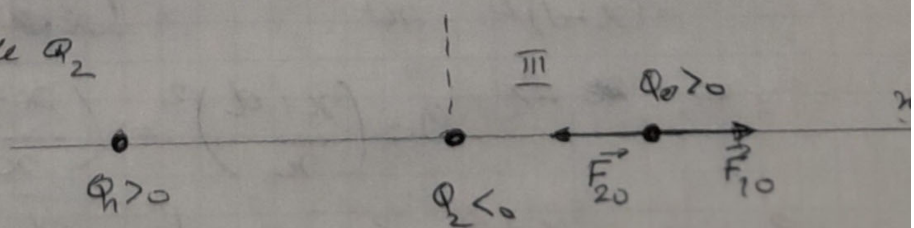
$Q_2 < 0$
$Q_0 > 0$ $\Rightarrow$ attraction

Les deux forces $\vec{F}_{10}$ dû à Q_1 et $\vec{F}_{20}$ dû à la charge Q_2 sont dirigées dans le même sens, elle ne font que se renforcer et la résultante n'est jamais nulle.

$$\vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} \neq \vec{0} \quad \forall (Q_1, Q_2, Q_3)$$

$\Rightarrow$ La charge Q_0 n'est jamais en équilibre.

- Zone III, à droite de Q_2



$Q_1 > 0$
$Q_0 > 0$ $\Rightarrow$ répulsion

$Q_2 < 0$
$Q_0 > 0$ $\Rightarrow$ attraction

Les deux forces sont de sens opposés

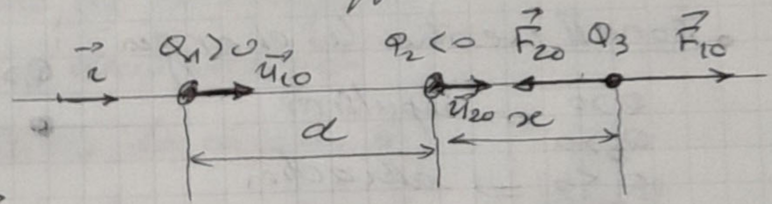
- La force $\vec{F}_{10}$ l'emporte sur $\vec{F}_{20}$ du point de vu charge $|Q_1| > |Q_2|$
- La force $\vec{F}_{20}$ l'emporte sur $\vec{F}_{10}$ du point de vu distance de séparation sur certain intervalle.

$$r_{20} < r_{10}$$

$\Rightarrow$ La résultante $\vec{F} = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20}$ peut-être nulle dans cette zone sous certaines conditions.

Si la force résultante est nulle $\Rightarrow$ La charge Q_0 est en équilibre (elle ne subit aucun effort résultant)

$$\vec{F} = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} = 0$$



$(Q_1 - Q_0)$: repulsion : $\vec{u}_{20} = \vec{i}$

$(Q_2 - Q_0)$: attraction $\vec{u}_{20} = \vec{i}$

$$\vec{F}_{10} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_0}{(d+x)^2} \vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{F}_{20} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_2 Q_0}{x^2} \vec{i}$$

$$\vec{F} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{Q_1}{(d+x)^2} + \frac{Q_2}{x^2} \right] \vec{i} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{9 \cdot 10^{-6}}{(x+d)^2} - \frac{1 \cdot 10^{-6}}{x^2} \right] \vec{i} = 0$$

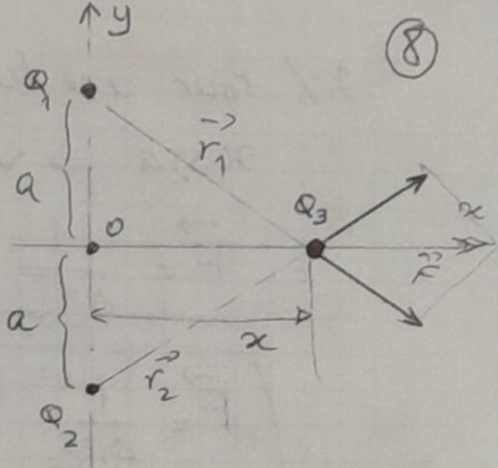
$$\Rightarrow \frac{9}{(x+d)^2} - \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 9 = \left(\frac{x+d}{x} \right)^2 \Rightarrow \left(\frac{x+d}{x} \right) = \pm 3$$

- $+3 \Rightarrow \dfrac{x+d}{x} = 3 \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{d}{2} = 5\,\text{cm}}$
- $-3 \Rightarrow x = -\dfrac{d}{4}$: qui est située entre les deux charges on doit exclure cette valeur

$$\Rightarrow \boxed{x = 5\,\text{cm}}$$

Exercice 04 :



1°/ $Q_1(0, a, 0) = +q$

$Q_2(0, -a, 0) = +q$

$Q_3(x, 0, 0) = +q_0$

- Pour les charges (Q_1, Q_3) :

Les deux charges sont positives (m̂ signe)

$\Rightarrow$ La force d'interaction est une force de repulsion

$$\vec{F}_{13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_3}{r_{13}^2}\vec{u}_{13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_3}{r_1^2}\vec{u}_1$$

- Pour les charges (Q_2, Q_3) : Les deux charges sont positives (m̂ signe) $\Rightarrow$ La force d'interaction est une repulsion

$$\vec{F}_{23} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2 Q_3}{r_{23}^2}\vec{u}_{23} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2 Q_3}{r_2^2}\vec{u}_2$$

La force resultante qui agisse sur (Q_3) est :

$$\vec{F} = \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

on a, $\frac{\vec{r}_1}{r_1} = \vec{u}_1$, $\frac{\vec{r}_2}{r_2} = \vec{u}_2$

$$\Rightarrow \vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_3}{r_1^3}\vec{r}_1$$

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2 Q_3}{r_2^3}\vec{r}_2$$

or : $\vec{r}_1 = \vec{Q_1 O} + \vec{OQ_3} = -a\vec{j} + x\vec{i}$

$\vec{r}_2 = \vec{Q_2 O} + \vec{OQ_3} = a\vec{j} + x\vec{i}$

$r_1 = \sqrt{a^2 + x^2} = r_2 = r$

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q q_0}{r_1^3}\vec{r}_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q q_0}{r_2^3}\vec{r}_2$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q q_0}{r^3}\left[\vec{r}_1 + \vec{r}_2\right] = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[(\cancel{-a\vec{j}} + x\vec{i}) + (\cancel{a\vec{j}} + x\vec{i})\right]$$

$$\boxed{\vec{F}_{(x)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q \cdot q_0}{(a^2 + x^2)^{3/2}}x\vec{i}}$$

9

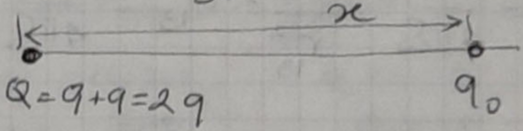
2°/ Pour une très grande distance "x" :

$x \gg a \Rightarrow \sqrt{x^2+a^2} \simeq x$

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qq_0}{(a^2+x^2)^{3/2}}x\,\vec{i} \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2q\cdot q_0}{x^3}x\,\vec{i}$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q\cdot q_0}{x^2}\vec{i}}$$

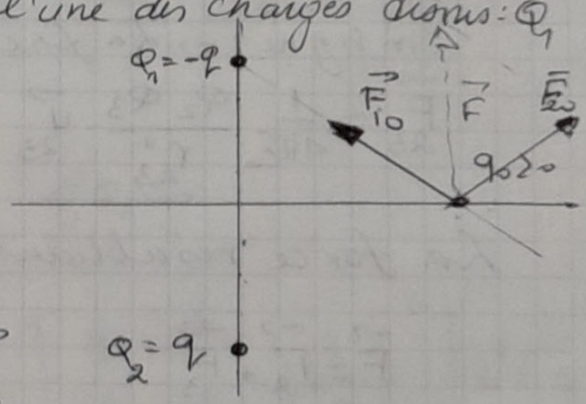
$\vec{F}$ parait comme l'action d'une charge $2q$, située à "x" de Q_3, sur cette charge



3°/ Si on change le signe de l'une des charges disons : Q_1

$Q_1 = -q$

($Q_1 < 0$, $Q_3 > 0$) : attraction :



$$\vec{F}_{13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_3}{r_1^3}\vec{r}_1 = +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-q)(q_0)}{r_1^3}\vec{r}_1$$

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2Q_3}{r_2^3}\vec{r}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(q)(q_0)}{r_2^3}\vec{r}_2$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[-\vec{r}_1 + \vec{r}_2\right] = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[-(x\vec{i}-a\vec{j}) + (x\vec{i}+a\vec{j})\right]$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2qq_0a}{(x^2+a^2)^{3/2}}\vec{j}}$$

si $a \ll x \Rightarrow (x^2+a^2)^{3/2} \simeq x^3 \Rightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2qa\,q_0}{x^3}\vec{j}}$

on voit ici que la charge "$2q$" n'est pas la somme de (Q_1+Q_2), dans ce cas la somme algebrique des charges et nulle mais il y a une force resultante $\vec{F}$, ce cas constitue un cas très special qu'on appelle dipole (on verra plus tard) dont la force decroit en $1/x^3$ caracterisé par une quantité "$2qa\vec{j}$" $= \vec{P}$: moment dipolaire.