

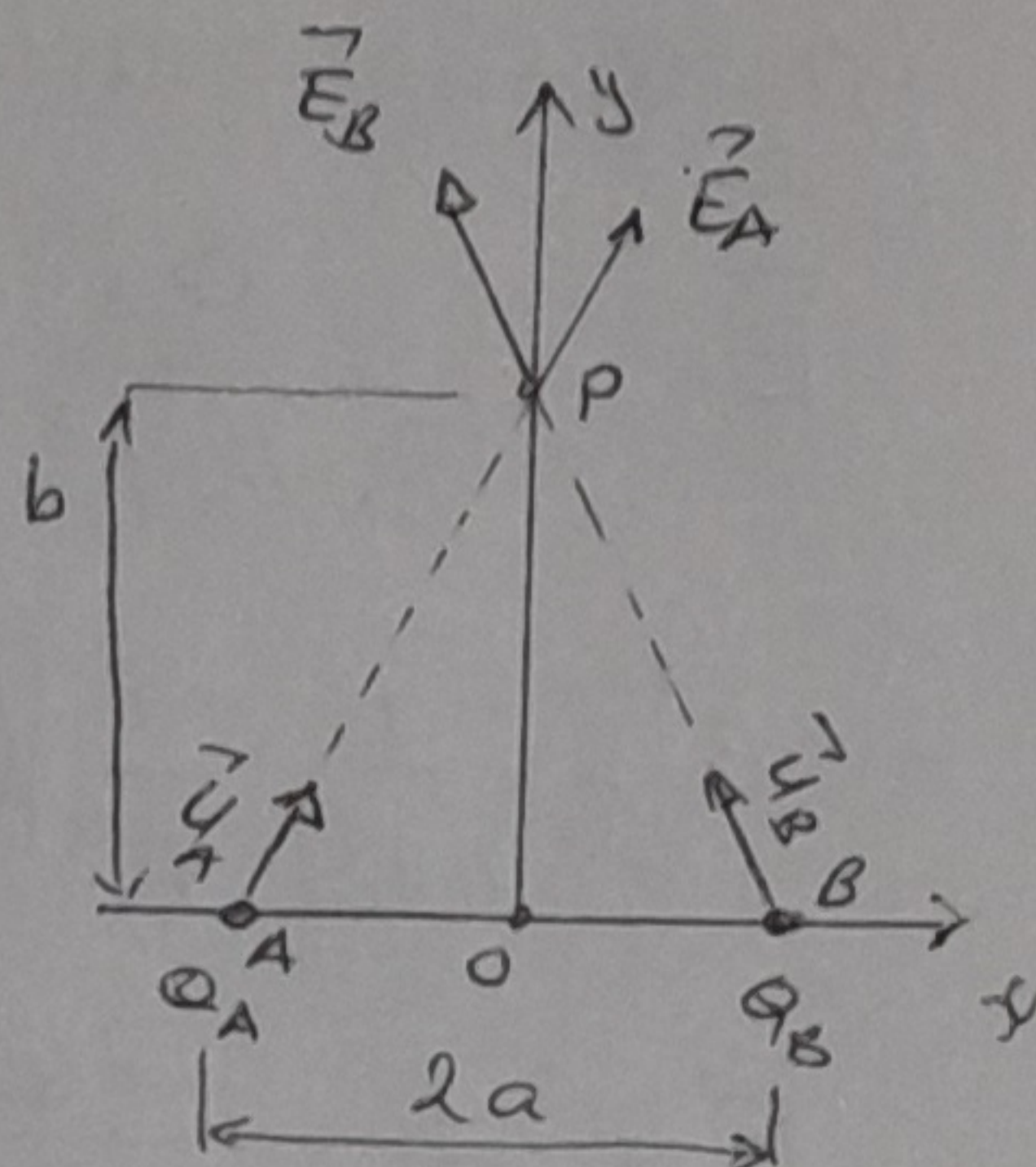
①

Exercice 01:

- Deux charges: $Q_A \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = Q_B \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 10 \mu\text{C}$

$$AB = 10 \text{ cm} = 2a$$

$$OP = b = 10 \text{ cm}$$



1° - Le champ créé par une charge "Q" ponctuelle à un point de l'espace à une distance (position) "r" de cette charge est donné par:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^3} \vec{r}$$

• Le champ créé au point P

- Le champ créé par la charge Q_A au point $P(0, 12, 0)$ est:

$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_A}{r_A^2} \vec{u}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_A}{|\vec{AP}|^3} \vec{AP}$$

- Le champ créé par la charge Q_B seule au point $P(0, 12, 0)$ est:

$$\vec{E}_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_B}{r_B^2} \vec{u}_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_B}{|\vec{BP}|^3} \vec{BP}$$

on a: $Q_A = Q_B = Q = 10 \mu\text{C} = 10^{-5} \text{ C}$

$$\vec{r}_A = \vec{AP} = \vec{AO} + \vec{OP} = a\vec{i} + b\vec{j} = (5\vec{i} + 12\vec{j}) \text{ cm}$$

$$\vec{r}_B = \vec{BP} = \vec{BO} + \vec{OP} = -a\vec{i} + b\vec{j} = (-5\vec{i} + 12\vec{j}) \text{ cm}$$

$$r = |\vec{r}_A| = |\vec{AP}| = |\vec{r}_B| = |\vec{BP}| = \sqrt{a^2 + b^2} = 13 \text{ cm}$$

$\Rightarrow$ Le champ créé par les deux charges Q_A et Q_B au point $P(0, 12, 0)$ est égal à la somme des deux champs (loi de superposition).

(2)

Corrige TD 02

phys02

21/22

Loi de superposition : $\vec{E}(P) = \vec{E}_A + \vec{E}_B$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_A}{|\vec{AP}|^3} \vec{AP} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_B}{|\vec{BP}|^3} \vec{BP}$$

$Q_A = Q_B = Q$
 $|\vec{AP}| = |\vec{BP}| = r$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \left[\vec{AP} + \vec{BP} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \left[(a\vec{i} + b\vec{j}) + (-a\vec{i} + b\vec{j}) \right]$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Qb}{r^3} \vec{j} \quad \text{AN : } \vec{E} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-5} \cdot 12 \cdot 10^{-2}}{(13 \cdot 10^{-2})^3} \vec{j}$$

$$= \boxed{\vec{E} = 9,83 \cdot 10^5 \text{ C/m}}$$

* Le potentiel électrique au point P :

- L'expression du potentiel d'une charge ponctuelle "Q" à une distance "r" de elle-ci est-

$$\boxed{V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}}$$

- La charge Q_A crée en P le potentiel : $V_A(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_A}{|\vec{AP}|}$
- La charge Q_B crée en P le potentiel : $V_B(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_B}{|\vec{BP}|}$
- Les deux charges Q_A et Q_B ensemble crée

le potentiel : $V(P) = V_A(P) + V_B(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_A}{|\vec{AP}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_B}{|\vec{BP}|}$

$$Q_A = Q_B = Q = 10^{-5} \text{ C}$$

$$|\vec{AP}| = |\vec{BP}| = 13 \text{ cm} \Rightarrow V(P) = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{AP}|}$$

$$\text{AN : } V(P) = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-5}}{13 \cdot 10^{-2}} = 1,38 \cdot 10^6 \text{ Volt}$$

$$\boxed{V(P) = 1,38 \text{ Mvolt}}$$

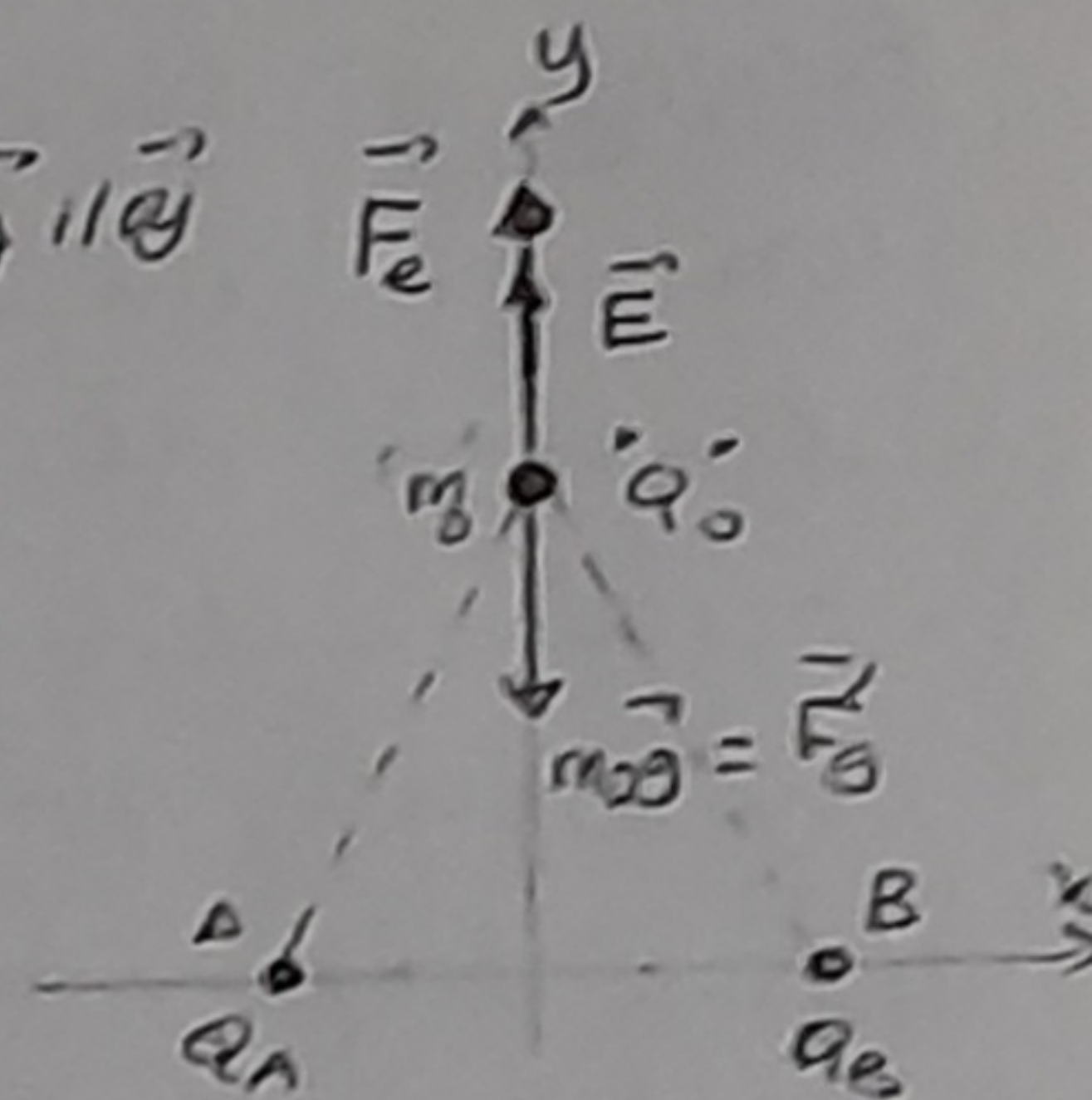
③

particule de charge " Q_0 " de masse " m_0 "

elle subit la force gravitationnelle $\vec{F}_g = m_0 \vec{g} \parallel \vec{y}$

et la force électrique $\vec{F}_e = Q_0 \vec{E} \parallel \vec{y}$

La force résultante est $\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_g$



⇒ Pour que cette particule chargée soit en équilibre, il faut que les deux forces soient égales et opposées (résultante nulle)

$$\Rightarrow F_e = F_g, \quad Q_0 E = m_0 g \Rightarrow \boxed{\frac{Q_0}{m_0} = g/E}$$

A.N. $Q_0/m_0 = \frac{9.81}{9.83 \cdot 10^5} \approx 10^{-5} \text{ C/kg}$ $Q_0/m = 10^{-5} \text{ C/kg}$

3°/ Les trois charges " Q_0, Q_A, Q_B " sont toutes positives, les forces électriques entre elles, sont des forces de répulsion

$Q_0 > 0 \Rightarrow$ les lignes de champ sont sortantes

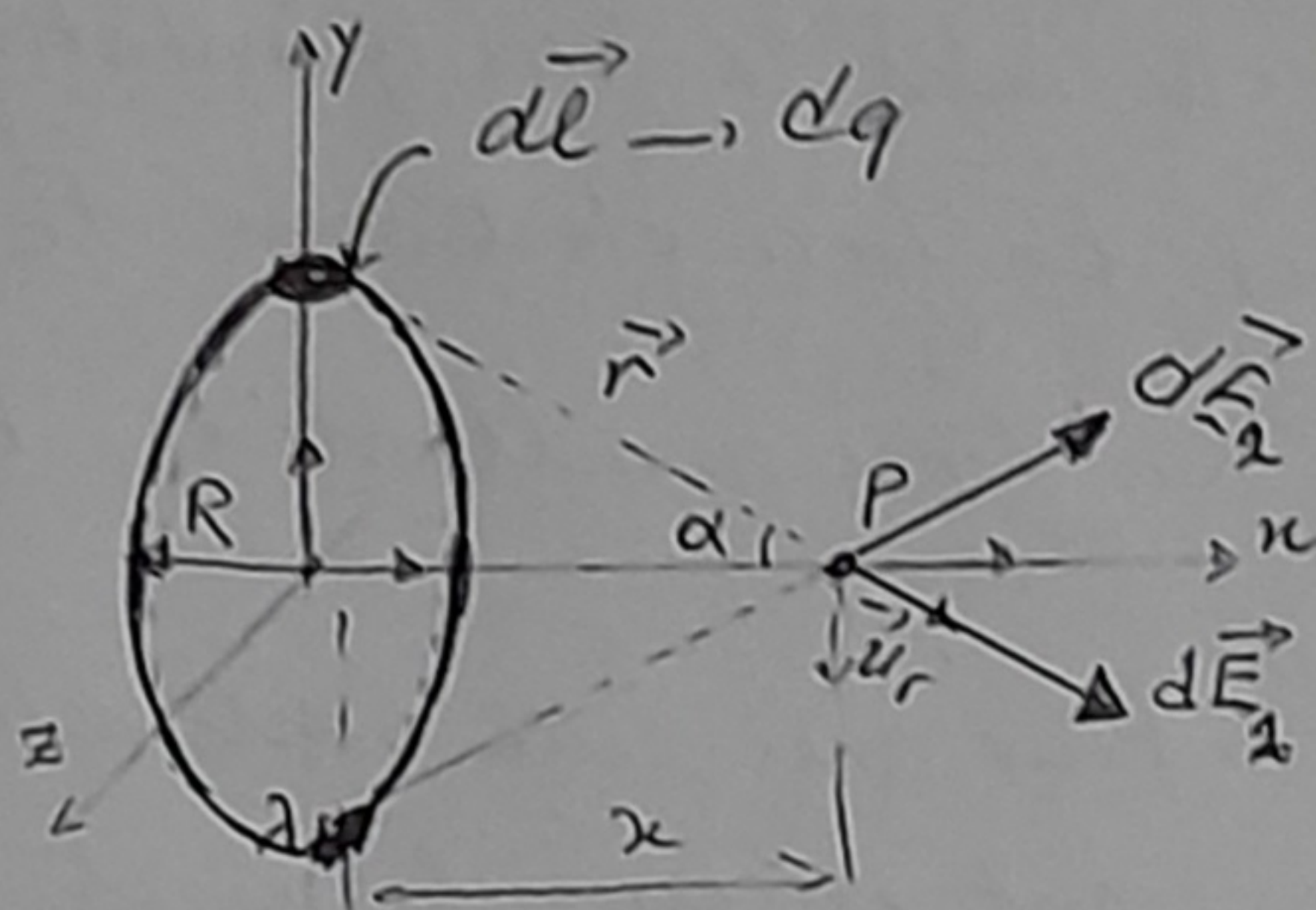
$Q_A > 0 \Rightarrow$ lignes de champ sortantes

$Q_B > 0 \Rightarrow$ lignes de champ sortantes



Exercice 02: Anneau chargé uniformément

- on prend un élément de longueur dl , cet élément porte la charge élémentaire $dq = \lambda dl$, qui produit un champ élémentaire $d\vec{E}$ au point $P(0, x, 0)$



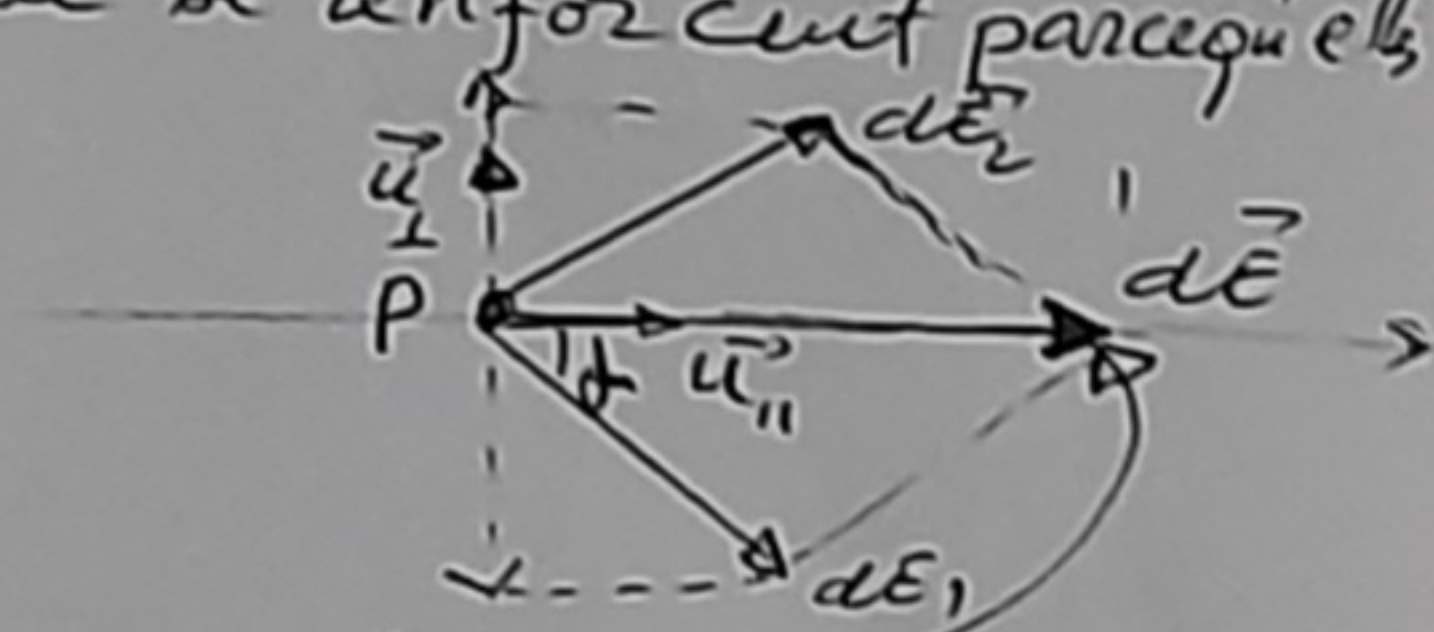
D'après la li de Coulomb. $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^3} \vec{r}$
 or $dq = \lambda dl$

$$\Rightarrow |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + R^2}$$

Puisque la charge est distribuée uniformément le long du contour de l'anneau, on a alors une symétrie de distribution de charge qui aura son effet sur la symétrie du champ $\vec{E}$.

On prend donc une charge élémentaire dq diamétralement opposée à la première, qui elle aussi produit un champ élémentaire $d\vec{E}$.

Les deux champs élémentaires créés au point P ont des composantes transversales opposées et égales, alors elles s'annulent mais les composantes parallèles à l'axe se renforcent parcequ'elles sont dans le même sens.



champ (11)

⑤

$$d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2 = 2 dE \cos \alpha$$

$$\text{or } \cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

$$\Rightarrow d\vec{E} = 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{(x^2 + R^2)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \vec{u}_{//} \quad \text{or } \vec{u}_{//} = \vec{z}$$

$$d\vec{E} = 2 \cdot \frac{x}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \vec{z}$$

$\Rightarrow$ Le champ total créé par l'anneau est.

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int_0^{l/2} 2 \frac{x}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \vec{z}$$

puisque x, R, λ sont des constantes

$$\vec{E} = 2 \cdot \frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{l/2} dl \vec{z}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda l \cdot x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \vec{z} \quad \text{or } Q = \lambda l$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \vec{z}}$$

b°/ Si le point 'P' est très éloigné " $x \gg R$ "

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + R^2} \approx x \quad \Rightarrow \vec{E}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \vec{z} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q x}{x^3} \vec{z}$$

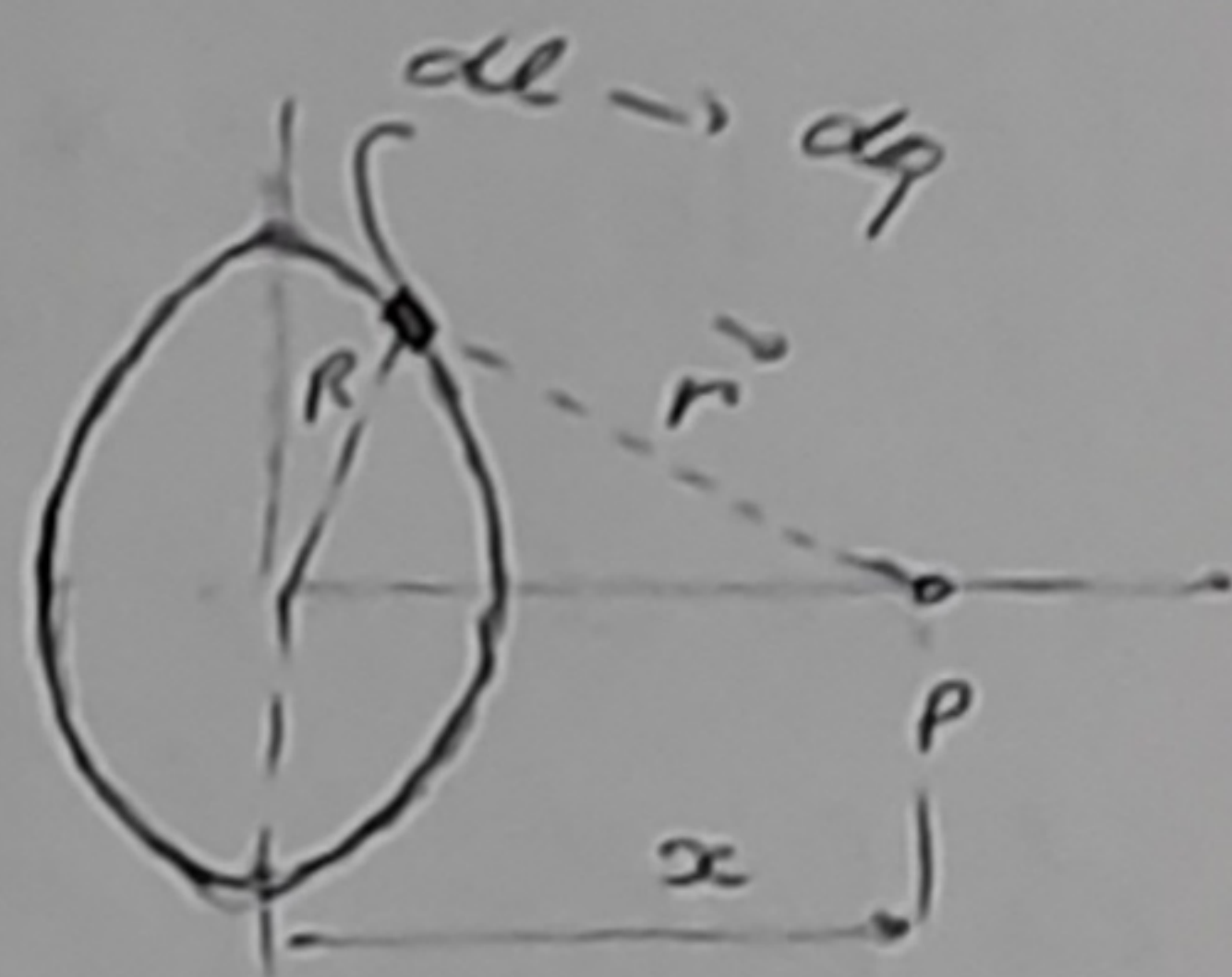
$$\boxed{\vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2} \vec{z}}$$

⑥
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2} \vec{r}$$

Le champ paraît comme s'il est créé par une charge "Q" égale à la charge totale de l'anneau et située au centre de celui-ci

C/ Le potentiel électrique

On prend un élément de longueur dl qui porte une charge élémentaire $dq = \lambda dl$ qui produit au point "P" un ~~cha~~ potentiel élémentaire



$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{(x^2 + R^2)^{1/2}}$$

d'où le potentiel total $V = \int dV = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{(x^2 + R^2)^{1/2}}$

(λ, R) Constantes

$$\Rightarrow V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + R^2}} \int_0^l dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda l}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

puisque la charge totale est $Q = \lambda l$

$$\Rightarrow V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

- Le potentiel peut être calculé à partir de la relation entre le potentiel et le champ électrique $\vec{E} = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$

(7)

Exercice 03

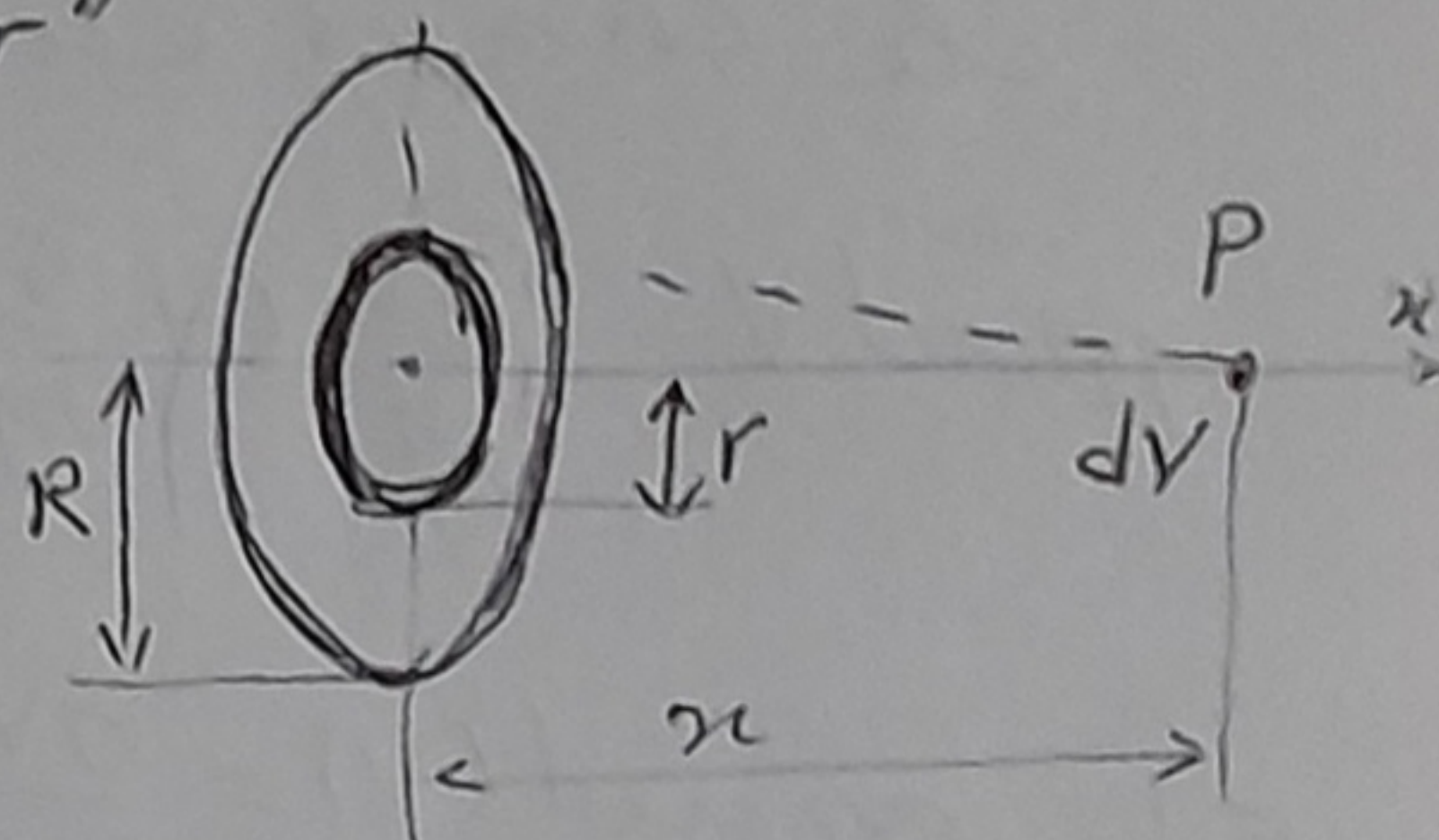
On prend un anneau de rayon "r"

qui porte la charge $dq = \sigma ds$

Cet anneau, comme on l'a vu dans l'exercice précédent, crée

~~un champ $\vec{E}$, telle que~~

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$



un potentiel, telle que

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

$\Rightarrow$ Le potentiel total est: $V = \int dV = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\sqrt{x^2 + r^2}}$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma ds}{\sqrt{x^2 + r^2}} \quad \text{or } ds = 2\pi r dr, \quad \sigma, x: \text{ constants}$$

$$V = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{2\pi r dr}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{x^2 + r^2}} \quad \text{Set } u = x^2 + r^2$$

$$\Rightarrow du = 2r dr$$

$$\int \frac{r dr}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \int \frac{du}{u^{1/2}} = \int u^{-1/2} du = +2u^{1/2} = 2\sqrt{x^2 + r^2}$$

$$\Rightarrow V = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sqrt{x^2 + r^2} \Big|_0^R = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[|x| - \sqrt{x^2 + R^2} \right]$$

$$V(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{x^2 + R^2} - |x| \right]$$

pour $x > 0$ $|x| = x$

$$\Rightarrow \boxed{V(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{x^2 + R^2} - x \right)}$$

⑧ 2°) Le champ électrique,

on a " $\vec{E} = -\text{grad} V$ " l'expression qui relie le champ électrique au potentiel électrique.

$$\vec{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \quad \text{or } V = V(x), \text{ c'est fonction de } x \text{ seulement}$$

$$\Rightarrow \vec{\text{grad}}(V) = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} = \frac{dV}{dx} \vec{i} : \text{ la dérivée totale est égale à la dérivée partielle}$$

$$\vec{E} = - \frac{dV}{dx} \vec{i} = - \frac{d}{dx} \left[\frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{x^2 + R^2} - x) \right]$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right] \vec{i}}$$

3° Si le rayon du disque est très grand par rapport à la distance " x " (c.a.d. au voisinage proche du disque)

$$x \ll R \quad (R \rightarrow \infty) \Rightarrow \sqrt{x^2 + R^2} = R \left(1 + \left(\frac{x}{R} \right)^2 \right)^{1/2} = R \left[1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{R^2} \right] \approx R$$

$$\vec{E} \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{R} \right] \vec{i} \quad \text{or } \frac{x}{R} \ll 1$$

$$\boxed{\vec{E} \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i}}$$

Le champ au voisinage immédiat du disque paraît qu'il est constant le long de toute sa surface qui décrit en s'éloignant.

il est équivalent à un champ créé par un plan infini chargé uniformément.

(9)

Exercice 04

Cylindre chargé uniformément en volume de distribution " ρ "

1/ Champ électrique en tout point de l'espace.

on a une charge distribuée uniformément

: Indépendante de la direction axiale

: Indépendante de l'angle θ autour de l'axe,

$\Rightarrow$ La charge ne varie que dans la direction radiale.
(elle est uniforme) $\Rightarrow$ on a une symétrie,
 $\Rightarrow$ la direction du champ est connue.

• Selon le théorème de Gauss:

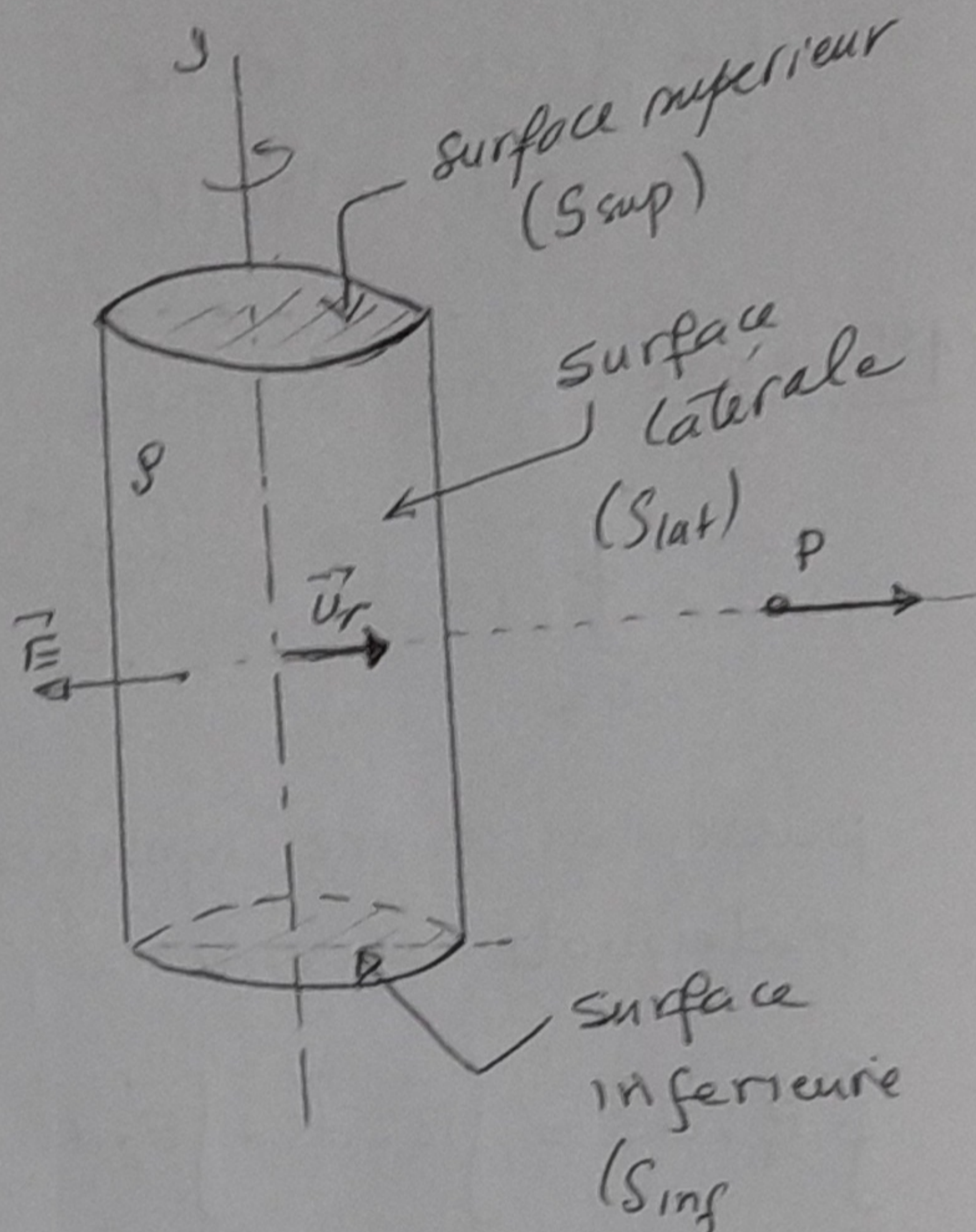
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div } \vec{E} \, dv = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}}$$

$\vec{E}$ est radiale, vu la distribution de charge

$$\vec{E} = E \cdot \vec{u}_r$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{inf}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_{lat}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_{sup}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

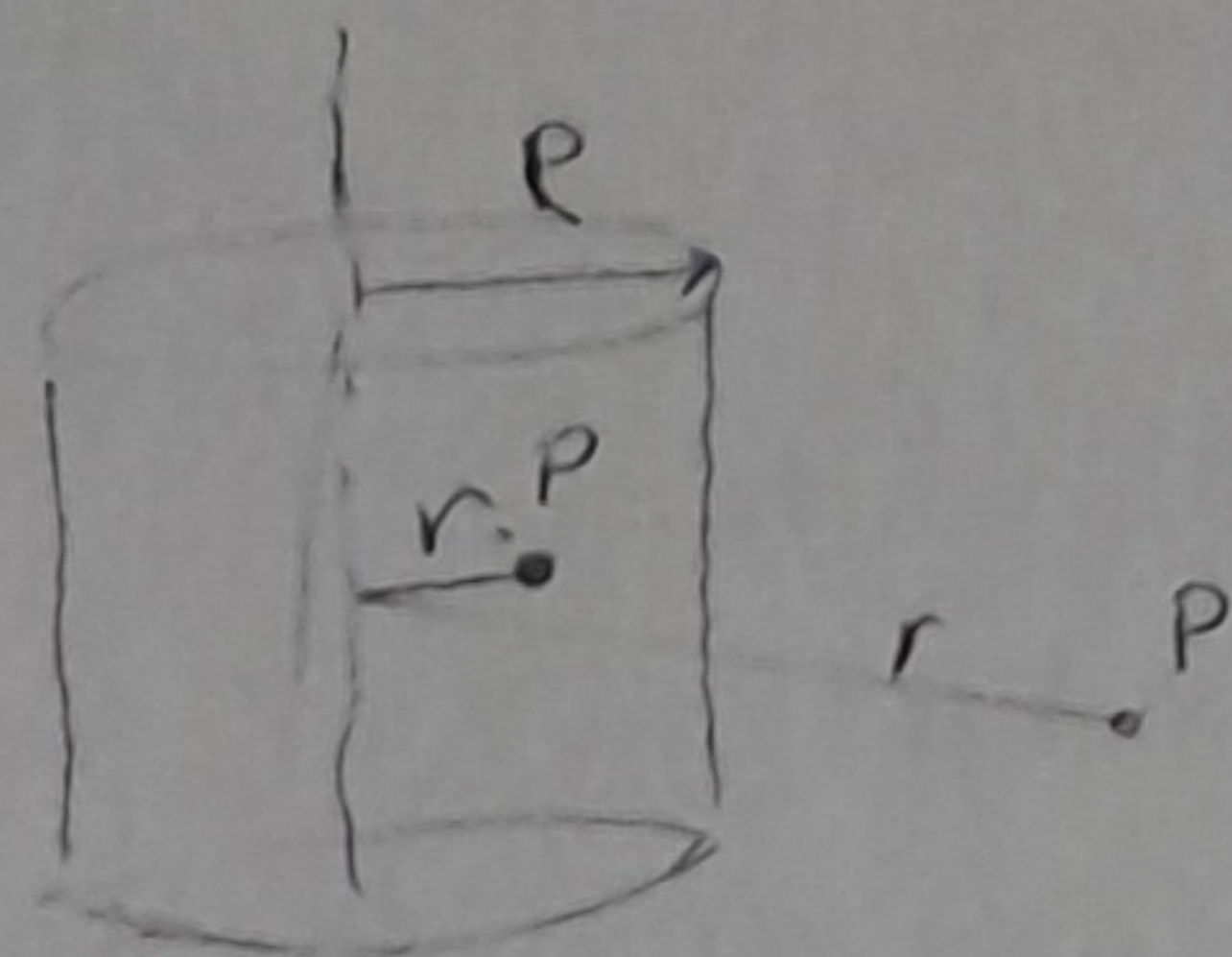


(10)

Divisons l'espace en deux.

- La zone interne $r < R$

- La zone externe $r > R$



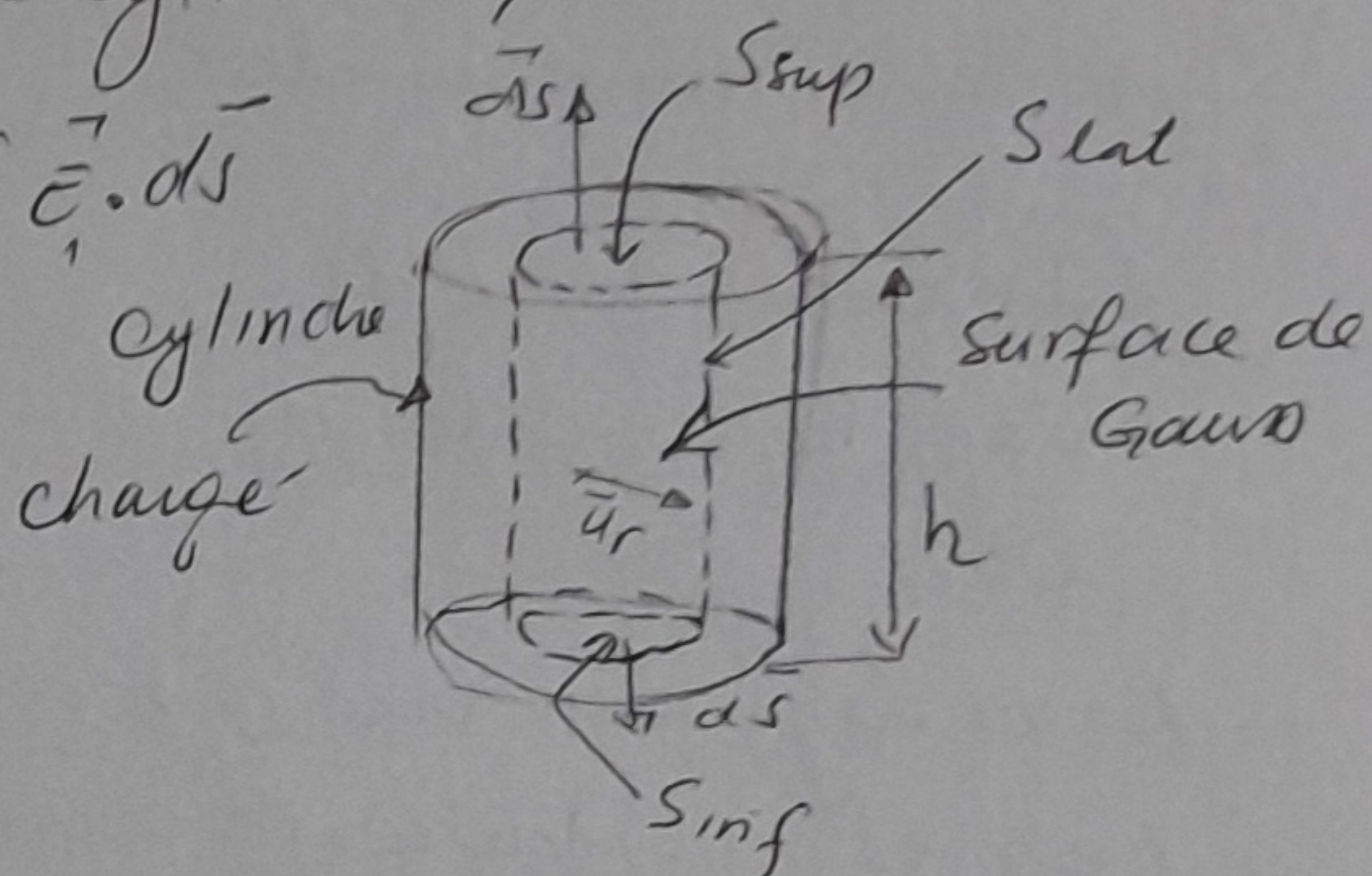
1^{ère} zone: zone interne

$$\oint_{S_G} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \frac{(Q^{in})_{S_G}}{\epsilon_0}$$

S_G : Surface de Gauss

Puisqu'on a une symétrie cylindrique la surface de Gauss adéquate est une surface cylindrique

$$\oint_{S_G} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \int_{S_{inf}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} + \int_{S_{lat}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} + \int_{S_{sup}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}$$



$$\vec{E}_1 = E_1 \vec{u}_r$$

$$S_{inf} \Rightarrow d\vec{S} \perp \vec{E}$$

$$S_{sup} \Rightarrow d\vec{S} \perp \vec{E}$$

$$S_{lat} \Rightarrow d\vec{S} \parallel \vec{E} \quad d\vec{S} = ds \vec{u}_r$$

$$\Rightarrow \oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \int E_1 ds \cos(90^\circ) + \int E_1 \vec{u}_r \cdot ds \vec{u}_r + \int E_1 ds \cos(90^\circ) = \frac{Q^{in}}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \int_{S_{lat}} E_1 ds$$

$$S_{lat} = 2\pi r h$$

$\Rightarrow$ or E_1 est uniforme le long de cette surface

$$\Rightarrow \int_{S_{lat}} E_1 ds = E_1 \int_{S_{lat}} ds = E_1 S_{lat} = \frac{(Q^{in})_{S_G}}{\epsilon_0}$$

$$E_1 (2\pi r h) = \frac{Q^{in}}{\epsilon_0} = \frac{S v'}{\epsilon_0}$$

(11)

or $v = \pi r^2 h$: volume charge ; $E_1 2\pi r h = \frac{\rho \pi r^2 h}{\epsilon_0} \Rightarrow E_1 = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \vec{u}_r$$

2^{ème} Zone : zone externe $r > R$

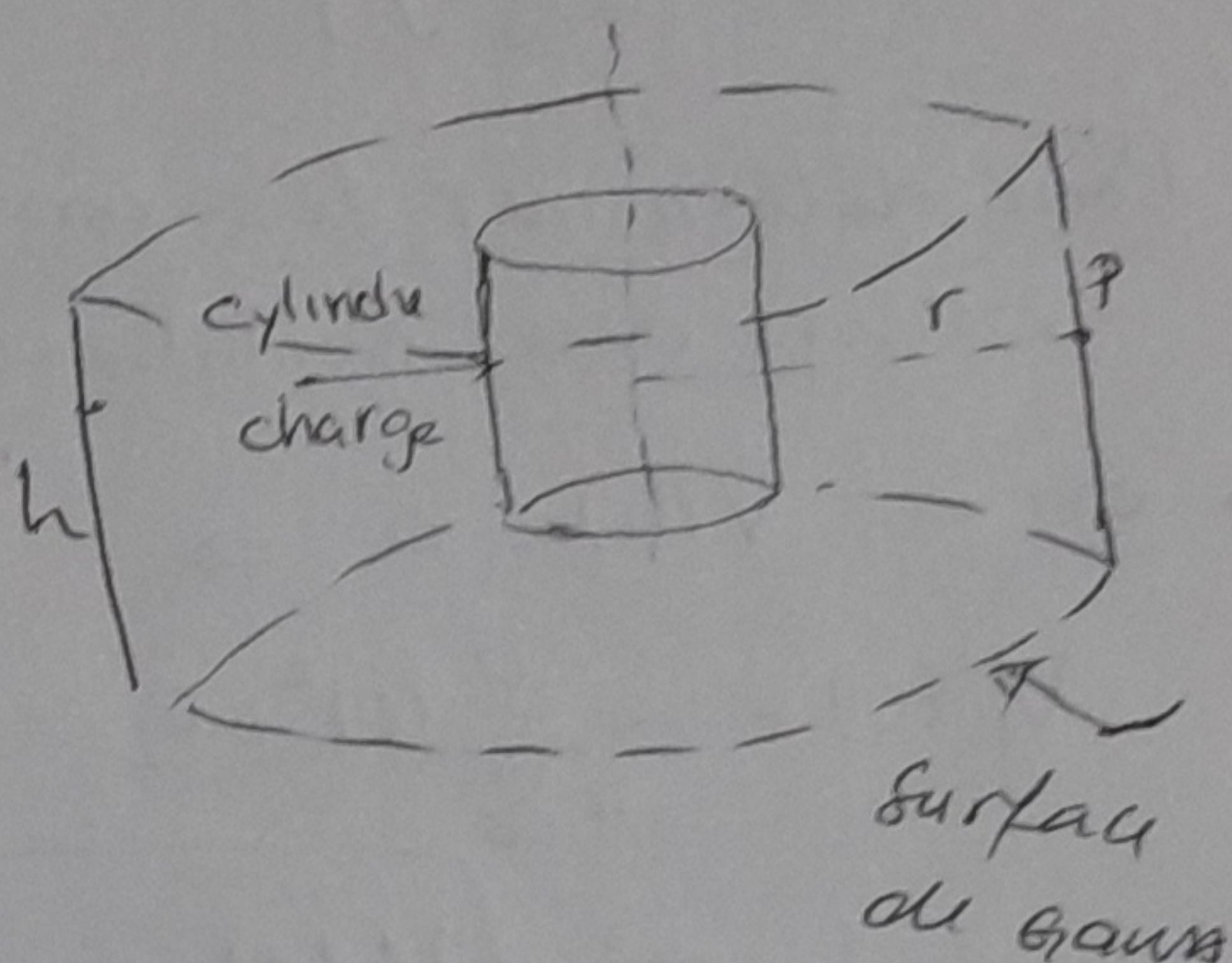
$$\oint \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \int_{S_{inf}} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} + \int_{S_{lat}} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} + \int_{S_{sup}} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{S}_{sup} \perp \vec{E}_2, \vec{S}_{inf} \perp \vec{E}_2, \vec{S}_{lat} \parallel \vec{E}_2$$

$$\oint \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \int_{S_{lat}} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \frac{(Q_{in})_{GS}}{\epsilon_0}$$

$$E_2 (2\pi r h) = \frac{\rho v}{\epsilon_0} = \frac{\rho (\pi R^2 h)}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \cdot \frac{R^2}{r} \vec{u}_r$$



ici v : est le volume de tout le cylindre
car la charge à l'intérieur de la Surface de Gauss celle de tout le cylindre

2° le potentiel électrique :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}(V) \Leftrightarrow V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

1^{ère} Zone : $V_1 = -\int \vec{E}_1 \cdot d\vec{l}$

en coordonnées cylindriques

$$d\vec{l} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{k}$$

Rq : on a utilisé r au lieu de S pour ne pas avoir de confusion avec la densité de charge " ρ "

$$\Rightarrow V_1(r) = -\int \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \vec{u}_r \cdot dr \vec{u}_r = -\int \frac{\rho}{2\epsilon_0} r dr$$

(12)

$$V_1(r) = -\frac{S}{4\epsilon_0} r^2 + C_1$$

Dans la 2^{ème} zone : $V_2(r) = -\int \vec{E}_2 \cdot d\vec{\ell} = -\int \frac{SR^2}{2\epsilon_0 r} \vec{u}_r \cdot d\vec{r} = -\int \frac{SR^2}{2\epsilon_0 r} dr$

$$V_2(r) = -\frac{SR^2}{2\epsilon_0} \int \frac{dr}{r} = -\frac{SR^2}{2\epsilon_0} \ln r + C_2$$

- Pour déterminer les constantes C_1 et C_2 on fait recours aux conditions aux limites ~~en continuité~~

• on a : $V(0) = 0 \Rightarrow 0 \in 1^{\text{ère}}$ zone $r < R \Rightarrow V_1(0) = 0$

$$V_1(0) = -\frac{S}{4\epsilon_0} (0)^2 + C_1 = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_1(r) = -\frac{S}{4\epsilon_0} r^2 \quad r < R}$$

• Continuité du potentiel à la séparation des deux zones

$$V_1(R) = V_2(R) \Rightarrow -\frac{SR^2}{4\epsilon_0} = -\frac{SR^2}{2\epsilon_0} \ln R + C_2$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{SR^2}{2\epsilon_0} \ln R - \frac{SR^2}{4\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow V_2(r) = -\frac{SR^2}{2\epsilon_0} \ln r + \frac{SR^2}{2\epsilon_0} \ln R - \frac{SR^2}{4\epsilon_0}$$

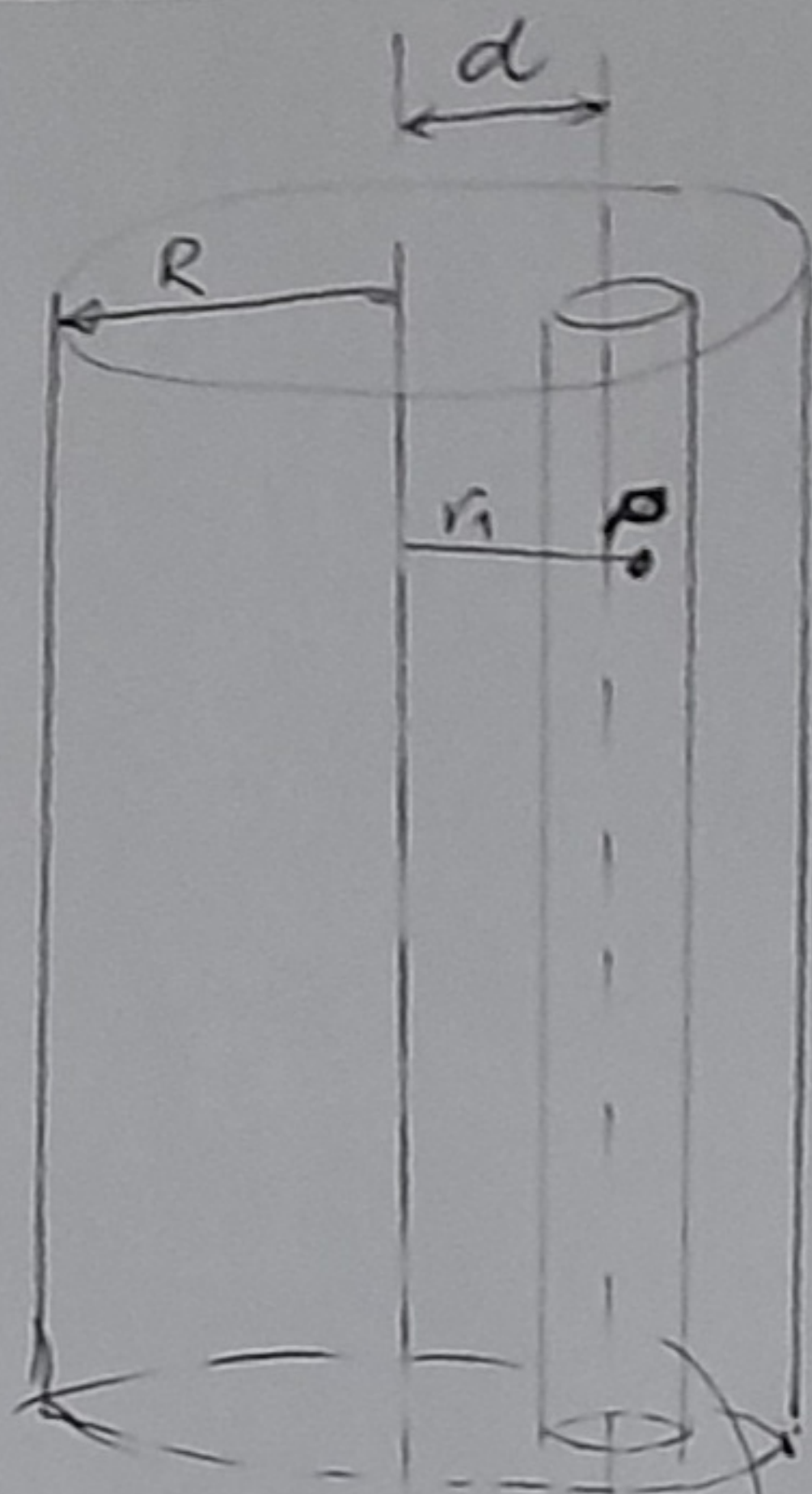
$$\Rightarrow \boxed{V_2(r) = -\frac{SR^2}{4\epsilon_0} \left(\ln\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 1 \right) \quad r > R}$$

3°/ En creusant une cavité à l'intérieur du cylindre comme si on a un cylindre de même dimension que la cavité mais avec une densité de charge négative " $-S$ ". Car si on assemble la charge du cylindre plein et la zone de la cavité qui a une charge ($-S$) on obtient une cavité d'charge nulle

(13)

on prend un point "P" à l'intérieur de la cavité

- ici comme on a deux cylindres l'un de charge en volume " ρ " grand cylindre et l'autre de charge " $-\rho$ " petit cylindre



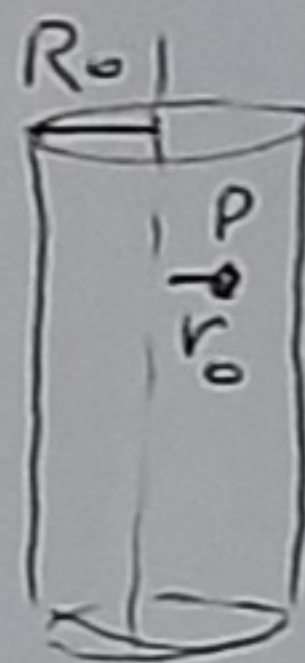
- * Grand Cylindre : rayon R

Selon la 1^{ère} Question le point P est situé à $r < R$

$$\Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r_1 \vec{u}_r$$

- * Petit cylindre de rayon " R_0 " le pt "P" est à l'intérieur du cylindre à une distance $r < R_0$

$$\Rightarrow \text{de la m\~e fa\~con } \vec{E}_0 = \frac{-\rho}{2\epsilon_0} r_0 \vec{u}_r$$



le champ total au point "P" est (suite à la loi de superposition)

$$\vec{E}(P) = \vec{E}_1 + \vec{E}_0 = \frac{\rho}{2\epsilon_0} (r_1 - r_0) \vec{u}_r \quad \text{or} \quad r_1 - r_0 = d$$

d : distance séparant les deux axes

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho d}{2\epsilon_0} \vec{u}_r}$$

puisque ρ, ϵ_0, d sont constante alors le champ $\vec{E}$ est uniforme à l'intérieur de la cavité.

