Chapitre I.Régime continu et Théorèmes fondamentaux

1.Définitions

Un composant électrique ne peut fonctionner que s'il est parcouru par un courant électrique. Il doit donc pouvoir laisser entrer le courant électrique et le laisser sortir.

- **Borne**

Il s'agit de la partie d'un composant électrique qui peut laisser entrer ou sortir le courant électrique(voir FigureI.1). Les bornes permettent aussi de réaliser des connexions, c'est à dire de relier un composant électrique à un autre composant électrique.

- **Dipôle**

C'est un composant électrique qui possède deux bornes (FigureI.1). Les lampes, les interrupteurs, les générateurs, les piles, les diodes, les LED, les résistances et les moteurs sont des dipôles.

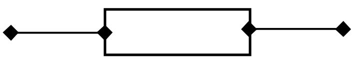


Figure I.1. Dipôle

Le dipôle est un composant électrique possédant deux bornes : une borne d'entrée de courant électrique ainsi qu'une borne de sortie. Un composant électrique ne peut pas posséder moins de deux bornes. Par contre il existe des composants électriques plus complexes que les dipôles disposant de trois, quatre bornes ou plus, on parle alors de tripôles, de quadripôles, etc. A titre d'exemple, les transistors, les transformateurs, ou les amplificateurs opérationnels ne sont pas des dipôles. Chaque dipôle possède une représentation simplifiée appelée symbole normalisé. On distingue en général deux sortes de dipôles :

Dipôle active : Les générateurs qui peuvent produire du courant électrique.

Dipôle passive : Les récepteurs qui reçoivent le courant électrique.

Le comportement d'un dipôle peut être décrit par une courbe caractéristique soit

$$I = f(U) \tag{I.1}$$

ou

$$U = f(I) \tag{I.2}$$

Un dipôle est passif si sa caractéristique passe par zéro. Le comportement d'un dipôle est caractérisé par deux grandeurs électriques duales : la tension et le courant. La tension aux bornes d'un dipôle représente la différence de potentiel u(t) entre les deux bornes du dipôle. La tension s'exprime en Volt (V).

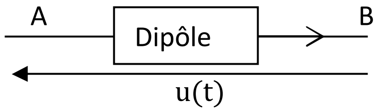


Figure I.2. Tension aux bornes d'un dipôle

$$u(t) = V_A - V_B \tag{I.3}$$

Le courant traversant un dipôle correspond au déplacement de charges électriques sous l'effet du champ électrique induit par la différence de potentiel aux bornes du dipôle. A tout instant le courant entrant par une borne d'un dipôle est égal au courant sortant par l'autre borne. L'intensité i(t) le débit des charges électriques qui traversent une section de conducteur pendant une durée de temps dt :

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \tag{I.4}$$

L'intensité s'exprime en Ampère (A). Le courant électrique est une grandeur orientée. Conventionnellement le sens positif correspond au sens de déplacement des charges positives.

Figure I.3. Le courant dans un dipôle

$$i(t) = i_A(t) = i_B(t) \tag{I.5}$$

Il existe deux possibilités pour le choix des sens conventionnels de la tension et du courant. Selon que u et i sont de même sens ou non nous avons :

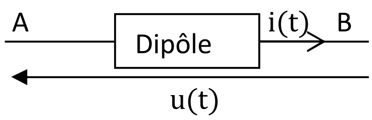


Figure I.4. Récepteur

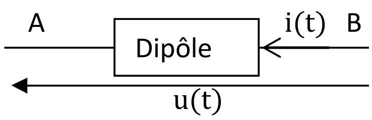


Figure I.5. Générateur

En régime stationnaire, indépendant du temps, il existe une relation entre l'intensité i traversant le dipôle et la tension u entre ses bornes. Cette relation peut se mettre sous la forme $i = i(u)$ ou $u = u(i)$.

Les graphes obtenus sont appelés caractéristiques statiques :

$i = i(u)$: caractéristique statique courant-tension du dipôle

$u = u(i)$: caractéristique statique tension-courant du dipôle

Un dipôle est passif si son intensité de court-circuit et sa tension en circuit ouvert sont nulles : ses caractéristiques statiques passent par l'origine. Il est dit actif dans le cas contraire. Un dipôle est linéaire si :

$$i\,(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha\, i(v_1) + \beta\, i(v_2) \quad (I.6)$$

$$u\,(\alpha i_1 + \beta i_2) = \alpha\, u(i_1) + \beta\, u(i_2) \quad (I.7)$$

- **Réseau**

On appelle réseau un ensemble de dipôles reliés entre eux par des fils conducteurs de résistance négligeable.

- **Nœud**

En électricité comme en électronique, un nœud est le point de connexion électrique entre plusieurs composants.

- **Branche**

On appelle branche d'un réseau un ensemble de dipôles reliés en série.

- **Maille**

On appelle maille d'un réseau un ensemble de branches formant un circuit fermé dans lequel chaque nœud n'est rencontré qu'une fois.

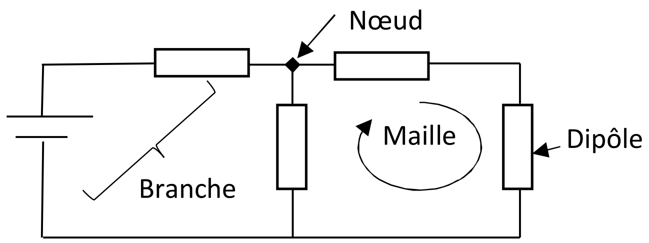


Figure I.6. Réseau électrique

2.Tension

La tension électrique entre deux points d'un réseau est égale à la différence de potentiel électrique entre ces deux points. Cette dernière est une grandeur algébrique, représentée par une flèche figure ci-dessous.

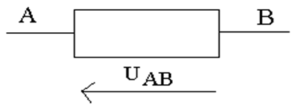


Figure I.7. Tension aux bornes d'un dipôle

Si V_A est le potentiel dans le point A et V_B le potentiel dans le point B alors on a :

$$U_{AB} = V_A - V_B \tag{I.8}$$

$$U_{AB} > 0 \Rightarrow V_A > V_B \tag{I.9}$$

$$U_{AB} < 0 \Rightarrow V_A < V_B \tag{I.10}$$

Comme le potentiel électrique, la tension s'exprime en Volt (V).

3.Intensité

Grandeur caractérisant un courant électrique, c'est-à-dire un déplacement d'ensemble des charges mobiles dans un conducteur. L'intensité s'exprime en Ampère (A).

Relation de l'unité de courant avec d'autres unités du Système International :

l'intensité $i(t)$ est liée à la charge q traversant une section du conducteur par la relation :

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \tag{I.11}$$

$i(t)$ en A , q en Coulomb (C), t en seconde (s).

4.La loi d'Ohm pour les résistances

L'énergie électrique produite par le passage d'un courant I dans une résistance est convertie par effet Joule en chaleur, elle est exprimée par la relation :

$$P = R \cdot I^2 \tag{I.12}$$

D'autre part la puissance consommée est égale à :

$$P = U \cdot I \tag{I.13}$$

Où U désigne la différence de potentiel "**d.d.p**" aux bornes de la résistance ; ces deux puissances étant égales, nous obtenons alors l'égalité suivante :

$$U \cdot I = R. I^2 \tag{I.14}$$

En divisant par I on obtient :

$$U = R. I \tag{I.15}$$

Cette dernière relation c'est la loi d'Ohm

4.1 Associations de dipôles

On dit les dipôles sont en série s'ils sont parcourus par la même intensité de courant électrique. Et ils sont en parallèle s'ils ont une même différence de potentiel à leurs bornes.

4.1.1 Association en série des résistances

Soit n résistances branchées en série et parcourues par le même courant I (figure 7).

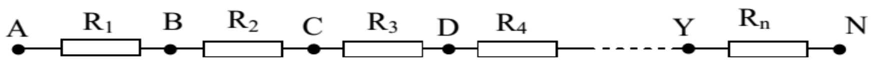


Figure I.8. Résistances en série

Si on considère que les résistances entre A et N se comporte comme une seule résistance R_{eq} et comme les résistances sont en série ; alors le même courant I passe de A à N donc on peut écrire :

$$U_{AN} = R_{eq} I \quad (I.16)$$

En appliquant la loi d'Ohm à chacune de ces résistances nous pouvons écrire les relations suivantes :

$U_{AB} = R_1 I;\ U_{BC} = R_2 I; U_{CD} = R_3 I; U_{DE} = R_4 I; \dots; U_{YN} = R_n I;$

La d.d.p entre les extrémités A et N c.-à-d. U_{AN} du circuit est égale à la somme des d.d.p U_{AB}entre A et B, U_{BC} entre B et C, U_{CD} entre C et D, …, et U_{YN} entre Y et N.

$$U_{AN} = R_1 I + R_2 I + R_3 I + R_4 I + \cdots + R_n I \quad (I.17)$$

$$U_{AN} = (R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + \cdots + R_n) I \quad (I.18)$$

Alors par comparaison on aura :

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + \cdots + R_n \quad (I.19)$$

Alors on peut conclure que les résistances d'une branche (branchées en série) sont équivalentes à une résistance unique égale à la somme de ces résistances de ce dernier.

4.1.2 Association en parallèle ou en dérivation des résistances

Mettons entre deux points N et M plusieurs résistances (par exemple quatre résistances, figure I.9). Le courant I dans le circuit créé plusieurs courants dérivés, dont son intensité est égale à la somme des intensités de ces courants dérivés.

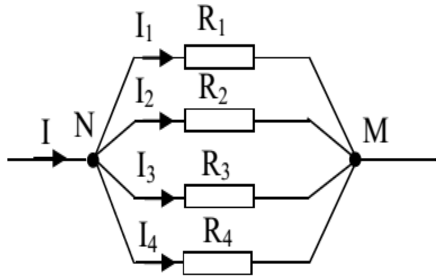


Figure I.9. Résistances en parallèle.

Si on considère que les résistances entre M et N se comporte comme une seule résistance R_{eq} donc on peut écrire :

$$U_{MN} = R_{eq} I \tag{I.20}$$

Alors

$$I = \frac{U_{MN}}{R_{eq}} = \left(\frac{1}{R_{eq}}\right) U_{MN} \tag{I.21}$$

Nous savons que

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + \cdots + I_n \tag{I.22}$$

L'application de la loi d'Ohm entre les nœuds M et N à chacune des résistances $R_1;\ R_2;\ R_3; R_4; \dots .; R_n$, sachant que la tension entre M et N est constante on peut écrire les relations suivantes :

$$U_{MN} = R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_3 I_3 = R_4 I_4 = \cdots = R_n I_n \tag{I.23}$$

$$I_1 = \frac{U_{MN}}{R_1}; I_2 = \frac{U_{MN}}{R_2}; I_3 = \frac{U_{MN}}{R_3}; I_4 = \frac{U_{MN}}{R_4}; \dots \dots; I_n = \frac{U_{MN}}{R_n} \tag{I.24}$$

On remplace les valeurs des I dans l'équation précédente on aura

$$I = \frac{U_{MN}}{R_1} + \frac{U_{MN}}{R_2} + \frac{U_{MN}}{R_3} + \frac{U_{MN}}{R_4} + \cdots + \frac{U_{MN}}{R_n} \tag{I.25}$$

$$I = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \cdots + \frac{1}{R_n}\right) U_{MN} \tag{I.26}$$

Alors

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \cdots + \frac{1}{R_n} \tag{I.27}$$

De la relation (I.27), on peut conclure que l'inverse de la résistance équivalente est égale à la somme des inverses des résistances branchées en parallèle.

Notation :

L'inverse de la résistance est connu sous le nom de la conductance G $\left(G = \frac{1}{R}\right)$. On peut écrire la relation

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \cdots + \frac{1}{R_n} \qquad (I.28)$$

De la manière suivante en utilisant les conductances

$$G_{eq} = G_{1+}G_2 + G_3 + G_4 + \cdots + G_{eq} \qquad (I.29)$$

5. Lois de Kirchhoff

On appelle circuit ou réseau électrique un ensemble de dipôles reliés entre eux par des fils conducteurs **parfaits**. Un nœud est un point du circuit relié à deux dipôles ou plus. Une branche de réseau est la partie de circuit comprise entre deux nœuds. Une maille est un parcours fermé de branches passant au plus une seule fois par un nœud donné. **De ces concepts découlent** les deux lois de Kirchhoff permettant l'analyse des réseaux électriques.

5. 1 Loi des nœuds

En tout nœud d'un circuit, et à tout instant, la somme des courants qui arrivent est égale à la somme des courants qui sortent. Il s'agit d'une conséquence de la conservation de la charge électrique.

$$\sum i_{\text{Entrant au noeud}} = \sum i_{\text{Sortant des noeuds}} \qquad (I.30)$$

Ou bien

$$\sum i_{\text{Arrivent au noeud}} = \sum i_{\text{Partent du noeud}} \qquad (I.31)$$

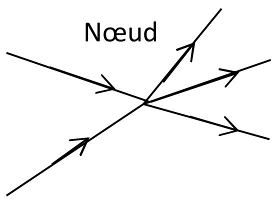


Figure I.10. Les courants dans un nœud

La loi des nœuds peut encore s'écrire sous la forme suivante : En tout nœud d'un réseau la somme algébrique des courants est nulle.

$$\sum_{k=1}^{N} \pm I_k = 0 \qquad (I.32)$$

5.2 Loi des mailles

Le long de toute maille d'un réseau électrique, à tout instant, la somme algébrique des tensions est nulle.

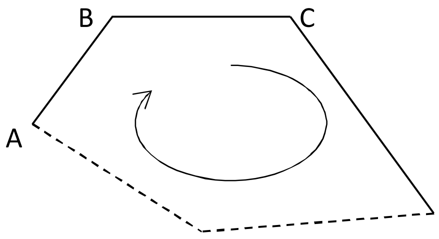


Figure I.11. Les tensions dans une maille

$$(V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_D) + \cdots + (V_? - V_A) = 0 \qquad (I.33)$$

Si on appelle la différence de potentiel

$$(V_A - V_B) = V_1 \;,(V_B - V_C) = V_2 \;,\ldots,(V_? - V_A) = V_k \qquad (I.34)$$

Alors la loi des mailles devient

$$\sum_{k=1}^{N} \pm V_k = 0 \qquad (I.35)$$

5.3 Règles de diviseurs

5.3.1 Diviseur de tension

Elle est appliquée pour les éléments (R_i) en série, traversés par le même courant

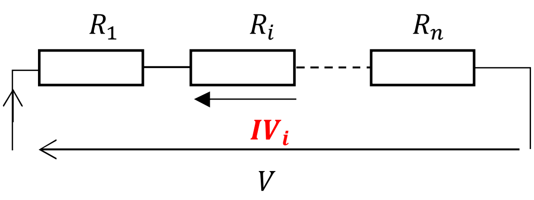


Figure I.12. Diviseur de tension

Nous avons

$$V = \left(\sum_{i=1}^{n} R_i\right) I \qquad (I.36)$$

Et

$$V_i = R_i I (I.37)$$

On peut déduire la tension V_k **aux bornes** la résistance R_k

$$V_k = \frac{R_i}{\sum_{k=1}^{n} R_k} V \qquad (I.38)$$

5.3.2 Diviseur de courant

Elle est appliquée pour les éléments (G_j) en parallèle soumis à la même tension V

$G_j = \frac{1}{R_j}$: est la conductance.

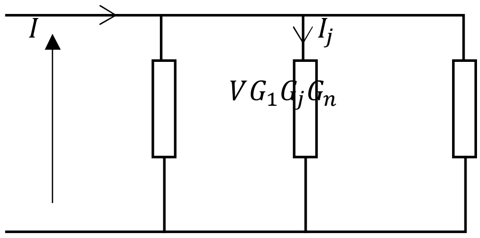


Figure I.13. Diviseur de courant

Nous avons

$$I = V\left(\sum_{k=1}^{n} G_k\right) \qquad (I.36)$$

Et

$$I_j = V\,G_j \qquad (I.37)$$

Du rapport des deux dernières équations on peut déduire le courant I_j qui traverse la conductance.

$$G_j I_j = \frac{G_j}{\left(\sum_{k=1}^{n} G_k\right)} I \qquad (I.38)$$

Ou bien en termes de résistances

$$I_j = \frac{\frac{1}{R_j}}{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}\right)} I \qquad (I.39)$$

6. Sources de tension et de courant

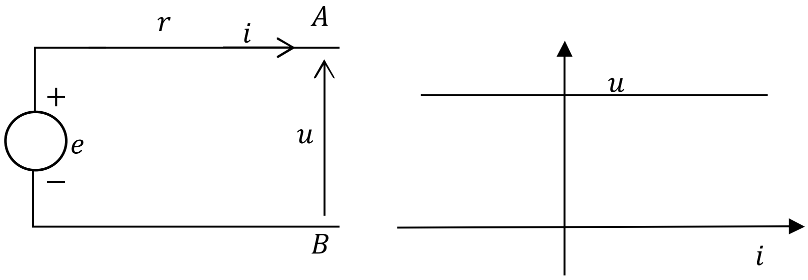
6.1. Sources de tension idéales et réelles

Un générateur de tension idéal délivre une tension indépendante du courant débité :

$$V_A - V_B = e = \text{constante } \forall i \qquad (I.40)$$

i : le courant délivré par la source de tension.

Cette tension est la force électromotrice (f.e.m.) du générateur.



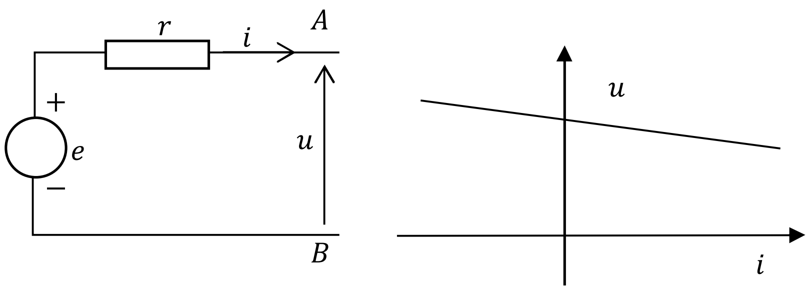
$u = e$

Figure I.14. Générateur idéal

La résistance interne d'un générateur de tension idéal est nulle, ce qui n'est généralement pas le cas pour un générateur réel. Un générateur réel est modélisé par un générateur idéal en série avec sa résistance interne. En convention générateur, la caractéristique statique tension-courant du générateur de tension réel devient :

$$u = e - r\,i \qquad \text{(I.41)}$$

La résistance interne induit une chute de tension.



$u = e - ri$

Figure I.15. Générateur réel

On distingue deux types de source de tension. Une source indépendante, ou autonome, est une source dont la valeur de la f.e.m. est constante et ne dépend pas du circuit. Une source commandée, contrôlée, ou liée est une source dont la valeur de la f.e.m. dépend d'une quantité externe à la source, par exemple une tension ou une intensité du circuit.

Un générateur de tension idéal est un exemple de dipôle polarisé : le signe de la f.e.m. est indépendant de celui du courant. Selon les **cas?** il fonctionne comme générateur ou récepteur. En effet, en notation générateur $p = u\,i$ représente la puissance délivrée au reste du circuit par la source de tension. Ainsi :

$$\text{Si } i > 0 \Rightarrow p > 0 \text{, source} \equiv \text{générateur} \qquad \text{(I.42)}$$

$$\text{Si } i < 0 \Rightarrow p < 0 \text{, source} \equiv \text{récepteur} \qquad \text{(I.43)}$$

6.2 Sources de courant idéales et réelles

Un générateur de courant idéal débite un courant dont l'intensité est indépendante de la tension aux bornes du générateur :

$$i = i_S = \text{constante } \forall u \qquad (I.44)$$

La figure I.16 montre le symbole d'une source de courant idéale et sa caractéristique courant-tension.

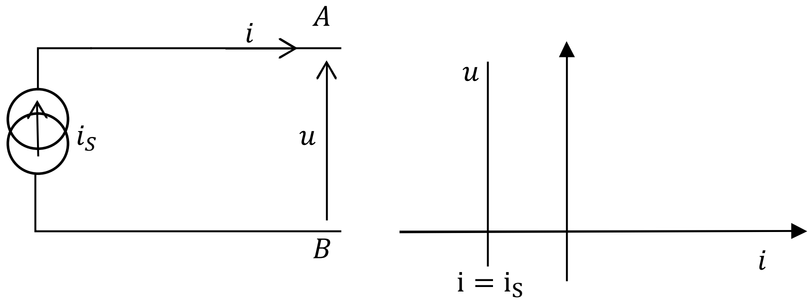


Figure I.16. Source de courant idéale

La résistance interne d'une source de courant idéale est infinie. Pour un générateur réel on tient compte de sa résistance interne, en le modélisant par une source idéale de courant en parallèle avec sa résistance interne r. En convention générateur, la caractéristique statique courant-tension du générateur de courant réel est donc :

$$i = i_S - \frac{u}{r} \qquad (I.45)$$

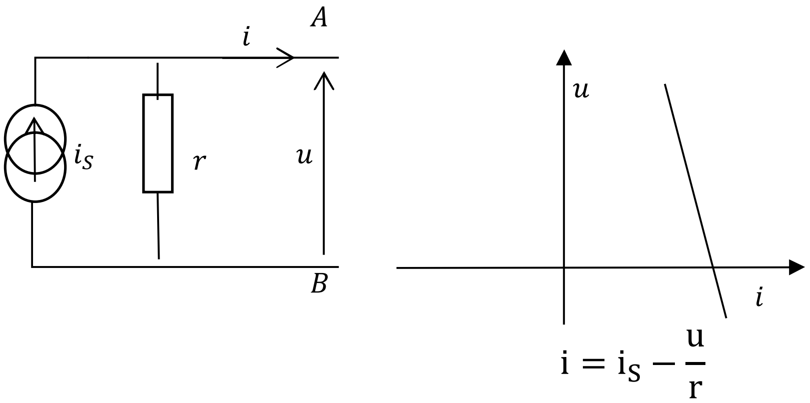


Figure I.17. Source de courant réelle

Comme pour les sources de tension on distingue les sources de courant indépendantes et les sources de courant commandées qui dépendent d'une grandeur électrique du circuit.

7.Théorèmes fondamentaux d'analyse des circuits électriques

Les lois de Kirchhoff sont employées pour déterminer les intensités de courants et les différences de potentiels (d.d.p) aux bornes de chaque branche du réseau électrique. Cette opération est appelée analyse du circuit ou du réseau électrique. Tous les éléments constitutifs du réseau étant connus, le calcul complet nécessite autant d'équations que des branches. L'analyse se trouve simplifiée par l'application de lois associatives et de théorèmes appropriés.

7.1 Méthode des mailles

Elle permet de résoudre le problème en écrivant M équations aux mailles :

- On choisit un système de M mailles indépendantes.
- On affecte chacune de ces mailles d'un courant fictif circulant dans un sens arbitrairement choisi.
- On applique pour chacune de ces mailles la 2ème loi de Kirchhoff.
- Le courant réel d'une branche donnée est obtenu en effectuant la somme algébrique des courants fictifs circulant dans la branche considérée.
- Les d.d.ps de branches sont déduites à partir des courants réels

7.2 Méthode des nœuds

Représenter par l'écriture de N équations aux nœuds :

- On choisit un nœud de référence (qui soit le plus souvent la masse) ;
- On affecte chacun des nœuds restant d'un potentiel V_1, V_2, ..., V_N inconnu ;
- On écrit pour chacun de ces N nœuds la 1ère loi de Kirchhoff.

7.3 Principe de superposition

Lorsqu'il ne contient que des dipôles linéaires, la réponse (courant et tension dans chaque branche) d'un réseau comportant plusieurs sources indépendantes (de tension et/ou de courant) est égale à la somme des réponses que l'on obtiendrait en considérant séparément chacune de ces sources.

Pour chacune des sources indépendantes, on étudie la réponse du circuit les autres sources indépendantes étant "éteintes". Par contre, les sources commandées restent toujours actives. Le principe de superposition est une conséquence directe de la linéarité du réseau.

Une source de tension idéale "éteinte" est remplacée par un court-circuit ($e = 0\ \forall i$). Une source de courant idéale "éteinte" est remplacée par un circuit ouvert ($i_S = 0\ \forall u$).

Considérons un circuit comportant n dipôles dont N sources de tension ou de courant indépendantes. L'état électrique de ce circuit, ou sa réponse, peut être caractérisé par l'ensemble des intensités des courants traversant chaque dipôle et des tensions aux bornes de ceux-ci :

$$\{R_k = i_k V_k\}_{k=1,n} \tag{I.46}$$

Nous pouvons calculer N états partiels en considérant chacune des N sources en service seule les autres étant "éteintes" :

$$\{R_k = i_k V_k\}_{k=1,n} \tag{I.47}$$

Chaque résistance peut être caractérisée par :

$$R^j = \{i_k^i, V_k^i\}_{k=1,n} \text{pour j=1,N} \tag{I.48}$$

Le principe de superposition permet d'écrire la réponse complète à partir des états partiels :

$$R = \sum_{j=1}^{N} R^j \tag{I.49}$$

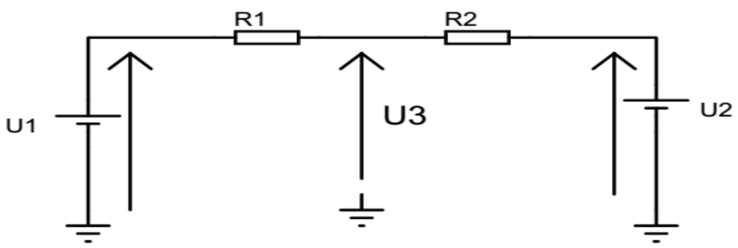
Soit :

$$\begin{cases} i_k = \sum_{j=1}^{N} i_k^j \\ V_k = \sum_{j=1}^{N} V_k^j \end{cases} \forall k = 1, n \tag{I.50}$$

D'une autre manière, pour un circuit de n sources de tensions (E_1 à E_n), si on veut déterminer la valeur d'un potentiel ou d'une différence de potentiel quelconque du montage, il suffit :

1- De calculer la valeur de ce potentiel en prenant en compte que la source E_1. Les n-1 sources restantes étant éteintes.
2- Répéter cette opération pour chaque source de tension (n calculs).
3- Ajouter toutes les valeurs de tensions calculés en 1 et 2

Exemple pour le circuit ci-dessous



U_1 et U_2 connues, on souhaite déterminer la tension U_3

La valeur du potentiel U_3 peut être trouvée en deux étapes :

- On éteint la source U_2 (remplacée par un court-circuit) et on calcule U_{31}, en fonction de U_1, R_1 et R_2.

- On éteint la source U_1 (remplacée par un court-circuit) et on calcule U_{32}, en fonction de U_2, R_1 et R_2.

La différence de potentiel U_3 vaut alors $U_{31}+U_{32}$.

8.Théorèmes de Thevenin et de Norton

8.1 Théorème de Thevenin

Un réseau linéaire, ne comprenant que des sources indépendantes de tension, de courant et des résistances, pris entre deux bornes se comporte comme un générateur de tension E_0 en série avec une résistance R_0. La f.e.m. E_0 du générateur équivalent est égale à la tension existante entre les deux bornes considérées lorsque le réseau est en circuit ouvert. La résistance R_0 est celle du circuit vu des deux bornes lorsque toutes les sources sont éteintes.

8.2 Théorème de Norton

De même on peut remplacer tout réseau linéaire, ne comportant pas de sources commandées, pris entre deux de ses bornes par une source de courant I_0 en parallèle avec une résistance R_0. L'intensité I_0 est égale au courant de court-circuit, les deux bornes étant reliées par un conducteur parfait. La résistance R_0 est celle du circuit vu des deux bornes lorsque toutes les sources sont éteintes.

8.3 Equivalence entre représentations de Thevenin et Norton

L'application respective des théorèmes de Thevenin et Norton permet de montrer l'équivalence de deux circuits suivants :

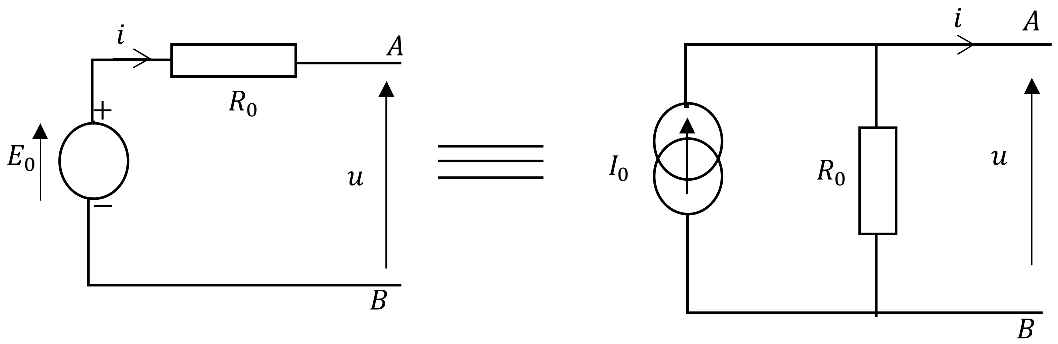


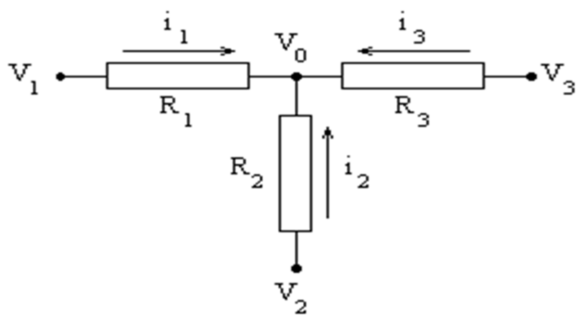
Figure I.18. Equivalence TheveninNorton

Avec :

$$E_0 = R_0 I_0 \tag{I.51}$$

9. Théorème de Millman

Considérons le circuit suivant :



Pour chacune des branches nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} V_1 - V_0 = R_1 I_1 \\ V_2 - V_0 = R_2 I_2 \\ V_3 - V_0 = R_3 I_3 \end{cases} \quad (I.52)$$

Soit encore

$$\begin{cases} I_1 = \frac{V_1 - V_0}{R_1} \\ I_2 = \frac{V_2 - V_0}{R_2} \\ I_3 = \frac{V_3 - V_0}{R_3} \end{cases} \quad (I.53)$$

En sommant ces relations il vient :

$$I_1 + I_2 + I_3 = \frac{V_1 - V_0}{R_1} + \frac{V_2 - V_0}{R_2} + \frac{V_3 - V_0}{R_3} \quad (I.54)$$

Or nous avons : $I_1 + I_2 + I_3 = 0$, donc :

$$V_0\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} \quad (I.55)$$

Où

$$V_0 = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \quad (I.56)$$

Ce résultat se généralise à un nombre quelconque de branches :

$$V_0 = \frac{\sum_1^n \frac{V_k}{R_k}}{\frac{1}{R_k}} = \frac{\sum_1^n G_k V_1}{\sum_1^n G_k} \quad (I.57)$$

La tension au nœud est la moyenne des tensions aux bornes de tous les dipôles pondérés par les conductances respectives.

10. Théorème de Kennelly

Présentation des montages sous forme de triangle (à gauche) et d'étoile (à droite). Le théorème de Kennelly, ou transformation triangle-étoile, ou transformation Y-Δ, ou encore transformation T-Π, est une technique mathématique qui permet de simplifier l'étude de certains réseaux électriques.

Ce théorème, nommé ainsi en hommage à Arthur Edwin Kennelly, permet de passer d'une configuration « triangle » (ou Δ, ou Π, selon la façon dont on dessine le schéma) à une configuration « étoile » (ou, de même, Y ou T). Le schéma ci-contre est dessiné sous la forme « triangle-étoile » ; les schémas ci-dessous sous la forme T-Π.

Ce théorème est utilisé en électrotechnique ou en électronique de puissance afin de simplifier des systèmes triphasés. Il est aussi d'utilisation courante en électronique pour simplifier le calcul de filtres ou d'atténuateurs. Les deux circuits de la figure 17 sont équivalents si les valeurs de leurs résistances sont liées par les relations indiquées ci-dessous.

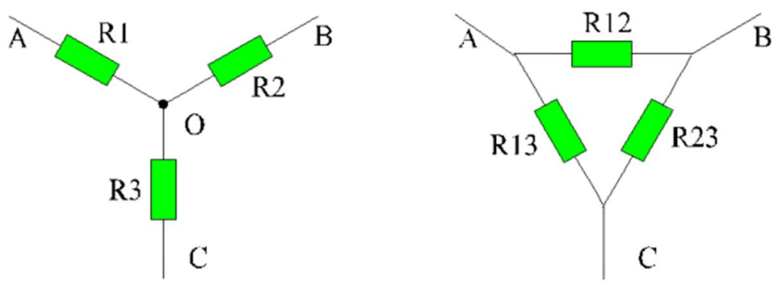


Figure I.19. Equivalence étoile tringle ou bien Pi-Ti

Le passage de la structure triangle (ABC) à la structure étoile (OABC) s'obtient par les relations :

Si on déconnecte le point A, il doit y avoir égalité des impédances entre B et C.

$$R_2 + R_3 = \frac{R_a(R_b+R_c)}{R_a+R_b+R_c} \tag{I.58}$$

.

On tire les trois égalités suivantes :

$$R_2 + R_3 = \frac{R_a(R_b+R_c\ \ )}{R_a+R_b+R_c} \tag{I.59}$$

$$R_2 + R_1 = \frac{R_c(R_a+R_b)}{R_a+R_b+R_c} \tag{I.60}$$

$$R_1 + R_3 = \frac{R_b(R_a+R_c)}{R_a+R_b+R_c} \tag{I.61}$$

En sommant les deux premières égalités et en retranchant la troisième, on déduit :

$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a+R_b+R_c} \tag{I.62}$$

$$R_2 = \frac{R_a R_c}{R_a+R_b+R_c} \tag{I.63}$$

$$R_3 = \frac{R_b R_a}{R_a+R_b+R_c} \tag{I.64}$$

Pour la transformation inverse, on relie B et C : la conductance entre A et B-C s'écrit alors :

$$\frac{1}{Z_a} = \frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_b} = \frac{R_2+R_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3} \tag{I.65}$$

$$\frac{1}{Z_b} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_c} = \frac{R_1+R_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3} \tag{I.66}$$

$$\frac{1}{Z_c} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} = \frac{R_1+R_2}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3} \tag{I.67}$$

Et l'on calcule

$$\frac{1}{Z_a} = \frac{1}{Z_b} - \frac{1}{Z_c} \tag{I.68}$$

Il vient

$$\frac{2}{R_b} = \frac{2R_2}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3} \tag{I.69}$$

Soit

$$R_b = \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_2} \tag{I.70}$$

De la même façon on peut aussi écrire que :

$$R_c = \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_3} \tag{I.71}$$

$$R_a = \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_1} \tag{I.72}$$

Ce théorème est utilisé pour transformer les réseaux sous forme triangle (Pi) au forme étoile (T) et vice versa (figure 16).

1) Transformation triangle → étoile (Δ → Y)

$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c} \tag{I.73}$$

$$R_2 = \frac{R_a R_c}{R_a + R_b + R_c} \tag{I.74}$$

$$R_3 = \frac{R_b R_a}{R_a + R_b + R_c} \tag{I.75}$$

2) Transformation étoile → triangle (Y → Δ)

$$R_b = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_2} \tag{I.76}$$

$$R_c = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_3} \tag{I.77}$$

$$R_a = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_1} \tag{I.78}$$

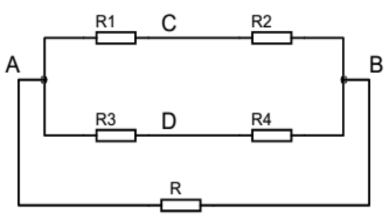
Exemple

Ce réseau représente les éléments passifs d'un pont de Wheatstone, dans le cas où la résistance interne de l'alimentation n'est pas négligeable. Calculer la résistance équivalente au réseau :

a) vu de A et B

b) vu de C et D

Application numérique: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 350\Omega$, $R = 50\Omega$



Solution

a) Trois branches relient **A** à **B** :

- une branche contenant deux dipôles de résistance R_1 et R_2, en série.
- une branche contenant deux autres dipôles de résistances R_3 et R_4, en série.
- une branche contenant un dipôle de résistance R.

La première branche a pour résistance équivalente $R_{12} = R_1 + R_2 = 700\Omega$

La deuxième branche a pour résistance équivalente les conductances s'ajoutent :

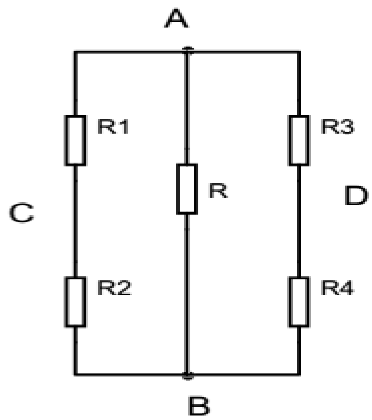
$$G_{AB} = G_{12} + G_{34} + G$$

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{34}} + \frac{1}{R} = \frac{1}{700} + \frac{1}{700} + \frac{1}{50}$$

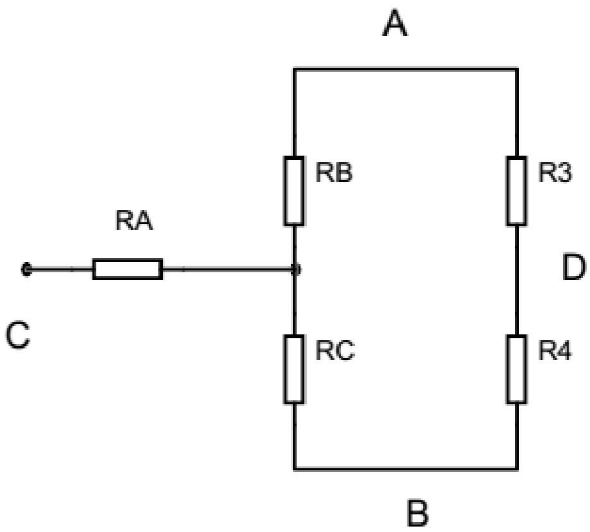
$$R_{AB} = 43{,}75\Omega$$

$$R_{AB} = 43,75 \quad \Omega$$

b) Pour aller de C à D on peut passer soit par A soit par B ; A et B sont reliés par une branche contenant un dipôle de résistance R On peut redessiner le réseau comme suit :



Pour calculer la résistance du réseau vu de C et D, on transforme un des triangles en étoile, par exemple ABC.



D'après le théorème de Kennelly.

$$R_C = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R} = 163{,}3\Omega$$

$$R_B = \frac{R R_2}{R_1 + R_2 + R} = 23{,}3\Omega$$

$$R_A = \frac{R_1 R}{R_1 + R_2 + R} = 23{,}3\Omega$$

On remplace les dipôles en série par leur résistance équivalente

$$R_{A3} = R_A + R_3 = 373{,}3\Omega$$

$$R_{B4} = R_B + R_4 = 373{,}3\Omega$$

$$G_{A3B4} = G_{A3} + G_{B4}$$

$$\frac{1}{R_{A3B4}} = \frac{1}{R_{A3}} + \frac{1}{R_{B4}}$$

$$R_{A3B4} = 186{,}7\Omega$$

Et on applique la loi d'association en série.

$$R_{CD} = R_C + R_{A3B4} = 350\Omega$$

11.Transfert maximal de puissance

Si on considère un circuit contenant des sources et des éléments passifs (des impédances) ; on peut la représentée par une source de tension qui est le générateur de Thevenin et une résistance ou impédance de Thevenin comme le montre la figure ci-dessous.

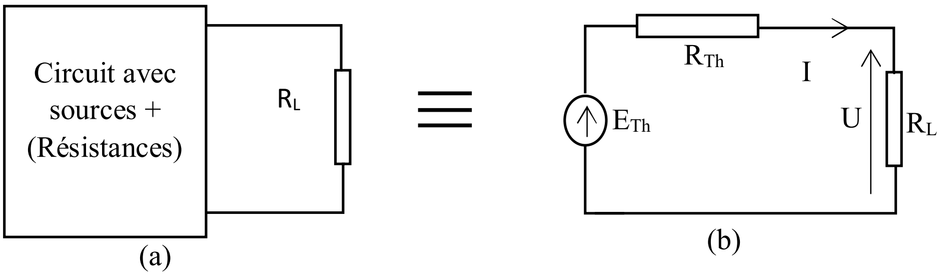


Figure I.20. Equivalence Thevenin

Pour calculer la condition pour laquelle il y'aura un transfert maximal de puissance pour le circuit Figure (a) on utilise son équivalent de Thevenin ; alors le courant absorbé par la charge sera :

$$I = \frac{E_{th}}{R_{Th}+R_L} \tag{I.79}$$

Donc la puissance consommée par la charge est :

$$U = R_L I \tag{I.80}$$

$$P = U.I = R_L I^2 = R_L \left(\frac{E_{th}}{R_{Th}+R_L}\right)^2 \tag{I.81}$$

Pour calculer quand la puissance maximale est transférée il faut calculer le maxima de la puissance C.-à-d. :

$$\frac{dP}{dR_L} = \left(\frac{E_{th}}{R_{Th}+R_L}\right)^2 + 2R_L\left(\frac{E_{th}}{R_{Th}+R_L}\right)\left(\frac{-E_{th}}{(R_{Th}+R_L)^2}\right) \tag{I.82}$$

$$\frac{dP}{dR_L} = \left(\frac{{E_{th}}^2(R_{Th}+R_L)-2R_L{E_{th}}^2}{(R_{Th}+R_L)^3}\right) \tag{I.83}$$

$$\frac{dP}{dR_L} = 0 \Rightarrow \left(\frac{{E_{th}}^2(R_{Th}+R_L)-2R_L{E_{th}}^2}{(R_{Th}+R_L)^3}\right) = 0 \Rightarrow$$

$${E_{th}}^2(R_{Th}+R_L)-2R_L{E_{th}}^2 = {E_{th}}^2(R_{Th}-R_L) = 0 \Rightarrow$$

$$R_{Th} - R_L = 0 \Rightarrow R_{Th} = R_L \tag{I.84}$$

On peut conclure qu'il y'aura un transfert maximal de puissance à la charge lorsque

$R_{Th} = R_L$.

Dans ce cas on aura

$$P_{max} = R_L \left(\frac{E_{th}}{R_{Th}+R_L}\right)^2 = R_L \left(\frac{E_{th}}{R_L+R_L}\right)^2 = R_L \left(\frac{E_{th}}{2R_L}\right)^2 = \frac{{E_{th}}^2}{4R_L} \qquad (I.85)$$

$$\Longrightarrow P_{max} = \frac{{E_{th}}^2}{4R_L} \qquad (I.86)$$