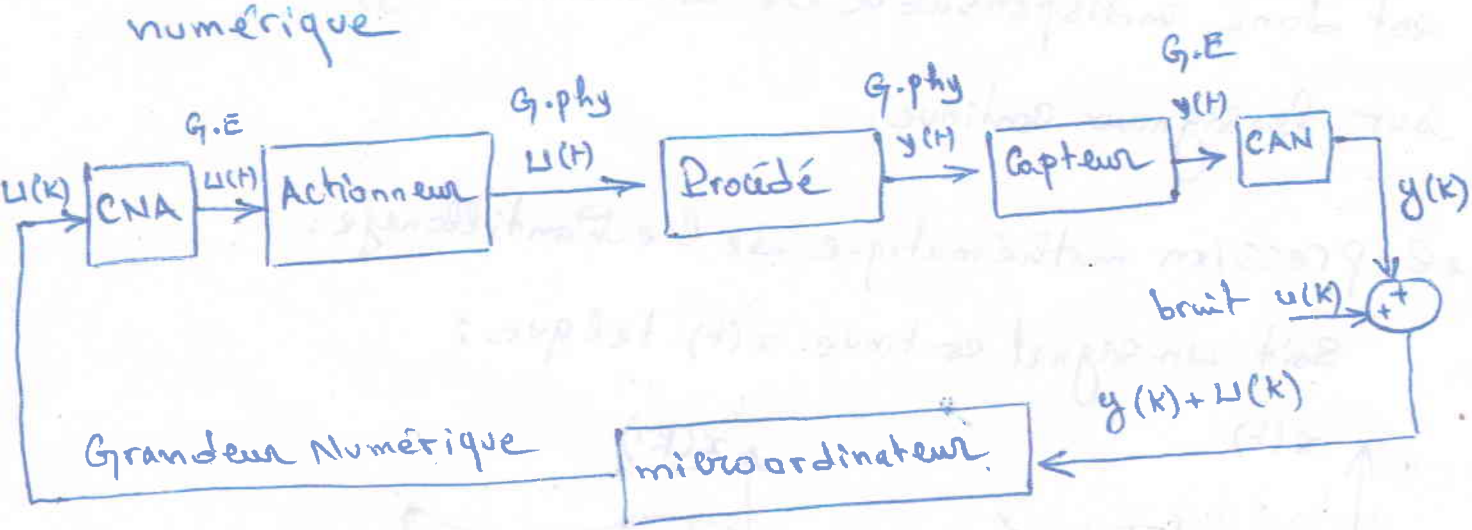
Chapitre 01 :

La génération de l'utilisation des calculateurs a permit leur exploitation comme structure de commande numérique pour les système dynamiques asservis et ceci par le biais de l'implantation d'algorithmes gérés par le calculateur remplaçant ainsi avantageusement les régulateurs analogiques de commande.

L'exploitation des calculateurs pour la commande des processus est plus flexible et permet d'obtenir des performances meilleures que celles obtenues par des commandes analogique.

(*) La figure suivante représente la structure de la commande numérique

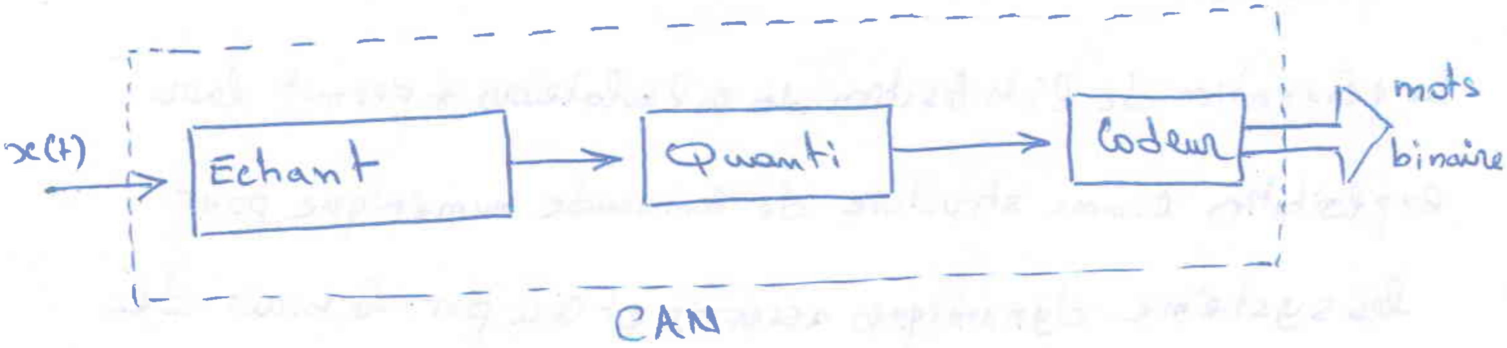


- le CAN est constitué de 3 étape :

1- Echantillonneur

2- quantificateur

3- Codeur



* Echantillonage:

Echantillonner un signal analogique signifie le remplacer par une Suite de ses valeur prisent a des instants bien définis,

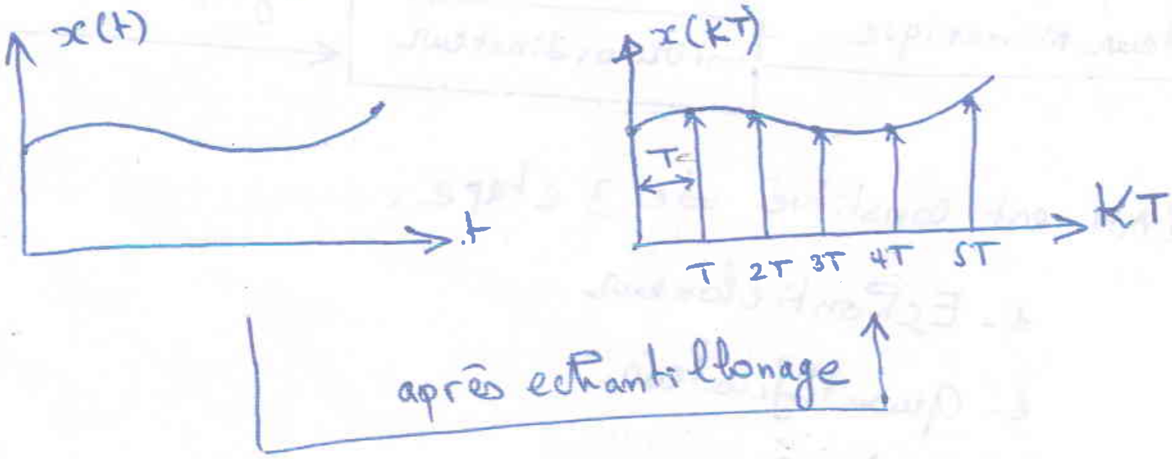
l'echantillonage joue un rôle central en réglage numérique de fait que l'ordinateur traite des nombres plutôt de grandeurs analogique.

On dit alors qu'on échantillone à une fréquence $fe = \frac{1}{T}$

est donc indispensable de considerer l'effet de l'echantillonage sur les signaux continue.

*expression mathématique de l'echantillonage:

Soit un signal continue $x(t)$ telque:



(2)

l'échantillonage est réalisé par une suite d'impulsion infiniment brève appelé fonction peigne de dirac

telque $\delta_T(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$

$\delta_{T_e}(t)$ est periodique $\Rightarrow$ elle admet un developement en serie de fourier de la forme suivante :

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \, e^{jn\omega_0 t}$$

avec $\begin{cases} \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \, fe \\ C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) \, e^{-jn\omega_0 t} \, dt \end{cases}$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) \, e^{-jn\omega_0 t} \, dt = \frac{1}{T} \, e^{-j\omega_0(0)n} = \frac{1}{T}$$

$C_n = \frac{1}{T}$, $\boxed{\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_e t}}$ *

Un signal échantilloné $\hat{x}(t)$ est représenté par :

$$\hat{x}(t) = x(t) \cdot \delta_T(t) = x(t) \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT_e)$$

$$\boxed{\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) \cdot \delta(t-kT)}$$

T : periode de l'échantillonage , $fe = \frac{1}{T}$: frequence de l'éch

* Spectre d'un signal échantillonnés :

On a :

$$\hat{x}(t) = x(t) \cdot \delta_T(t)$$

$$\hat{X}(f) = \mathcal{F}\{x(t) \cdot \delta_T(t)\}$$

$$= X(f) * \mathcal{F}\left\{\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{+jn\omega_0 t}\right\}$$

$$= X(f) * \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_0 t} \cdot e^{-j\omega t}\right) dt$$

$$= \frac{1}{T_e} X(f) * \sum_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jt(\omega - n\omega_0)} dt$$

$$= \frac{1}{T_e} X(f) * \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_e)$$

$$\hat{X}(f) = \frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{+\infty} X(f) * \delta(f - nf_e)$$

$$\boxed{\hat{X}(f) = \frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{+\infty} X(f - nf_e)} \quad \text{avec } \frac{1}{T} = f_e$$

$$\hat{X}(f) = \frac{1}{T}\left[\cdots\cdots X(f+f_e) + X(f) + X(f-f_e)\cdots\cdots\right]$$

* Critère d'échantillonage (Théorème de shannon)

Soit $x(t)$ un signal à spectre limité :

$X(f) = 0$ pour $|f| > f_{max}$ alors $x(t)$ est complètement déterminé de ces échantillons $n = 0, \pm 1, \ldots$

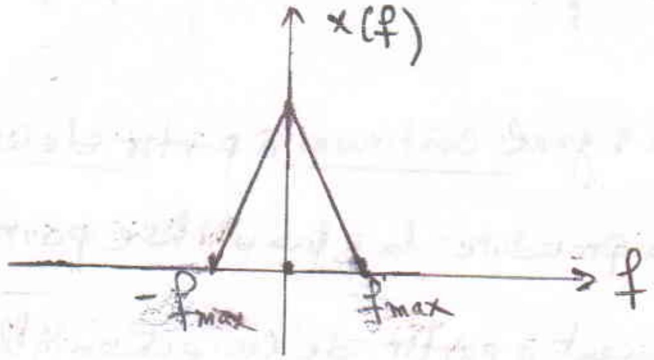
* si $f_e \geq 2 f_{max}$ avec $f_e = \frac{1}{T}$ frequence d'echantillonage

Un repliment du spectre se produit si la fréquence d'éch $f_e < 2 f_{max}$

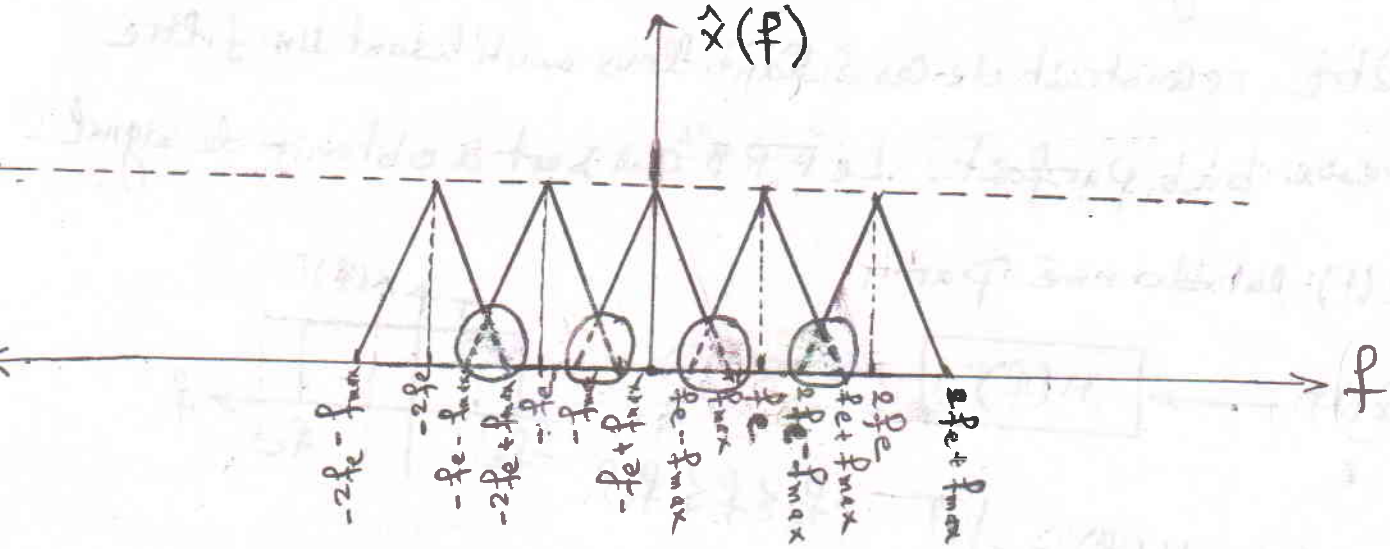
Exemple

Soit un signal $x(t)$ de spectre $x(f)$ tel que :

$x(f) = 0$ Pour $|f| > f_{max}$

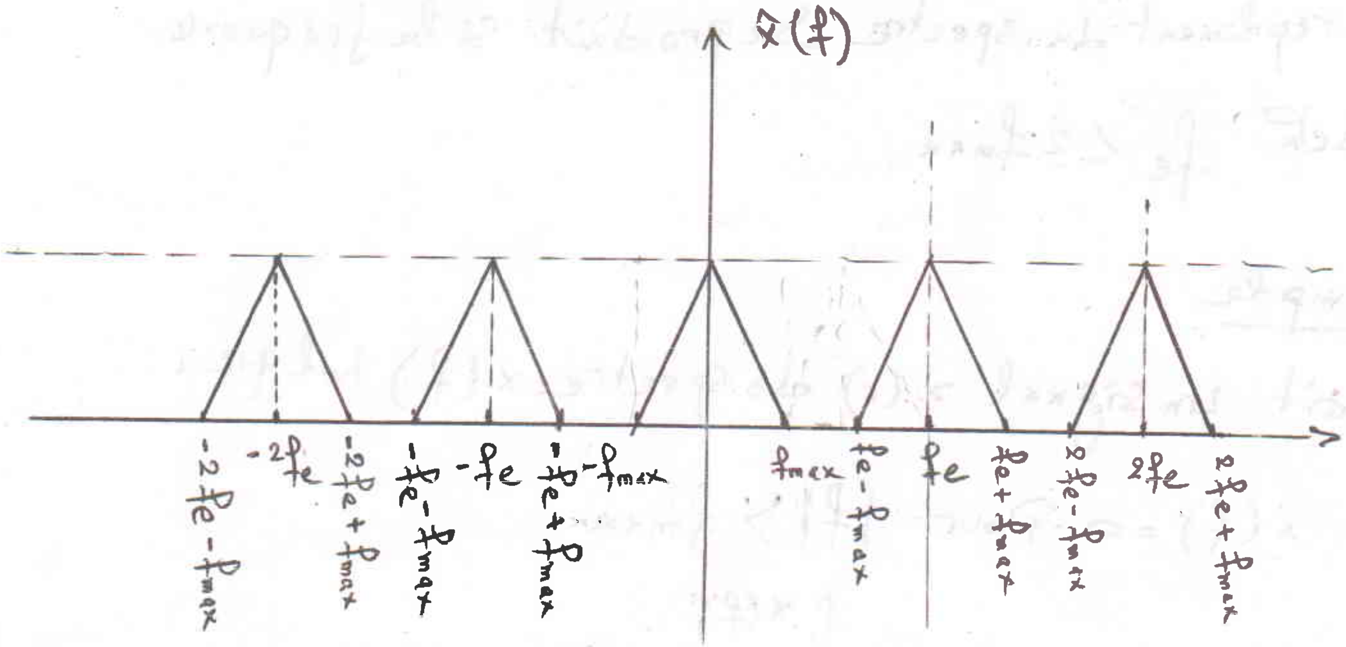


si $f_e < 2 f_{max}$ $(f_e = 1{,}5\, f_{max})$



On remarque qu'il y'a un chevauchement de partie de $\hat{x}(f)$ alors on ne peut ~~on ne peut~~ pas extraire le signal $x(t)$ de ces echantillon parceque le spectre du signal échantilloné est replié sur lui même.

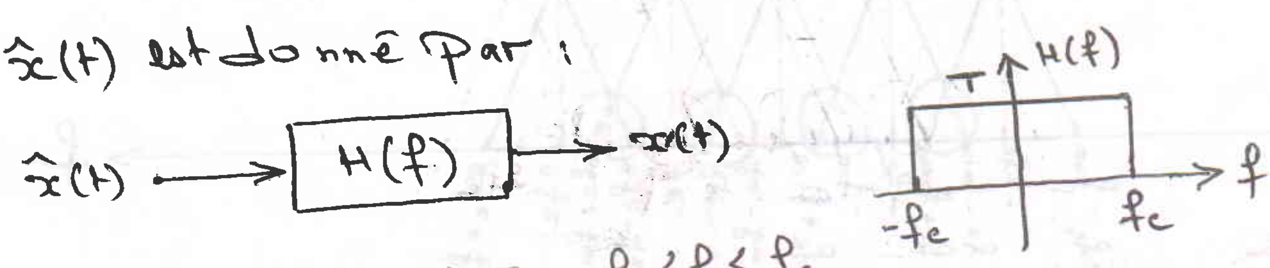
si $f_e \geq 2 f_{max}$ $(f_e = 3 f_{max})$



* reconstruction d'1 signal continue à partir de ces échantillons :

l'interpolation est la procedure la plus utilisé pour reconstruire une fonction exactement à partir de ces échantillons

Pour un signal à bande limité : le signal contenu peut être reconstruit de ces échantillons en utilisant un filtre passe bas parfait. Le FPB qui sert à obtenir le signal $\hat{x}(t)$ est donné par :



$$\text{avec } H(f) = \begin{cases} T & -f_c \leq f \leq f_c \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f)\, e^{j\omega t}\, df \quad , \quad x(t) = \hat{x}(t) * h(t)$$

$$h(t) = \int_{-f_c}^{f_c} T\, e^{2\pi j f t}\, df \quad , \quad h(t) = 2T f_c \operatorname{sinc}(2 f_c t)$$

(6)

$$x(t) = \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\,\delta(t-kT)\right] * h(t)$$

$$x(t) = 2 f_c T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\left[\delta(t-kT) * \text{sinc}(2\pi f_c t)\right]$$

$$\boxed{x(t) = 2 f_c T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\,\text{sinc}(2\pi f_c (t-kT))}$$

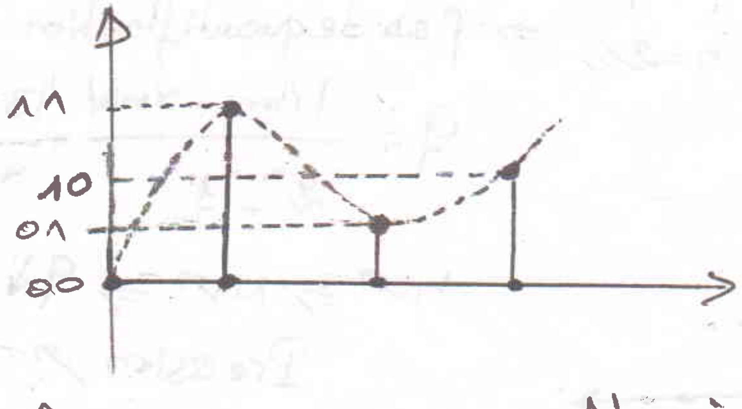
<u>Remarque</u>: en generale un filtre passe bas idéal il n'est pas facil a obtenir physiquement alors ont peut utilisē un Bloqueur

<u>Quantification</u>: Détermine des valeurs definie sur les combinaison numérique.

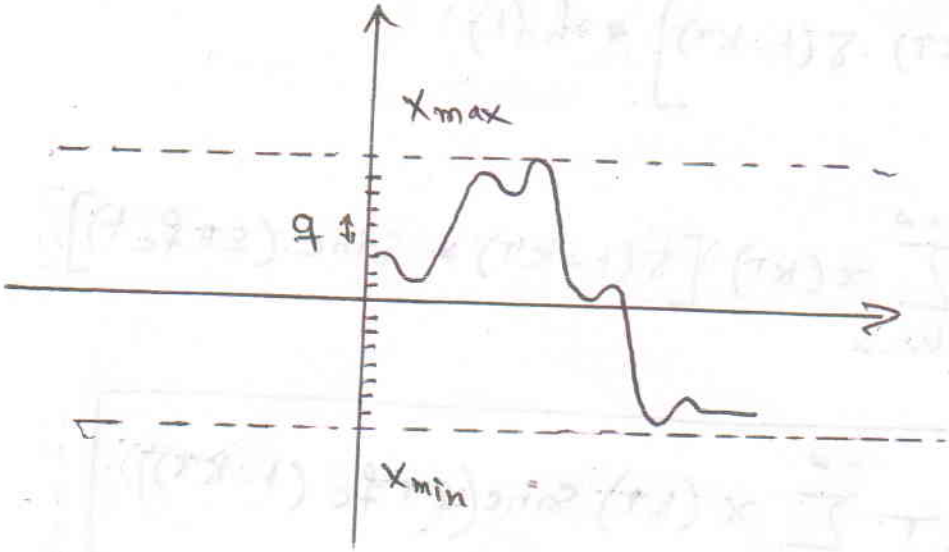
<u>Exemple</u>:

⇒ 2bits ⇒ 2^2 combinaisson

⇒



Quantification ⇒ Erreur va être introduite



[Xmin, Xmax] Correspond à un nombre infinie de niveaux

Si n est la longeur du mot binaire (bits) et si N est le nombre de combinaison binaire $N = 2^n$

Cas réele $N = \infty$ physiquement irealisable (mémoire) ⇒

La solution de ce probléme est de prendre seulement quelque valeurs de [Xmin, Xmax] ⇒ Quantifier l'axe des amplitudes.

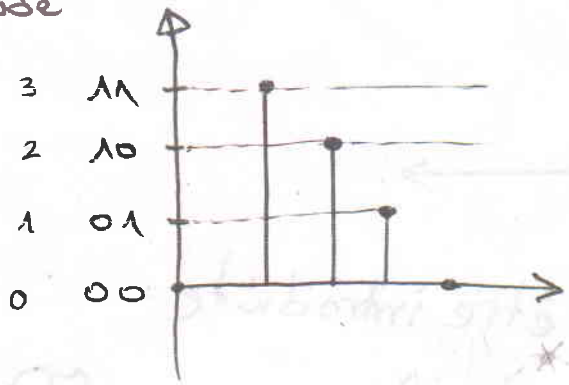
donc l'axe des amplitudes est devisé en 2^n niveaux

<u>Exemple</u> : Quantifier $x(t)$ sur 4 niveaux

longeur du mot codé

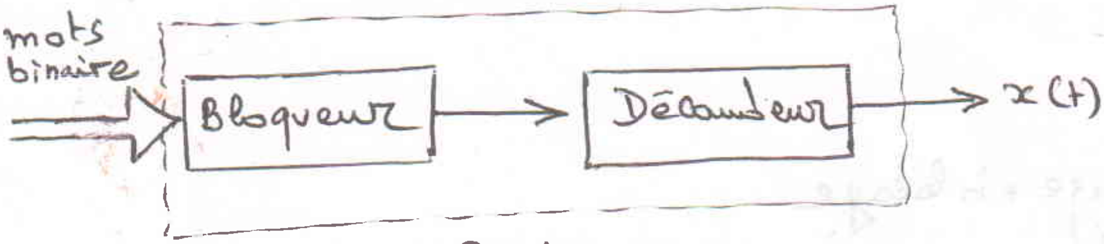
$\underbrace{2^{n}}_{} = \underset{N}{4} \Rightarrow \begin{cases} N = 4 \\ n = 2 \end{cases}$ ⇒ pas de quantification

$$q = \frac{|X_{max} - X_{min}|}{2^n - 1} = \frac{|3-0|}{4-1} = 1$$



$n \nearrow \Rightarrow N \nearrow \Rightarrow q \searrow \Rightarrow$ Précision $\nearrow$

Le CNA est représenté par le shéma suivant



Bloqueur = L'opération de Blocage consiste à reconstruire un signal analogique à partir d'un signal échantiollné

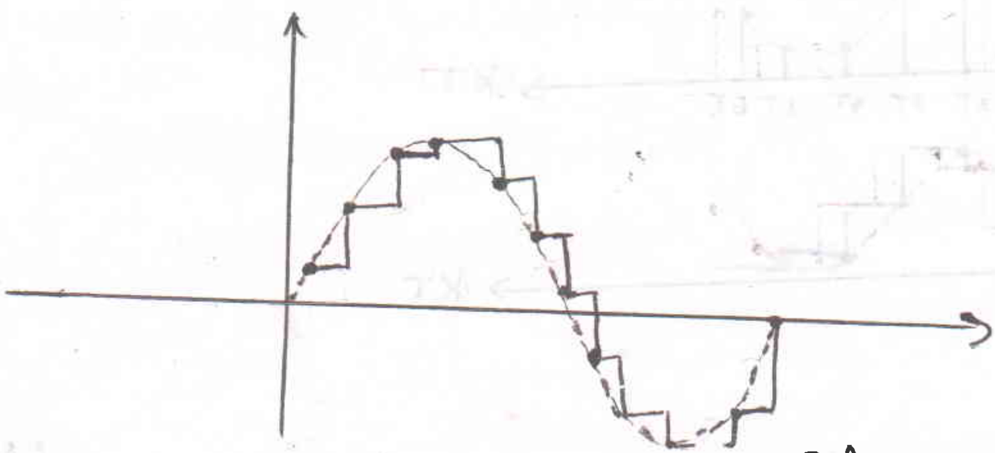
Reconstruction ≠ Echantillonnage

→ il existe plusieur types de bloqueur
- Bloqueur d'ordre 0
- " " 1
- " " 2

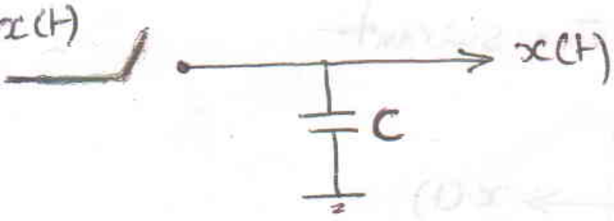
- l'avantage d'1 bloqueur d'odre 0 est sa simplicité de réallisation

- l'inconvénient n'est pas précis

si l'ordre ↗ ⇒ la précision ↗ mais la complexité ↗



Bloqueur d'ordre "0"

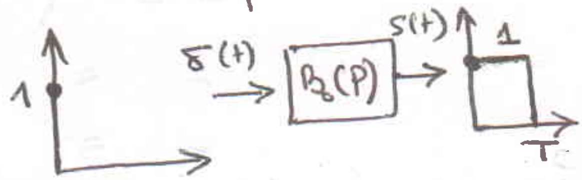


Echantillonage + bloqage

Récapitulatif : L'echantillonage consiste a multiplier un signal échantilloner a un signal horloge (suit d'impulsion). La periode d'echantillonage (periode horloge) est calculé celon le theoreme de shannon $fe \geq 2 f_{max}$.

<u>Remarque</u> :

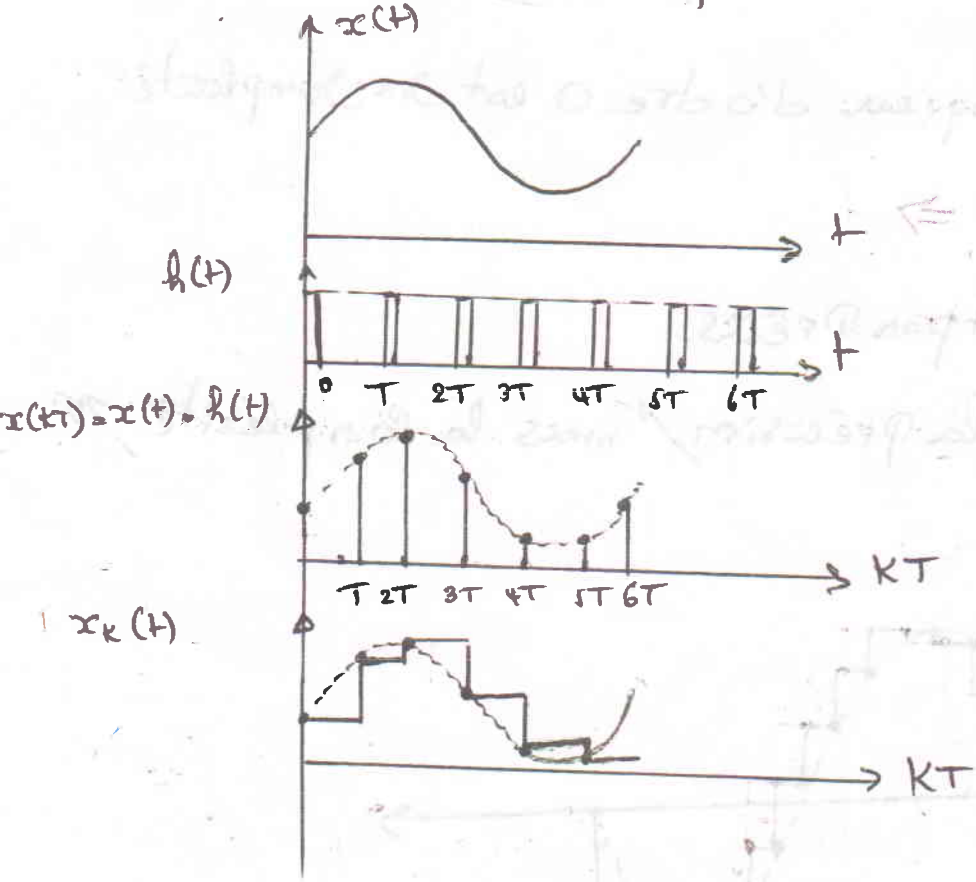
- le bloqueur d'ordre "0" a une fonction de transfert determine par : $B_0(P) = \frac{1 - e^{-TP}}{P}$ ⟹



$s(t) = u(t) - u(t-T)$

$S(P) = \frac{1}{P} - \frac{1}{P} e^{-TP}$

$S(P) = \frac{1 - e^{-TP}}{P}$



Chapitre 02 : Transformée en z et analyse des systèmes échantillonnés

Discrétisation d'1 equation differentiel :

transformer eq diff ordinaire $\rightsquigarrow$ = Eq diff discrète "
= Eq au différence "

Exemple : $\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$

Soit $t_k = KT$ T : periode d'echantillonage

approximation $\dot{y}(t) \approx \dfrac{y[(K+1)T] - y[(KT)]}{T}$

remplacer l'approximation dans l'eq diff $\Rightarrow$

$y(k+1) + (Ta_0 - 1)\, y(k) = b_0 T\, u(k)$ eq aux difference

si $u(k)$ séquence de valeur $\Rightarrow$ $y(k)$ séquence de valeurs

$$\{u(0), u(1), ---, u(N)\} \longrightarrow \boxed{MO} \longrightarrow \{y(0), y(1), ----, y(N)\}$$

syst discrét

La dynamique de systeme est en fonction de la period e d'echantionnage
le systeme est dit système echantillonné (discrét) du 1er ordre

* La forme generale d'1 système discrét du système de 1er ordre est :

$$\boxed{y(k+1) + a_0 y(k) = b_0 u(k)}$$

Système discrét du 2e ordre :

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_2 y(t) = b_0 u(t)$$

$$\dot{y}(t) \simeq \frac{y(k+1) - y(k)}{T}, \quad \ddot{y}(t) = \frac{\dot{y}(k+1) - \dot{y}(k)}{T}$$

$$\ddot{y}(t) \simeq \frac{\frac{y(k+2)-y(k+1)}{T} - \frac{y(k+1)-y(k)}{T}}{T}$$

$$\ddot{y}(t) \simeq \frac{y(k+2) - 2y(k+1) + y(k)}{T^2}$$

remplacer l'approximation dans l'eq diff $\Rightarrow$

$$\frac{y(k+2) - 2y(k+1)}{T^2} + a_1 \frac{y(k+1) - y(k)}{T} + a_2\, y(k) = b_0\, u(k)$$

$$y(k+2) + \underbrace{(a_1 T - 2)}_{a_1} y(k+1) + \underbrace{(a_0 T^2 - a_1 T + 1)}_{a_2} y(k) = b_0 T\, u(k)$$

$$\boxed{y(k+2) + a_1\, y(k+1) + a_2\, y(k) = \cancel{b_0}\, u(k)}$$

Eq aux différence du 2e ordre

Système discrét élementaire :

1 - syst discrét Constant

$$u(k) \longrightarrow \boxed{a} \longrightarrow y(k)$$

2 - retard

$$y(k) \longrightarrow \boxed{z^{-1}} \longrightarrow y(k-1)$$

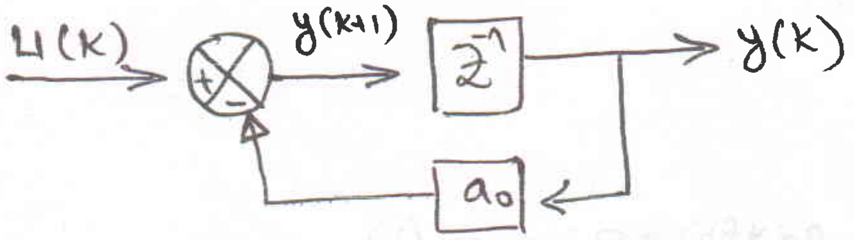
3 - somateur

$$u_1(k),\ u_2(k) \longrightarrow \bigcirc\!\!\!\!+ \longrightarrow u_1(k) + u_2(k)$$

Simulation d'1 syst discrêt :

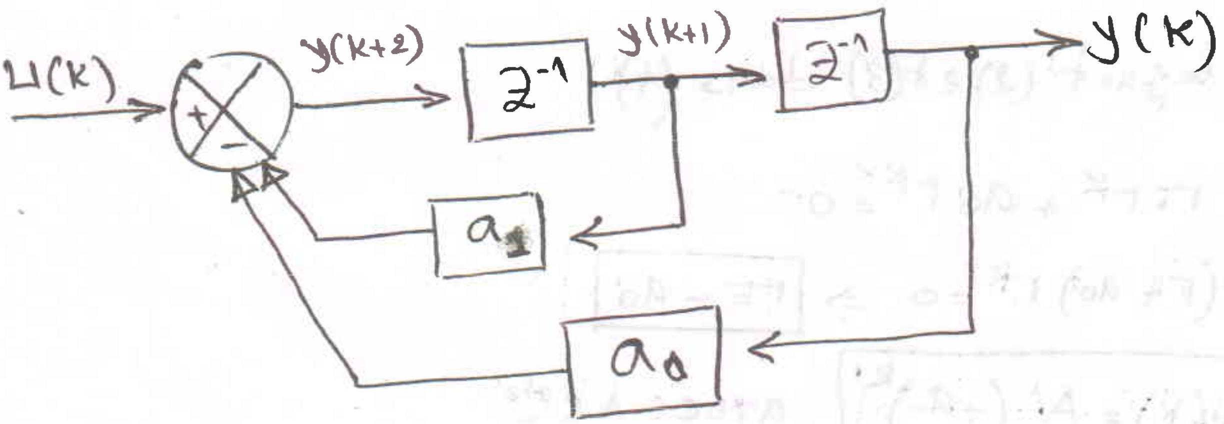
1 - syst 1er ordre :

$$y(k+1) + a_0\, y(k) = u(k)$$



2 - syst 2e ordre :

$$y(k+2) + a_1\, y(k+1) + a_0\, y(k) = u(k)$$



Représentation générale d'1 syst discrêt d'ordre n :

- 1er ordre : $y(k+1) + a_0\, y(k) = b_0\, u(k) + b_1\, u(k+1)$
- 2e ordre : $y(k+2) + a_0\, y(k+1) + a_1\, y(k) = b_0\, u(k) + b_1\, u(k+1) + b_2\, u(k+2)$
- Ordre n : $\sum_{i=0}^{n} a_i\, y(k+i) = \sum_{i=0}^{m} b_i\, u(k+i)$

$$\begin{cases} m \leq n \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

Analyse des equations aux différence :

① Eq de 1ère ordre :

$y(k+1) + a_0 y(k) = u(k)$

Resolution :

Eq homgène : $y(k+1) + a_0 y(k) = 0$ ------ (1)

Choisissant la solution de la forme

$y(k) = r^k \longrightarrow e^t$ —— (2)

$y(k+1) = r^{k+1} = r \cdot r^k$ ---- (3)

remplaçant (2) et (3) dans (1)

$r \cdot r^k + a_0 r^k = 0$

$(r + a_0) r^k = 0 \Rightarrow \boxed{r = -a_0}$

$\Rightarrow \boxed{y_H(k) = A\,(-a_0)^k}$ avec A cste

② Eq de 2e ordre :

$y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = u(k)$

$y(k) = r^k$; $y(k+1) = r \cdot r^k$; $y(k+2) = r^2 r^k$

$r^2 r^k + a_1 r r^k + a_0 r^k = 0$

$(r^2 + a_1 r + a_0) r^k = 0 \Rightarrow r^2 + a_1 r + a_0 = 0$

14 Eq du 2e ordre

soient r_1 et r_2 des solutions

$$\boxed{y_H(k) = A_1 (r_1)^k + A_2 (r_2)^k}$$ avec $|r| < 1$

et A_1, A_2 des c^{ste}

si $r_1 = r_2$ poles double

$y_H(k) = (A_1 + k A_2) r_1^k$ A_1 et A_2 c^{ste}

3 Eq d'ordre n :

$y(k+n) + a_{n-1}(k+n-1) + \dots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = u(k)$

Solution de l'eq homogène $y(k) = r^k$

$r^n + a_{n-1} r^{n-1} + a_1 r + a_0 = 0$

$$\boxed{y_H(k) = \sum_{i=1}^{n} A_i (r_i)^k}$$

si $r_1 = r_2 = r_3$, $r_4 = r_5 = \dots r_n$

$y_H(k) = (A_1 + A_2 k + A_3 k^2) r_1^k + \sum_{i=4}^{n} A_i (r_i)^k$

stabilité des systèmes discrets :

Pour qu'un syst discrets soit stable, il faut que les solutions de l'eq aux differences verifier les conditions suivantes :

$|r_i| < 1$: stable

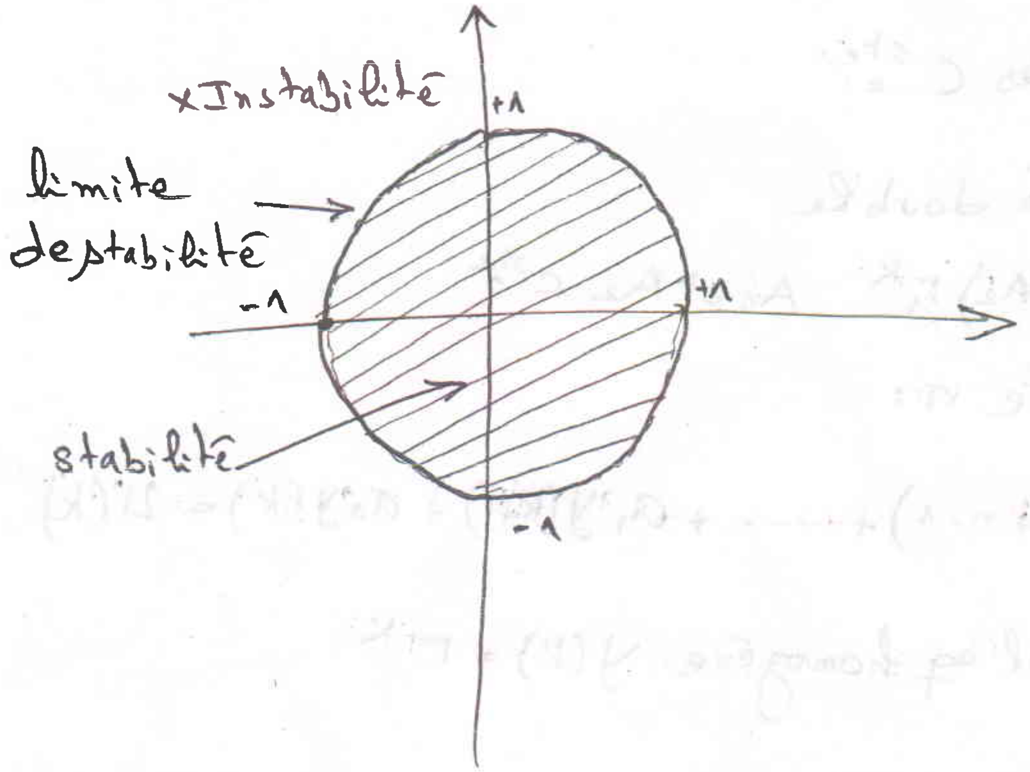
$|r_i| = 1$: limite de stabilité

si $\exists r_i$ tq $|r_i| > 1$: Instabilité

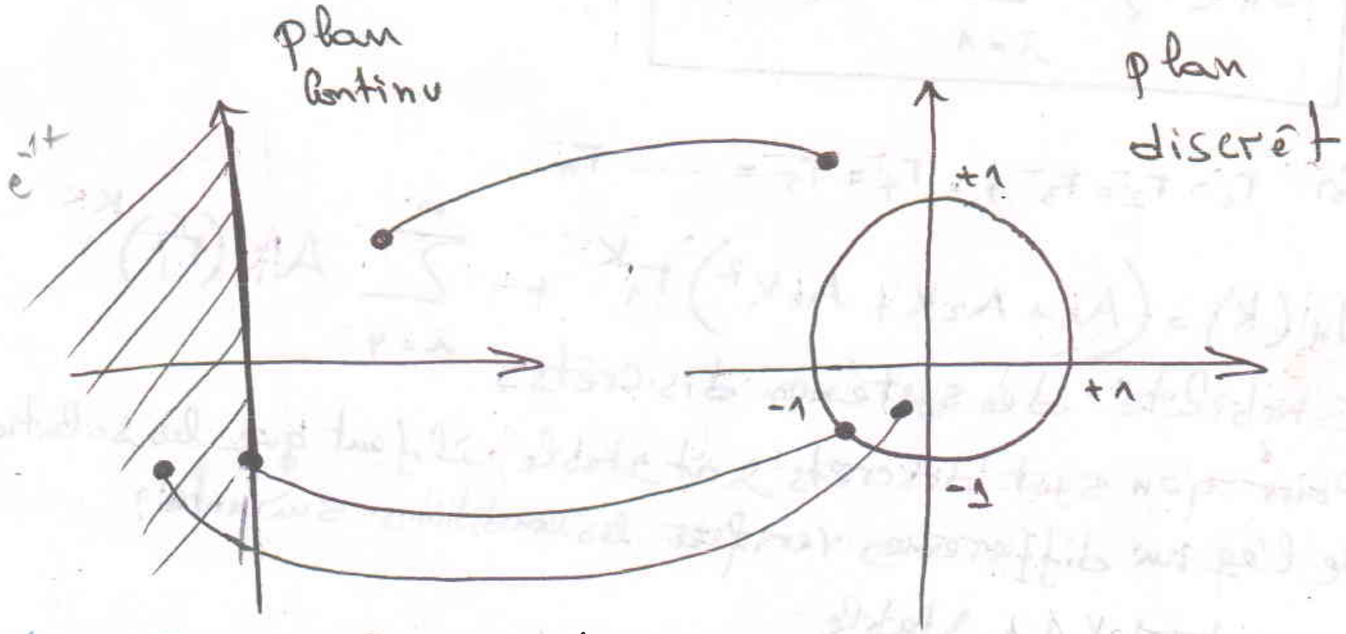
$y(k) = A . |r_i|^k$ $\lim_{k \to \infty} y(k) = \lim_{k \to \infty} A |r_i|^k = \begin{cases} 0 \text{ si } |r_i| < 1 \text{ stable} \\ \infty \text{ si } |r_i| > 1 \text{ instabilité} \end{cases}$

Pour qu'un système discrêt soit stable il faut que ses racine soient à l'interieure du cercle (Disc) unitaire

$|r_i| < 1$



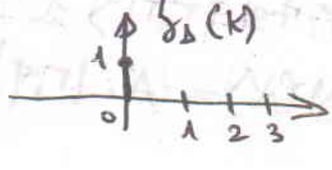
Donc en comparant les système continues avec les système discrêt, nous obtenons :



(*) Signaux Discrêts

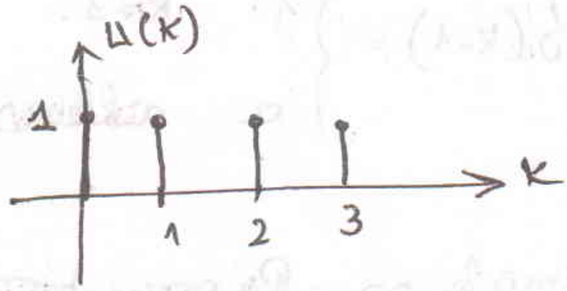
(i) Impulsion de Krounecker

$$\gamma_\Delta(k) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



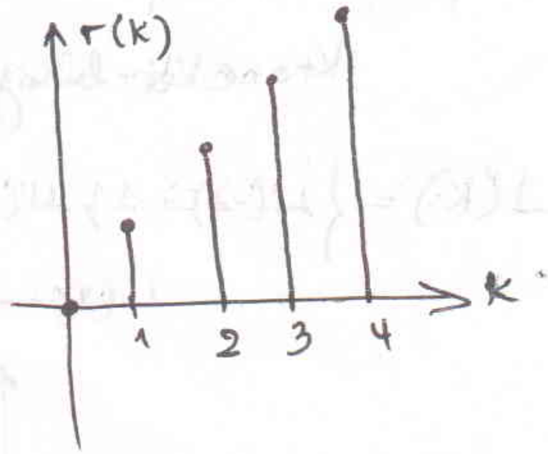
② Echelon unitaire

$$u(k) = \begin{cases} 1 & k = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



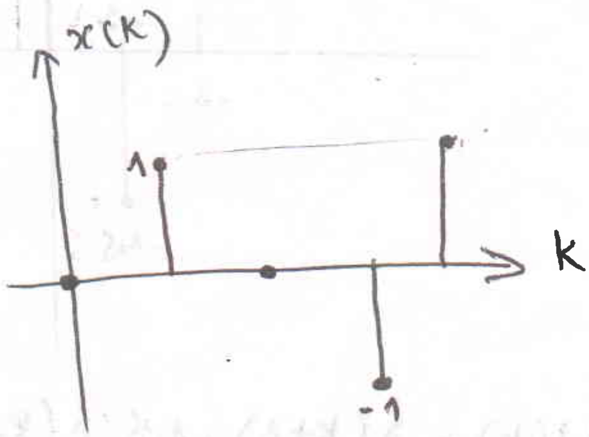
③ Rampe unitaire

$$r(k) = \begin{cases} k & k = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



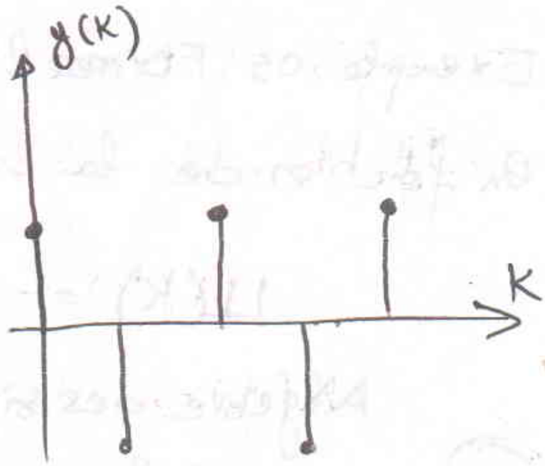
④ Suite sinusoïdale

$$x(k) = \begin{cases} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right), & k = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



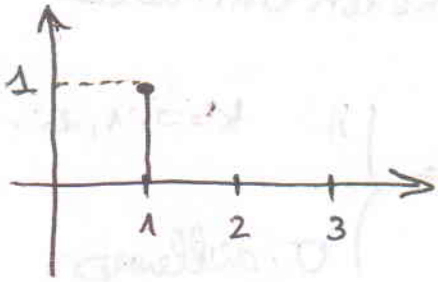
⑤ Suite alternée

$$y(k) = \begin{cases} (-1)^k & k = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



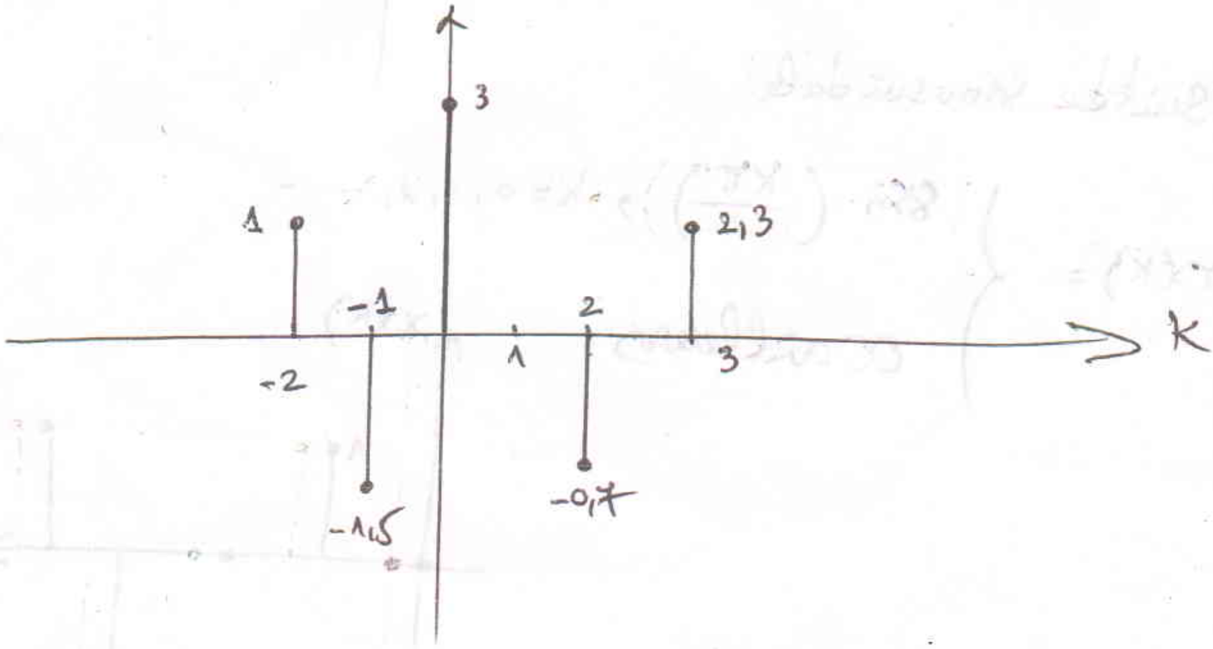
Exemple 01

$$\delta(k-1) = \begin{cases} 1 & k=1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Exemple 02 : Representer au moyen de la suite de Kroneker le signal discrét suivant

$$u(k) = \{u(-2) = 1,\ u(-1) = -1{,}5,\ u(0) = 3$$
$$u(2) = -0{,}7,\ u(3) = 2{,}3\}$$



$$u(k) = \delta(k+2) - 1{,}5\,\delta(k+1) + 3\,\delta(k) - 0{,}7\,\delta(k-2) + 2{,}3\,\delta(k-3)$$

Exemple 03 Ecrire l'expression de l'echelon unitaire en fonction de la suite de Kroneker

$$u(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(k-n)$$

Algebre des signaux discréts :

* Somme/différence

$$\{u(k)\} = \{u_1(k)\} \pm \{u_2(k)\}$$

avec les éléments $U(K) = U_1(K) \pm U_2(K)$

* Multiplication par un réel :

$$\{U(K)\} = \alpha\{U_1(K)\} \Rightarrow U(K) = \alpha U_1(t) \quad \alpha = C^{st}$$

<u>Exemple</u> : trouver $U_1(K) + U_2(K)$

$U_1(K)$ Echelon unitaire

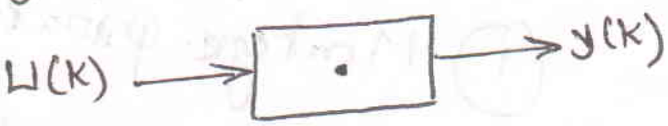
$U_2(K)$ Suite alternée

$$U(K) = U_1(K) + U_2(K) = \begin{cases} 2 & K : \text{paire} \\ 0 & K : \text{impaire} \end{cases}$$

Representation des syst discret au moyen de la convolution

<u>Exemple</u> : soit le syst discrét suivant

$$y(K) + a_1 y(K-1) = U(K) \qquad y(-1) = 0 \;,\; K = 0, 1, 2, \dots$$



$$y(K) = -a_1 y(K-1) + U(K)$$

$K=0$: $y(0) = -a_1 y(-1) + U(0) = U(0)$

$K=1$: $y(1) = -a_1 y(0) + U(1) = U(1) - a_1 U(0)$

$K=2$: $y(2) = -a_1 y(1) + U(2) = -a_1\left(-a_1 U(0) + U(1)\right) + U(2)$

$$= -a_1^2 U(0) - a_1 U(1) + U(2)$$

$K=3$: $y(3) = -a_1^3 U(0) - a_1^2 U(1) - a_1 U(2) + U(3)$

$\vdots$

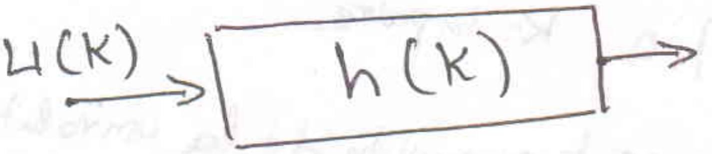
$K=k$: $y(K) = (-a_1)^K U(0) + \dots + a_1^2 U(K-2) - a_1 U(K-1) + U(K)$

$$\boxed{y(K) = U(K) + \sum_{i=1}^{K} (-a_1)^i U(K-i)} \qquad (19)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y(K) = \sum_{i=0}^{K} (-a_1)^i \, u(k-i)}$$

Posser : $(-a_1)^i = h(i)$

$$y(K) = \sum_{i=0}^{K} h(i)\, u(k-i) \Rightarrow$$ produit de convolution discret

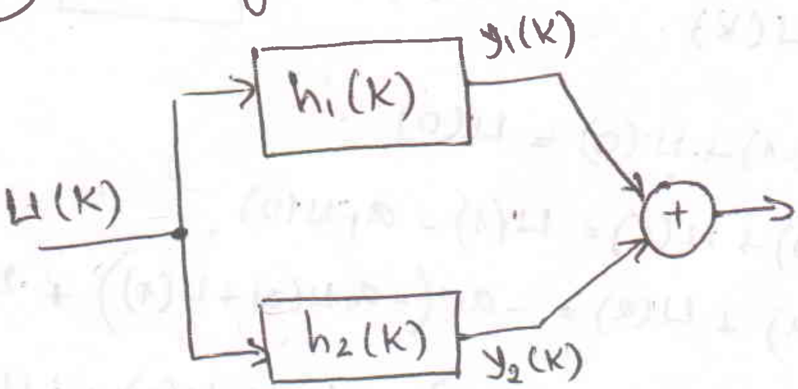


$$y(K) = \sum_{i=0}^{K} h(i)\, u(k-i)$$

$$y(K) = u(K) * h(K)$$

Interconnexion de SD :

① Montage parallèle



$$y(K) = y_1(K) + y_2(K)$$

$$y(K) = \sum_{i=0}^{K} h_1(i)\, u(k-i) + \sum_{i=0}^{K} h_2(i)\, u(k-i)$$

$$y(K) = \sum_{i=0}^{K} \underbrace{\left[h_1(i) + h_2(i)\right]}_{h(K)} u(k-i)$$

$$\boxed{h(K) = h_1(K) + h_2(K)}$$

② Montage en cascade

$$\xrightarrow{u(k)} \boxed{h_1(k)} \longrightarrow \boxed{h_2(k)} \longrightarrow y(k)$$

$$\boxed{h(k) = h_1(k) * h_2(k)}$$

Transformée en Z :

Introduction : un signal discrêt dans le temps est obtenue par opération d'échantiollnage sur un signal continue. Le but de descritisation est d'obtenir des signaux qui peuvent être utilisé par un µ.O pour cette raison la transformée de Laplace ne peut pas être appliquée directement pour ces signaux.

Une alternatif à T.L est utilisé appelé la Transformée en Z. La T.Z est considéré comme La T.L des signaux discrets.

La T.Z d'une séquence de valeur $x(KT)$ ou $x(K)$ avec $K \geq 0$ est définie par l'equation suivante :

$$X(z) = Z\{x(K)\} = \sum_{K=0}^{\infty} x(K) z^{-K} = \sum_{K=0}^{\infty} x(KT) \; z^{-K}$$

Z : variable complexe

Preuve :

$$\underset{T.L}{X(s) = \int_0^{\infty} x(t)\, e^{-pt}\, dt} \longrightarrow \underset{T.Z}{X(?) = \sum_{K=0}^{\infty} x(KT)\, e^{-SKT}}$$

$$= \sum_{K=0}^{\infty} x(K) \underbrace{\left(e^{ST}\right)}_{z}^{-K}$$

$$\boxed{X(z) = \sum_{K=0}^{\infty} x(K)\, z^{-K}}$$

$$X(z) = x(0) + x(1) z^{-1} + x(2) z^{-2} + x(3) z^{-3} + \cdots + x(K) z^{-K}$$

z^{-K} : Dans cette serie indique la position dans le temps a laquelle l'amplitude $x(KT)$ parvient.

Pôles et Zéros : dans le plan $X(z)$ peut avoir une forme rationelle.

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}$$

$$X(z) = \frac{b_0 (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_m)}{(z - P_1)(z - P_2) \cdots (z - P_m)}$$

z_i : zéros de $X(z)$

P_i : pôles de $X(z)$

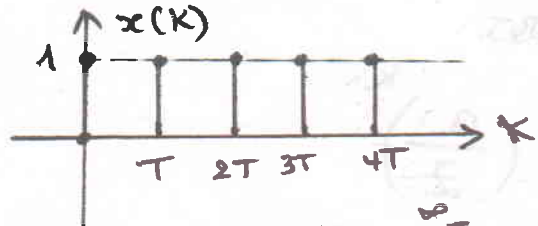
Exemple : $X(z) = \dfrac{z^2 + 0{,}57 z}{z^2 + 3z + 2} = \dfrac{z^2 + 0{,}57 z}{(z+1)(z+2)}$

Zeros $\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = -0{,}57 \end{cases}$ pôles $\begin{cases} P_1 = -1 \\ P_2 = -2 \end{cases}$

La T.Z des signaux élementaires :

1 - Echelon :

$$x(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x(K) = \begin{cases} 1 & K = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & K < 0 \end{cases}$$



$$X(z) = \sum_{K=0}^{\infty} x(K) z^{-K} = \sum_{K=0}^{\infty} 1 \, z^{-K}$$

$$X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots + z^{-K}$$

$$X_n(z) = \frac{1 - z^{-n}}{1 - z^{-1}}$$

Convergence : $|z^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| \geq 1$

$$X(z) = \lim_{n \to \infty} X_n(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

$$\boxed{X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z}{z-1}}$$

<u>Rampe:</u>

$$x(k) = \begin{cases} kT & k > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kT z^{-k} = T \sum_{k=0}^{\infty} k z^{-k}$$

$$X(z) = T \left(z^{-1} + 2 z^{-2} + 3 z^{-3} + \cdots + k z^{-k} \right)$$

$$X(z) = T \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

Fonction polynomiale a^k:

$$x(k) = \begin{cases} a^k & k \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^k$$

Convergence $\left|\frac{a}{z}\right| < 1 \Rightarrow |z| > |a|$ $\quad |a|$ rayon de convergence

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a}$$

Fonction exponentiel :

$$x(k) = e^{-akT}$$

$$x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-aT} z^{-1}\right)^{k}$$

Convergence $\left| e^{-aT} z^{-1} \right| < 1$

$$\Rightarrow \quad |z| > \left| e^{-aT} \right|$$

$$x(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

* table des T.Z :

$x(s)$	$x(t)$	$x(k)$ ou $x(kT)$	$x(z)$
–	–	$\delta(k) \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$x(z) = 1$
–	–	$\delta(k-n) = \begin{cases} 1 & k=n \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	z^{-n}
$\frac{1}{s}$	$u(t)$	$u(k)$	$\frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}} = \frac{1}{1-e^{-aT} z^{-1}}$

$\frac{1}{s^2}$	t	kT	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-aT}$	$1-e^{-akT}$	$\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}$
$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin(\omega t)$	$\sin(\omega kT)$	$\frac{z^{-1}\sin(\omega T)}{1-2z^{-1}\cos(\omega T)+z^{-2}}$
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos(\omega t)$	$\cos(\omega kT)$	$\frac{1-z^{-1}\cos(\omega T)}{1-2z^{-1}\cos(\omega T)+z^{-2}}$
–	–	a^k	$\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$
–	–	a^{k-1}, $k=1,2,\dots$	$\frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$
–	–	ka^{k-1}, $k=1,2,\dots$	$\frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{z}{(z-a)^2}$

Propriété de la T.Z :

1 - Multplication par une constante :

$$\mathcal{Z}\{a\,x(k)\} = \mathcal{Z}\{a\,x(k)\} = a\,x(z) \quad a : c^{te}$$

$$\mathcal{Z}\{a\,x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} a\,x(k)\,z^{-1} = a\sum_{k=0}^{\infty} x(k)\,z^{-1}$$

$$\boxed{\mathcal{Z}\{a\,x(k)\} = a\,x(z)} \quad (26)$$

② Linearité :

si $x(k) = a f(k) + b g(k)$

$X(z) = a F(z) + b G(z)$

$$X(z) = \mathcal{Z}\{a f(k) + b g(k)\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} [a f(k) + b g(k)] z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a f(k) z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} b g(k) z^{-k}$$

$$X(z) = a \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} + b \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k}$$

$$\boxed{X(z) = a F(z) + b G(z)}$$

③ : Multiplication par a^k :

si $X(z)$ est la TZ de $x(k)$ alors $TZ\{a^k x(k)\} = ?$

$$\mathcal{Z}\{a^k x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \left(\frac{z}{a}\right)^{-k}$$

$$= X\left(\frac{z}{a}\right)$$

$$\boxed{TZ\{a^k x(k)\} = X\left(\frac{z}{a}\right) = X(a^{-1} z)}$$

4) Théorème de translation :

$$\mathcal{Z}\{x(k-nT)\} = z^{-n} X(z) \quad \text{------} \quad (1)$$

$$\mathcal{Z}\{x(k+nT)\} = z^{n} \left\{ X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(k) z^{-k} \right\}$$

Preuve 1 :

$$\mathcal{Z}\{x(k-nT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k-nT) z^{-k} z^{n} . z^{-n}$$

$$= z^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} x(k-nT) z^{-(k-n)}$$

$$k-n = m \Rightarrow \begin{cases} k=0 & m=-n \\ k=\infty & m \to \infty \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}\{x(k-nT)\} = z^{-n} \sum_{m=-n}^{\infty} x(m) z^{-m}$$

Système Causal : $m < 0 \Rightarrow x(m) = 0$

$$\mathcal{Z}\{x(k-nT)\} = z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} x(m) z^{-m} = z^{-n} X(z)$$

Preuve 2 :

$$\mathcal{Z}\{x(k+nT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k+nT) z^{-k} z^{-n} . z^{n}$$

$$= z^{n} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} x(k+nT) z^{-(k+n)} + \sum_{k=0}^{n-1} x(k) z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} \right\}$$

$$= z^n \left\{ \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}}_{X(z)} - \sum_{k=0}^{n-1} x(k) z^{-k} \right\}$$

$$\boxed{\mathcal{Z}\left\{x(k+nT)\right\} = z^n \left\{ X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(k) z^{-k} \right\}}$$

Exemple :

$$\mathcal{Z}\left\{x(k+1)\right\} = z^1 \left\{ X(z) - \sum_{k=0}^{0} x(k) z^{-k} \right\}$$

$$\mathcal{Z}\left\{x(k+1)\right\} = z \left\{ X(z) - x(0) \right\}$$

$$\mathcal{Z}\left\{x(k+2)\right\} = z^2 \left\{ X(z) - \sum_{k=0}^{1} x(k) z^{-k} \right\}$$

$$\mathcal{Z}\left\{x(k+2)\right\} = z^2 \left\{ X(z) - x(0) - x(1) z^{-1} \right\}$$

6) Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{k \to \infty} x(k) = \lim_{z \to 1} \left[(1 - z^{-1}) X(z) \right]$$

$$x(\infty) = \lim_{z \to 1} \left[(1 - z^{-1}) X(z) \right]$$

7) - Théorème de la valeur initiale :

$$x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

8) Théorème de différentiation partielle :

Soit un signal $x(t,a)$ ou $x(KT,a)$ où a est une c^{ste} ou une variable indépendante. La T.Z de $x(KT,a)$ est définie par $X(z,a)$ tq :

$\mathcal{Z}\{x(KT,a)\} = X(z,a)$ alors :

$$\boxed{\mathcal{Z}\left\{\frac{\partial}{\partial a}x(KT,a)\right\} = \frac{\partial}{\partial a}X(z,a)}$$

tableau récapitulatif des pptés de la T.Z :

$x(K)$	$\mathcal{Z}\{x(KT)\}$
$a\,x(K)$	$a\,X(z)$
$a_1 x(K) + a_2 y(K)$	$a_1 X(z) + a_2 Y(z)$
$x(K+1)$	$zX(z) - z\,x(0)$
$x(K+2)$	$z^2X(z) - z^2x(0) - z\,x(1)$
$x(K-n)$	$z^{-n}X(z)$
$Kx(K)$	$-z\frac{d}{dz}X(z)$
$e^{-aK}x(K)$	$X(z\,e^{a})$
$a^K x(K)$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$
$K a^K x(K)$	$-z\frac{d}{dz}X\left(\frac{z}{a}\right)$
$x(0)$	$\lim\limits_{z\to\infty} X(z)$
$x(\infty)$	$\lim\limits_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z)$

$\nabla x(k) = x(k) - x(k-1)$	$(1 - z^{-1})\, X(z)$
$\Delta x(k) = x(k+1) - x(k)$	$(z-1)\, X(z) - z\, x(0)$
$\sum_{k=0}^{n} x(k)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}} X(z)$
$\frac{\partial}{\partial a} x(k,a)$	$\frac{\partial}{\partial a} X(z,a)$
$k^m x(k)$	$\left(-z \frac{d}{dz}\right)^m X(z)$

⑨ Théorème de Différentiation :

$$\mathcal{Z}\{k\,x(k)\} = -z \frac{d}{dz} X(z)$$

- transformée en Z inverse :

La TZ inverse est noté par $\mathcal{Z}^{-1}$ elle permet de transformée $X(z)$ en $x(k)$

① - Méthode programmée :

soit $X(z) = \frac{10z+5}{(z-1)(z-0{,}2)} \rightsquigarrow x(k) = ?$

$X(z) = \frac{10z+5}{(z-1)(z-0{,}2)} \cdot U(z)$ telque $U(z) = 1$

$$U(z) = \mathcal{Z}\{u(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)\, z^{-k}$$

$$U(z) = U(0) + \cancel{U(1)}\, z^{-1} + \cancel{U(2)}\, z^{-2} + \dots = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U(0) = 1 \\ U(k) = 0 \quad \text{pour } k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

$$(z-1)(z-0{,}2)\, X(z) = (10z + 5)\, U(z)$$

$$(z^2 - 1{,}2z + 0{,}2)\, X(z) = 10z\, U(z) + 5\, U(z)$$

On appliquant z^{-1}

$$\boxed{x(k+2) - 1{,}2\, x(k+1) + 0{,}2\, x(k) = 10\, u(k+1) + 5\, u(k)}$$ Eq récurante

pour la resoudre il faut les conditions initiale : pour avoir $x(0)$ il faut pauser $K = -2$

$$x(0) - 1{,}2\, \cancel{x(-1)} + 0{,}2\, \cancel{x(-2)} = 10\, \cancel{u(-1)} + 5\, \cancel{u(-2)}$$

$$\boxed{x(0) = 0}$$

Ont pause mainetenant $K = -1$

$$x(1) - 1{,}2\, \cancel{x(0)} + 0{,}2\, \cancel{x(-1)} = 10\, \underbrace{u(0)}_{1} + 5\, \cancel{u(-1)}$$

$$\boxed{x(1) = 10}$$

donc avec l'equation récurante + les C.I ont peut Programmer la solution de $x(k)$

$$\begin{cases} x(k+2) - 1{,}2\, x(k+1) + 0{,}2\, x(k) = 10\, u(k+1) + 5\, u(k) \\ x(0) = 0 \\ x(1) = 10 \end{cases}$$

Debut

```
x(0)=0; U(0)=1; U(1)=0
x(1) = 10;
i=2;
for i=2:N
    U(i)=0
x(i)= 1,2x(i-1) - 0,2 x(i-2) + 10 U(i-1) + 5 U(i-2)
    i=i+1
end
```

2 - Méthode de décomposition

Soit $X(z) = \dfrac{z^{-1}}{1 - a z^{-1}}$, $z X(z) = \dfrac{1}{1 - a z^{-1}}$

$$Y(z) = z X(z)$$

$$Y(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z - a} \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} a^k \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$y(k) = a^k \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$Y(z) = z X(z) \Rightarrow X(z) = z^{-1} Y(z)$$

$$\boxed{x(k) = a^{k-1}} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Soit $X(z) = \dfrac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n}$

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{(z - P_1)(z - P_2) \cdots (z - P_n)}$$

Hyp : Les pôles sont distinctes et $b_m = 0$

$$x(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_n)}$$

$$x(z) = \frac{z(b_0 z^{m-1} + \dots + b_{m-1})}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_n)}$$

$$\frac{x(z)}{z} = \frac{b_0 z^{m-1} + \dots + b_{m-1}}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_n)}$$

$$\frac{x(z)}{z} = \frac{a_1}{z-p_1} + \frac{a_2}{z-p_2} + \dots + \frac{a_n}{z-p_n}$$

$$a_i = \left[(z-p_i)\frac{x(z)}{z}\right]_{z=p_i}$$

$$x(z) = a_1 \frac{z}{z-p_1} + a_2 \frac{z}{z-p_2} + \dots + a_n \frac{z}{z-p_n}$$

$$\boxed{x(k) = a_1 (p_1)^k + a_2 (p_2)^k + \dots + a_n (p_n)^k}$$

Si $\frac{x(z)}{z}$ présente des pôles multiples $p_1 = p_2$

$$\frac{x(z)}{z} = \frac{C_1}{(z-p_1)^2} + \frac{C_2}{(z-p_1)} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \left[(z-p_1)^2 \frac{x(z)}{z}\right]_{z=p_1} \\ C_2 = \left[\frac{d}{dz}(z-p_1)^2 \frac{x(z)}{z}\right]_{z=p_1} \end{cases}$$

Exemple 01 :

soit $X(z) = \dfrac{10z}{(z-1)(z-0,2)}$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{10}{(z-1)(z-0,2)} , \quad \frac{X(z)}{z} = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-0,2}$$

$$a = \left[\cancel{(z-1)} \frac{10}{\cancel{(z-1)}(z-0,2)}\right]_{z=1} = 12,5$$

$$b = \left[(z-0,2) \frac{10}{(z-1)(z-0,2)}\right]_{z=0,2} = -12,5$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{12,5}{z-1} - \frac{12,5}{z-0,2}$$

$$X(z) = 12,5 \frac{z}{z-1} - 12,5 \frac{z}{z-0,2}$$

$u(k)$

$$Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} \right\} = 1 \quad k = 0, 1, 2, \dots k$$

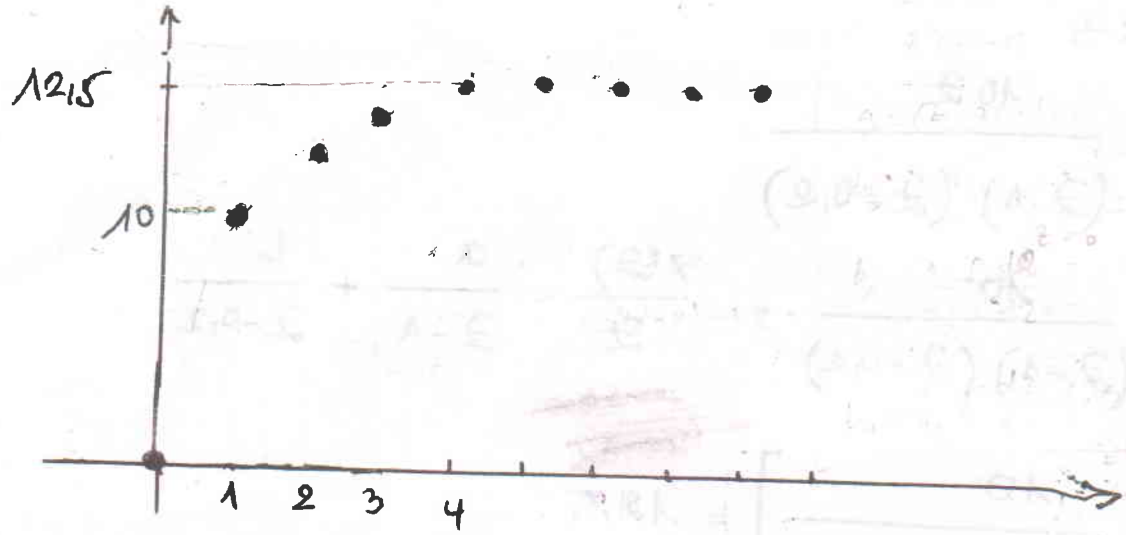
$$Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z-0,2} \right\} = (0,2)^k \quad k = 0, 1, 2, \dots k$$

$$\boxed{x(k) = 12,5\, u(k) - 12,5\, (0,2)^k} \quad k = 0, 1, 2, \dots k$$

* pôles multiples : $\dfrac{X(z)}{z} = \dfrac{b_r}{(z+P_1)^r} + \dfrac{b_{r-1}}{(z+P_1)^{r-1}} + \dots + \dfrac{b_1}{(z+P_1)}$

$$b_r = \frac{1}{0!} \left[\frac{X(z)}{z} \cdot (z-P_1)^r\right]_{z=P_1}$$

$$b_{r-j} = \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dz^j} \left[\frac{X(z)}{z} (z-P_1)^r\right]_{z=-P_1}$$



Exemple 02 :

si ont à $x(z) = \dfrac{z+2}{(z-2)\,z^2}$

$$x(z) = \frac{a}{z-2} + \frac{b}{z^2} + \frac{c}{z^1}$$

$$a = (z-2)\frac{z+2}{(z-2)\,z^2}\Bigg|_{z=2} = 1$$

$$c = \left[\frac{d}{dz}\left[\frac{z+2}{z-2}\right]\right]_{z=0} = -1$$

$$b = z^2\frac{z+2}{(z-2)\,z^2}\Bigg|_{z=0} = -1$$

$$x(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z}$$

$$x(z) = \frac{z^{-1}}{1-2z^{-1}} - 1z^{-2} - z^{-1}$$

$\mathcal{Z}^{-1}\{z^{-2}\} = 1$ pour $k=2$ $\qquad \mathcal{Z}^{-1}\{z^{-1}\} = 1$ pour $k=1$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^{-1}}{1-2z^{-1}}\right\} = 2^{k-1} \text{ pour } k = 1, 2, \ldots$$

$$x(k)=\begin{cases}\text{pour } k=0 & 0-0-0=0\\ \text{Pour } k=1 & 1-0-1=0\\ \text{Pour } k=2 & 2-1-0=1\\ \text{Pour } k=3,4,\ldots & 2^{k-1}-0-0=2^{k-1}\end{cases}$$

$$x(k)=\begin{cases}0 & k=0,1\\ 1 & k=2\\ 2^{k-1} & k=3,4,5,\ldots\end{cases}$$

Résolution des équations aux diff par la T.Z =

soit l'eq aux diff suivante =

$$x(k+2)+3x(k+1)+2x(k)=0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases}x(0)=0\\ x(1)=1\end{cases}$$

appliquant la T.Z on trouve

$$\underbrace{z^2x(z)-z^2x(0)-zx(1)}_{\mathcal{Z}\{x(k+2)\}}+3\underbrace{\left[zx(z)-zx(0)\right]}_{\mathcal{Z}\{x(k+1)\}}+2x(z)=0$$

$$z^2x(z)-0-z+3zx(z)-0+2x(z)=0$$

$$x(z)\left[z^2+3z+2\right]=z \Rightarrow x(z)=\frac{z}{z^2+3z+2}$$

$$\frac{x(z)}{z}=\frac{1}{(z+1)(z+2)}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z+1}\right\} = (-1)^K \quad K = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z+2}\right\} = (-2)^K \quad K = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\boxed{x(K) = (-1)^K - (-2)^K} \quad K = 0, 1, 2, \ldots$$

Exemple 02

soit l'eq aux diff suivante =

$$x(K+2) - 3\,x(K+1) + 2\,x(K) = u(K)$$

avec $u(K)$: Impulsion de Kronecker

et $x(0) = 0$, $x(K) = 0$ pour $K \leq 0$

- Calculer $x(1)$ et $x(K)$?

$$u(K) = \begin{cases} 1 & K = 0 \\ 0 & K \neq 0 \end{cases}$$

Pour $K = -1$

$$x(1) = \cancel{u(-1)}^{0} + 3\,\cancel{x(0)}^{0} - 2\,\cancel{x(-1)}^{0} \Rightarrow x(1) = 0$$

appliquant la TZ

$$z^2 X(z) - 3z X(z) + 2X(z) = 1$$

$$X(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

$$X(z) = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

$$X(z) = \frac{-z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{z^{-1}}{1-2z^{-1}}$$

$$\boxed{x(k) = -u(k-1) + 2^{k-1} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots}$$

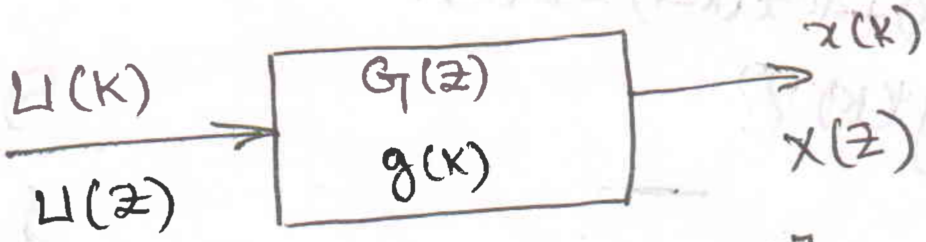
Fonction de transfert discrète :

soit le syst suivant

$$x(k) + a_1 x(k-1) + \cdots + a_n x(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \cdots + b_n u(k-n)$$

$u(k)$: entrée du syst D

$x(k)$: sortie du syst D



$$X(z)\left[1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}\right] =$$

$$U(z)\left[b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n}\right]$$

$$\boxed{\frac{X(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}} = G(z)}$$

$$X(z) = G(z) \cdot U(z)$$

Si $U(K)$ Impulsion de Kronéker $\delta_0(k) = \begin{cases} 1 & K=0 \\ 0 & K \neq 0 \end{cases}$

$$X(z) = G(z) \cdot \underbrace{U(z)}_{\mathcal{Z}\{\delta_0(K)\} = 1} \Rightarrow X(z) = G(z)$$

$G(z)$ est la reponse du systéme discrét par l'impulsion de Kronecker $\boxed{g(K) = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)\}}$

Exemple 1: Calculer la F.T discréte du syst suivant:

$$x(K+2) + a_1 x(K+1) + a_2 x(K) = b_0 u(K+2) + b_1 u(K+1) + b_2 u(K)$$

Exemple 2: Soit le systéme discrét:

$$x(K) - a\, x(K-1) = u(K)$$

Calculer $g(K)$?

Solution:

Exemple 1

$$X(z)\left[z^2 + a_1 z + a_2\right] = E(z)\left[b_0 z^2 + b_1 z + b_2\right]$$

$$\frac{X(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2} \Rightarrow \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

Exemple 2

$$X(z) - a z^{-1} X(z) = U(z)$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}} U(z)$$

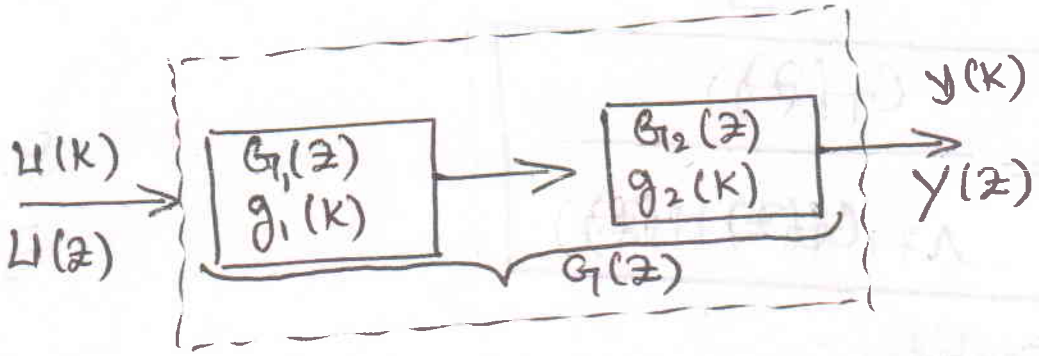
Pour $E(z)=1 \Rightarrow X(z)=G(z)$

$$G(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$g(k)=\mathcal{Z}^{-1}\{G(z)\}=\begin{cases} a^k & k=0,1,2,\dots \\ 0 & k<0 \end{cases}$$

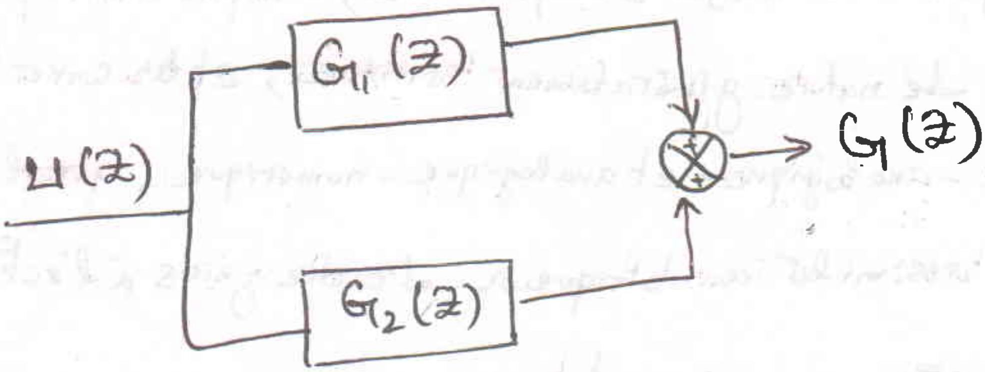
Interconnexion des FTD

1



$$G(z)=G_1(z)\cdot G_2(z)$$
$$g(k)=g_1(k) * g_2(k)$$

2



$$G(z)=G_1(z)+G_2(z)$$

3