$$Y(z) = G(z)\,E(z)$$

$$E(z) = R(z) - H(z)\,Y(z)$$

$$Y(z) = G(z)\left[R(z) - H(z)\,Y(z)\right]$$

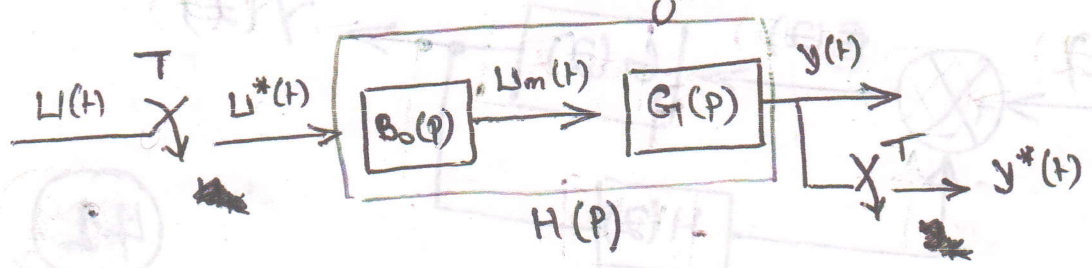
$$Y(z)\left[1 + G(z)\,H(z)\right] = G(z)\,R(z)$$

$$\boxed{\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)\,H(z)}}$$

Système échantilloné

L'analyse d'un système commandé par calculateur numérique passe par la définition d'un syst à temps discret, comprenant le procédé commandé de nature généralement continue, et les convertisseurs numérique-analogique et analogique-numérique, que l'on peut respectivement assimiler au bloqueur d'ordre zéros à l'échantillonneur, selon les schémas suivants :

Cas 1 : F.T en Z d'1 système continu précédé d'un bloqueur d'ordre "zéro"



$$H(p) = \left[B_0(p) \cdot F(p)\right] \quad \text{avec} \quad B_0(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p}$$

$$H(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p} \cdot F(p) \Rightarrow H(p) = \frac{F(p)}{p} - \frac{F(p)}{p} e^{-Tp}$$

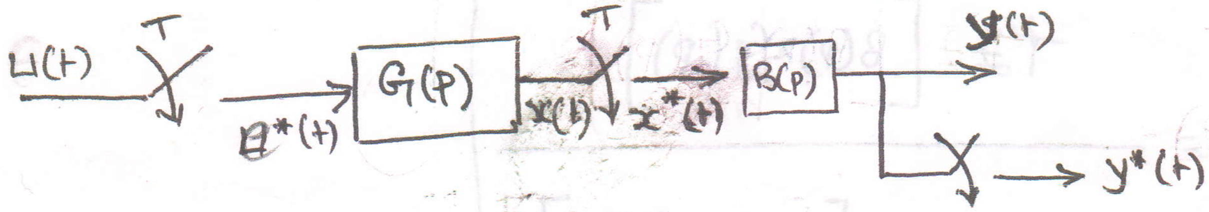
donc :

$$H(z) = TZ\left[\frac{F(p)}{p}\right] - TZ\left[\frac{F(p)}{p} e^{-Tp}\right]$$

$$H(z) = TZ\left[\frac{F(p)}{p}\right] - z^{-1}\, TZ\left[\frac{F(p)}{p}\right]$$

$$\boxed{H(z) = \left(1 - z^{-1}\right) TZ\left[\frac{F(p)}{p}\right]}$$

Cas 2 : Fonction de transfert en z de deux système échantillonnés en série



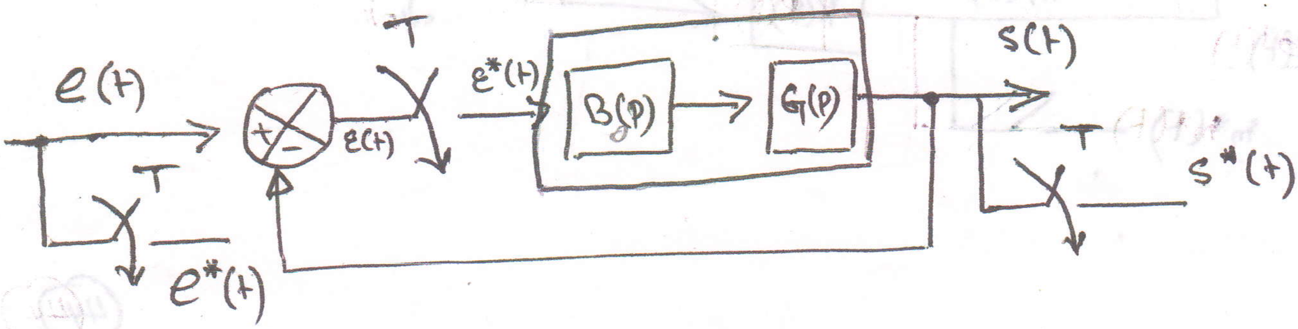
On a : $Y(z) = X(z) \cdot B(z)$

$X(z) = G(z) \cdot U(z)$

alors : $Y(z) = G(z) \cdot B(z)\, U(z)$

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) \cdot B(z)}$$

Cas ③ : FT en z d'un système échantillonés bouclés



On a

$$\varepsilon(t) = e(t) - s(t)$$

$$\varepsilon(z) = E(z) - S(z)$$

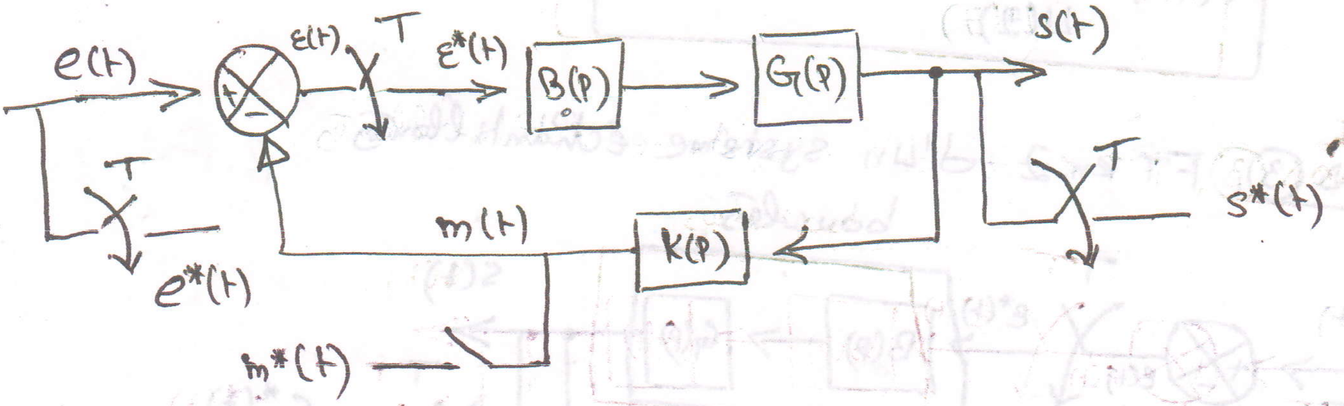
$$S(z) = TZ\left[B_0(p) \cdot G(p)\right] E(z)$$

$$S(z) = TZ\left[B_0(p) \cdot G(p)\right] \left(E(z) - S(z)\right)$$

$$S(z)\left[1 + TZ\left[B_0(p) \cdot G(p)\right]\right] = \left[TZ\left[B_0(p) \cdot G(p)\right]\right] E(z)$$

$$\boxed{H(z) = \frac{TZ\left[B_0(p) \cdot G(p)\right]}{1 + TZ\left[B_0(p) \cdot G(p)\right]}}$$

Cas 04 : FT en z d'1 syst échantillonés a retour non unitaire



La sortie est donnée par:

$$S(p) = B(p) \cdot G(p)\, \varepsilon^*(p)$$

Alors: $S(z) = TZ\{B(p) \cdot G(p)\}\, \varepsilon(z) \Rightarrow \varepsilon(z) = \dfrac{S(z)}{TZ\{B(p) \cdot G(p)\}}$

possons: $M(p) = K(p) \cdot S(p)$

Donc: $M(p) = K(p)\, B(p)\, G(p)\, \varepsilon^*(p)$

et on pose: $N(p) = K(p) \cdot B(p) \cdot G(p)$

$$M^*(p) = N^*(p) \cdot \varepsilon^*(p)$$

L'erreure $\varepsilon(p)$ s'écrit:

$$\varepsilon(p) = E(p) - M(p)$$

L'echantillonage de $\varepsilon^*(p)$ devient:

$$\varepsilon^*(p) = E^*(p) - M^*(p)$$

$$\varepsilon^*(p) = E^*(p) - N^*(p) \cdot \varepsilon^*(p)$$

La TZ de l'erreur:

$$\varepsilon(z) = E(z) - N(z) \cdot \varepsilon(z)$$

ou $N(z) = TZ\{N^*(p)\} = TZ\{K(p) \cdot B(p) \cdot G(p)\}$

$$\varepsilon(z) = E(z) - TZ\{K(p) \cdot B(p) \cdot G(p)\}\, \varepsilon(z),$$

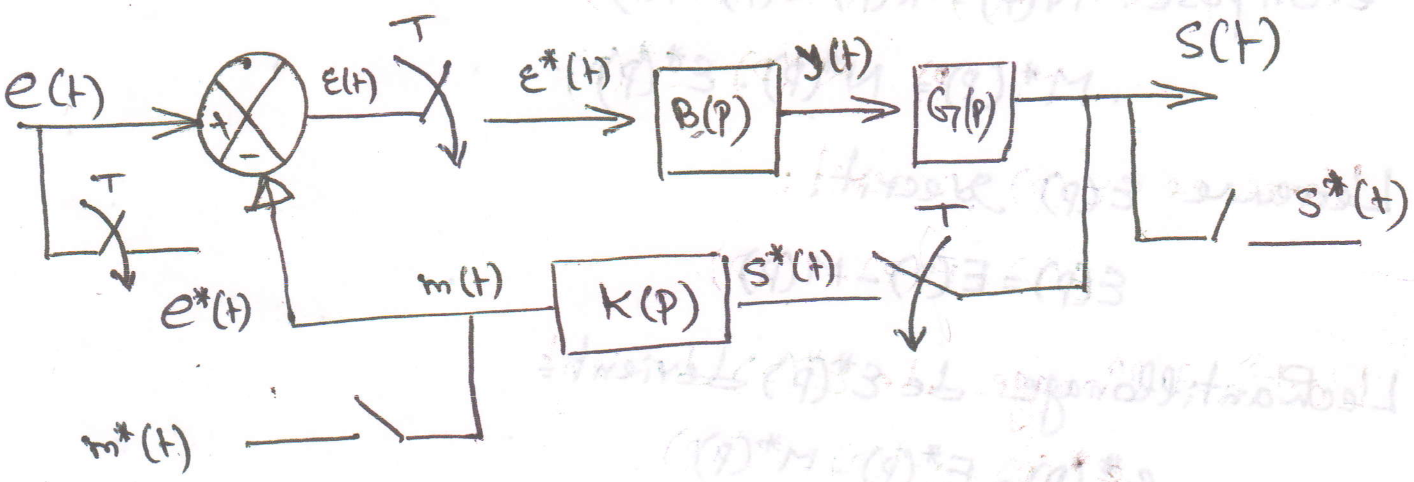
$$E(z) - \cancel{S(z)} \cancel{= E(z) - TZ\{K(p) \cdot B(p) \cdot G(p)\} \cdot [E(z) - S(z)]}$$

$$\frac{\varepsilon(z)}{E(z)} = \frac{1}{1 + TZ\{K(p) \cdot B(p) \cdot G(p)\}}$$

Alors la fonction de transfert en Z est calculé par :

$$\boxed{\frac{S(Z)}{E(Z)} = H(Z) = \frac{TZ\{B_0(p)\cdot G(p)\}}{1 + TZ\{K(p)\cdot B_0(p)\cdot G(p)\}}}$$

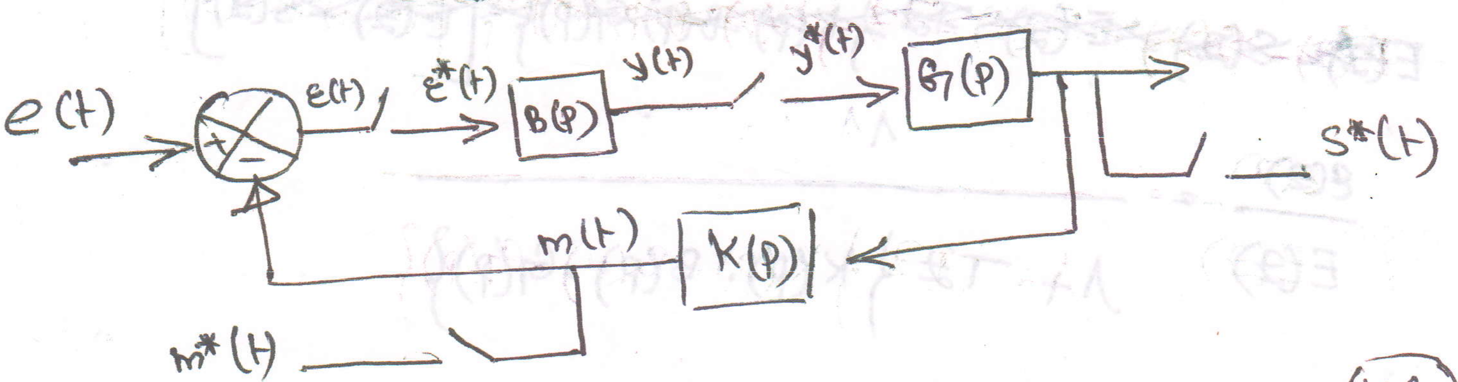
<u>Cas 5</u> : syst à deux échantillonneurs



La fonction de Transfert en Z :

$$\boxed{\frac{S(Z)}{E(Z)} = H(Z) = \frac{T(Z)\{B_0(p)\cdot G(p)\}}{1 + K(Z)\,TZ\{B_0(p)\cdot G(p)\}}}$$

<u>Cas : 06</u> syst avec un échantillonage supplémentaire dans la chaine directe



$$\boxed{\frac{S(z)}{E(z)} = H(z) = \frac{B(z) \cdot G(z)}{1 + B(z) \cdot TZ\{G(p) \cdot K(p)\}}}$$

Réponse des systs discrets :

$$Y(z) = G(z) \cdot U(z) \qquad U(z) \longrightarrow \boxed{G(z)} \longrightarrow Y(z)$$

$$G(z) = \frac{N_G}{D_G}$$ N_G : Numérateur, D_G : dénominateur

$$G(z) = \frac{N_a}{\prod_{i=1}^{n} (z - p_i)} \quad , \quad U(z) = \frac{N_U}{\prod_{i=1}^{s} (z - q_i)}$$

$$Y(z) = \frac{\overbrace{N_a \cdot N_U}^{N}}{\prod_{i=1}^{n} (z - p_i) \prod_{i=1}^{s} (z - q_i)} = \frac{N}{\prod_{i=1}^{n} (z - p_i) \prod_{i=1}^{s} (z - q_i)}$$

Don $Y(z)$ Peut être décomposé en :

$$Y(z) = \underbrace{A_0 + A_1 \frac{z}{z - p_1} + \cdots + A_n \frac{z}{z - p_n}}_{\text{Réponse relative aux pôles de } G(z) \text{ transitoire}} +$$

$$\underbrace{A_{n+1} \frac{z}{z - q_1} + \cdots + A_{n+s} \frac{z}{z - q_s}}_{\text{Réponse relative à l'entré } U = \text{"permanante"}}$$

$$y(K) = A_0\, \delta_\Delta(K) + A_1 (P_1)^K + \dots + A_n (P_n)^K + A_{n+1} (q_1)^K + \dots + A_{n+s} (q_s)^K$$

$$y(K) = A_0\, \delta_\Delta(K) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} A_i (P_i)^K}_{y_T} + \underbrace{\sum_{i=1}^{s} A_{n+s} (q_i)^K}_{y_P}$$

Discussion de la stabilité de la réponse :

réponse stable $\Rightarrow |P_i| < 1 \quad \forall i$

cela $P_i^K \longrightarrow 0$, $K \longrightarrow \infty \Rightarrow y(K) \longrightarrow y_P$

Exemple :

Donner la réponse du système et dite s'il est stable

$$y(K) - \frac{3}{8} y(K-1) + \frac{1}{32} y(K-2) = U(K)$$

avec $U(K)$: Echelon unitaire

$$U(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$Y(z) \left[1 - \frac{3}{8} z^{-1} + \frac{1}{32} z^{-2}\right] = \frac{z}{z-1}$$

$$Y(z) \left[z^2 - \frac{3}{8} z + \frac{1}{32}\right] = \frac{z^3}{z-1}$$

$$Y(z)=\frac{z^3}{(z-1)\left(z^2-\frac{3}{8}z+\frac{1}{32}\right)}$$

$$Y(z)=\frac{z^3}{(z-1)\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{1}{8}\right)}$$

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{z^2}{(z-1)\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{1}{8}\right)}$$

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{a}{z-1}+\frac{b}{z-\frac{1}{4}}+\frac{c}{z-\frac{1}{8}}$$

$$a=\left.\frac{z^2}{\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{1}{8}\right)}\right]_{z=1}=\frac{32}{21} \qquad c=\left.\frac{z^2}{(z-1)\left(z-\frac{1}{4}\right)}\right]_{z=0{,}125}=\frac{1}{7}$$

$$b=\left.\frac{z^2}{(z-1)\left(z-\frac{1}{8}\right)}\right]_{z=0{,}25}=\frac{-2}{3}$$

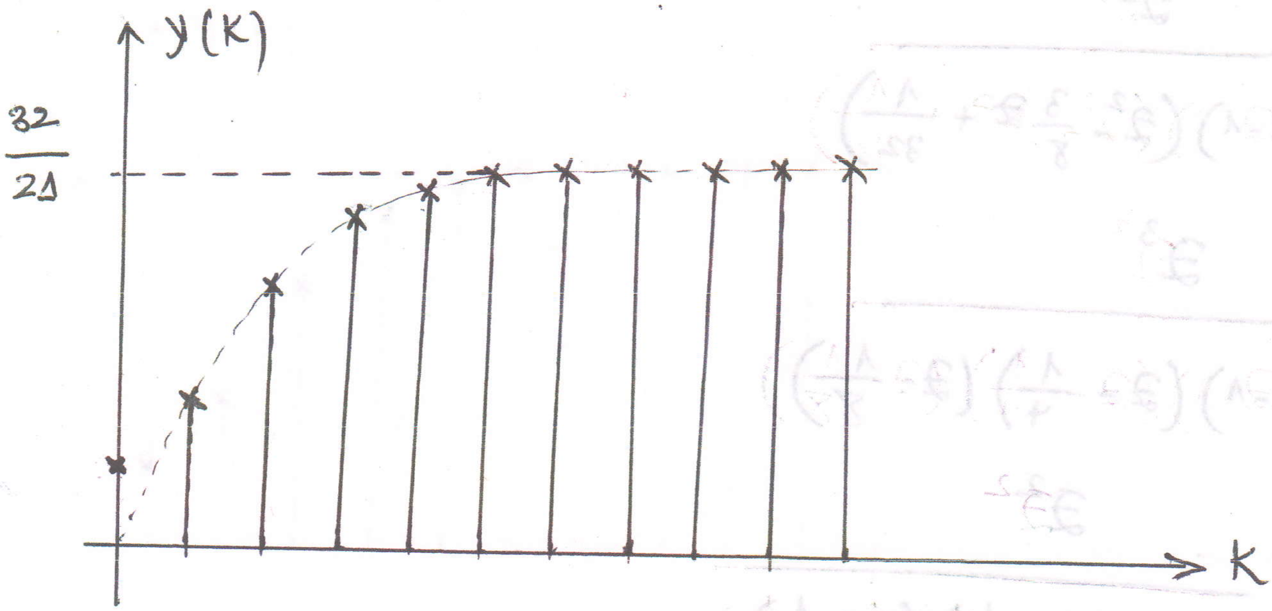
$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{32/21}{z-1}+\frac{1/7}{z-\frac{1}{8}}-\frac{2/3}{z-\frac{1}{4}}$$

$$Y(z)=\frac{32}{21}\frac{z}{z-1}-\frac{2}{3}\frac{z}{z-\frac{1}{4}}+\frac{1}{7}\frac{z}{z-\frac{1}{8}}$$

z^{-1}

$$\boxed{y(k)=\frac{32}{21}u(k)-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^k}$$

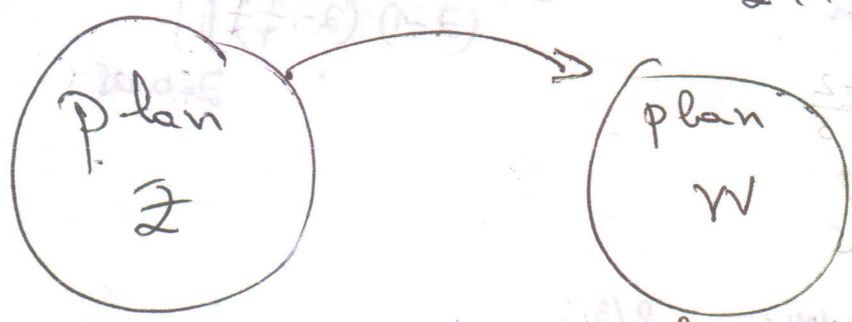
$$\left|\frac{1}{4}\right|<1 \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k \to 0, \quad \left|\frac{1}{8}\right|<1 \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^k \to 0$$

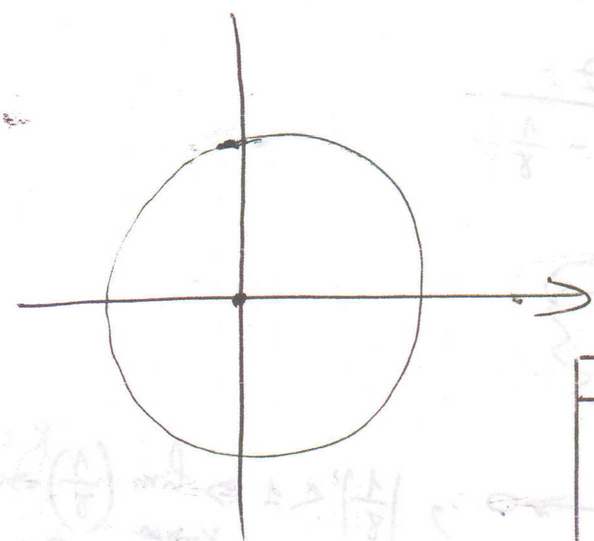


Stabilité des syst discrets : (méthode Routh)

Cette méthode est basé sur la transformation "bilinéaire"

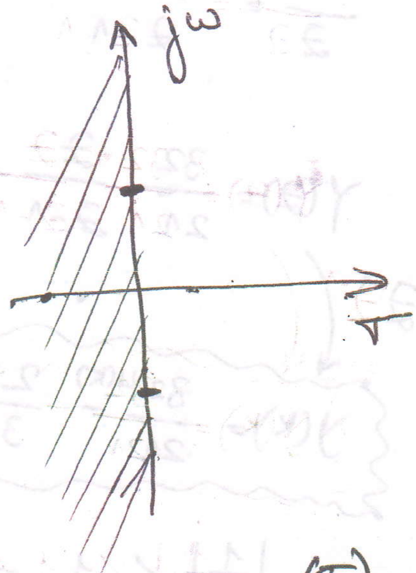
$$T.\ \text{bilinéaire} \Leftrightarrow w = \frac{z-1}{z+1}$$





$$w = \frac{z-1}{z+1}$$

z	w
0	−1
1	0
j	j
−j	−j



Exemple :

$$y(k+2) + 0{,}7\, y(k+1) + 0{,}1\, y(k) = u(k) \quad , \quad y(0) = y(1) = 0$$

appliquant la T.Z :

$$\left[z^2 + 0{,}7 z + 0{,}1\right] Y(z) = U(z)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{z^2 + 0{,}7 z + 0{,}1}$$

Eq Carac : $z^2 + 0{,}7 z + 0{,}1$

$$W = \frac{z-1}{z+1} \Rightarrow z = \frac{1+W}{1-W}$$

$$\left(\frac{1+W}{1-W}\right)^2 + 0{,}7\left(\frac{1+W}{1-W}\right) + 0{,}1 = 0$$

$$(1+W)^2 + 0{,}7(1+W)(1-W) + 0{,}1(1-W)^2 = 0$$

$$0{,}4 W^2 + 1{,}8 W + 1{,}8 = 0$$

Routh :

W^2	0,4	1,8
W^1	1,8	0
W^0	1,8	

aucun changement de signe dans la 1ère Colone ⇒ Syst stable.

Critère de Jury =

Considerons l'eq caractéristique =

$$D(z) = b_0 z^q + b_1 z^{q-1} + \cdots\cdots + b_q$$

avec $b_i \in \mathbb{R} \quad \forall q \in \mathbb{N}$

Rq : il faut s'arranger que b_0 soit positif :

Dressons le tableau suivant :

b_0	b_1	b_2	-------	b_q
b_q	b_{q-1}	b_{q-2}	-------	b_0
C_0	C_1	C_2	-------	C_{q-1}
C_{q-1}	C_{q-2}	C_{q-3}	-------	C_0

avec $C_j = \begin{vmatrix} b_0 & b_{q-j} \\ b_q & b_j \end{vmatrix}$ avec $j = 0, 1, \ldots\ldots$

$$C_j = b_0 b_j - b_q b_{q-j}$$

La Ciquième ligne est calculé à partir des deux ligne précédente et cette fois, on calcule uniquement (q-2) valeurs d_j selon :

$d_j = \begin{vmatrix} C_0 & C_{q-j-1} \\ C_{q-1} & C_j \end{vmatrix}$ avec $j = 0, 1, \ldots\ldots$

une sixième ligne est automatiquement ajouté au tableau

en disposant les coef dj en sense inverse

Le système est stable si toutes les conditions suivante sont

reunies simultanément

$$D(1) > 0, \quad D(-1) \begin{cases} > 0 & \text{pour } q \text{ pair} \\ < 0 & \text{pour } q \text{ impair} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} b_0 > |b_q| \\ |c_0| > |c_{q-1}| \\ |d_0| > |d_{q-2}| \\ \dots \\ |x_0| > |x_2| \end{cases}$$

* Cas d'un syst de 2^{nd} ordre

soit le système du 2^{nd} ordre suivant :

$$D(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \quad \text{avec } (q = 2)$$

$q = 2 \Rightarrow$ donc q paire

$$D(1) = a_2 + a_1 + a_0 > 0$$

$$D(-1) = a_2 - a_1 + a_0 > 0$$

Le tableaux de Jury :

1	a_2	a_1	a_0
2	a_0	a_1	a_2

$\Rightarrow a_2 > a_0$

Le syst sera stable si s si :

$$\begin{cases} a_2 + a_1 + a_0 > 0 \\ a_2 - a_1 + a_0 > 0 \\ a_2 > a_0 \end{cases}$$

(*) Cas d'un système de 3ᵉ ordre :

$$D(z) = a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z^1 + a_0 \Rightarrow (n=3) \text{ donc impaire}$$

$D(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 > 0$, $D(-1) < 0 \Rightarrow -a_0 + a_1 - a_2 + a_3 > 0$

1	a_3	a_2	a_1	a_0
2	a_0	a_1	a_2	a_3
3	$\begin{vmatrix} a_3 & a_0 \\ a_0 & a_3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix}$	
4	$\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a_3 & a_0 \\ a_0 & a_3 \end{vmatrix}$	

1	a_3	a_2	a_1	a_0
2	a_0	a_1	a_2	a_3
3	$a_3^2 - a_0^2$	$a_3 a_2 - a_1 a_0$	$a_3 a_1 - a_0 a_2$	
4	$a_3 a_1 - a_2 a_0$	$a_3 a_2 - a_1 a_0$	$a_3^2 - a_0^2$	

$$\Rightarrow \begin{cases} a_3 > |a_0| \\ a_3^2 - a_0^2 > a_3 a_1 - a_0 a_2 \end{cases}$$

Donc le syst sera stable si s si :

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 > 0 \\ -a_0 + a_1 - a_2 + a_3 > 0 \\ a_3 - |a_0| > 0 \\ a_3^2 - a_0^2 - a_3 a_1 + a_0 a_2 > 0 \end{cases}$$

* Cas d'un système du 4e ordre

Le système est stable si s si :

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 > 0 \\ a_4^2 - a_0^2 - |a_0 a_3 - a_1 a_4| > 0 \\ (a_0 - a_4)^2 (a_0 - a_2 + a_4) + (a_1 - a_3)(a_0 a_3 - a_1 a_4) > 0 \end{cases}$$

Exemple :

Soit la F.T.D $G(z) = \dfrac{1}{z^2 + 0{,}7 z + 0{,}1}$

$D(z) = z^2 + 0{,}7 z + 0{,}1 \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 1 \\ a_1 = 0{,}7 \\ a_0 = 0{,}1 \end{cases}$

Le syst est stable si si

$$\begin{cases} 1 + 0{,}7 + 0{,}1 > 0 \\ 1 - 0{,}7 + 0{,}1 > 0 \\ 1 > 0{,}1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1{,}8 > 0 \\ 0{,}4 > 0 \\ 1 > 0{,}1 \end{cases}$$

toutes les condition de Jury sont vérifié alors le syst est stable.

précision :

Etudier la précision d'1 système ⇒ C'est calculer son erreur statique

Erreur statique :

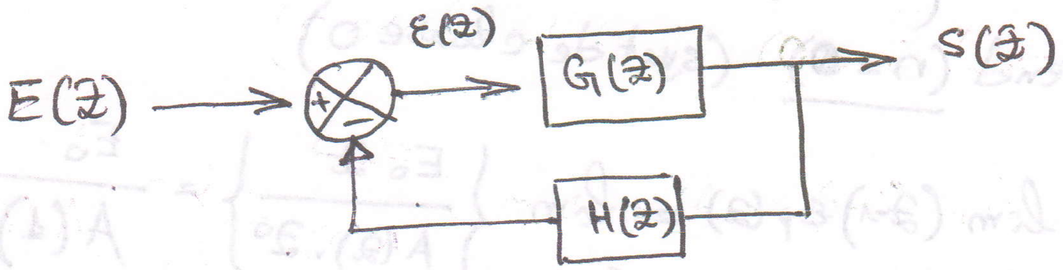
C'est l'erreur en régime permanant entre la sortie et l'entré pour déterminer cette erreur, On soumet à des entrés canoniques.

Echelon : on parle alors d'erreur indicielle ou de position

rampe : Erreur de trainage ou de poursuite

Parabole : Erreur d'accelération

Soit le syst asservi discrét suivant :



$$\varepsilon(z) = E(z) - H(z)\,S(z)$$

$$S(z) = G(z) \cdot \varepsilon(z)$$

$$\varepsilon(z) = E(z) - H(z)\left[G(z)\,\varepsilon(z)\right]$$

$$\varepsilon(z)\left[1 + H(z)G(z)\right] = E(z) \Rightarrow \boxed{\varepsilon(z) = \frac{E(z)}{1 + H(z) \cdot G(z)}}$$

possant $H(z) \cdot G(z) = B(z)$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon(z) = \frac{E(z)}{1 + B(z)}}$$

On peut ecrire $B(z)$ de la manière suivante :

$$B(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^n} \cdot \frac{N(z)}{D(z)}$$ (Forme standard)

possant $N(z)/D(z) = A(z) \Rightarrow B(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^n} \cdot A(z)$

→ L'erreur statique est calculé par :

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{k\to\infty} \varepsilon(k) = \lim_{z\to 1} (z-1)\,\varepsilon(z)$$

L'erreur de position de ce syst en B.F a pour expression : (Entrée echelon : $E(z) = E_0 \cdot \frac{z}{z-1}$)

$$\varepsilon_p(z) = \frac{E_0 \cdot \frac{z}{z-1}}{1 + \frac{A(z)}{(1-z^{-1})^n}} = \frac{E_0 \, \frac{z(z-1)^n}{(z-1)}}{(z-1)^n + A(z) \cdot z^n}$$

Si on prend $(n=0)$ (syst de classe 0)

$$\varepsilon_p(\infty) = \lim_{z\to 1} (z-1)\,\varepsilon_p(z) = \lim_{z\to 1} \left\{ \frac{E_0 \, z}{A(z) \cdot z^0} \right\} = \frac{E_0}{A(1)}$$

Si on prend $(n=1)$ (syst de classe 1)

$$\varepsilon_p(\infty) = \lim_{z\to 1} (z-1)\,\varepsilon_p(z) = \lim_{z\to 1} \left\{ \frac{E_0 \, z(z-1)}{(z-1) + A(z) \cdot z} \right\} = 0$$

La présence d'au moins un integrateur dans la F.T en B.O assure donc bien la nullité de l'erreur statique

L'erreur de vitesse du système en B.F a pour expression = (Entrée rampe : $E(z) = \frac{E_0 T_e z}{(z-1)^2}$

$$\varepsilon_r(z) = \frac{\frac{E_0 T_e z}{(z-1)^2}}{1 + \frac{A(z)}{(1-z^{-1})^n}} = \frac{\frac{E_0 T_e z}{(z-1)^2}(z-1)^n}{(z-1)^n + A(z) z^n}$$

si on prend ($n=0$) (syst de classe 0)

$$\varepsilon_r(\infty) = \lim_{z\to 1} (z-1)\varepsilon_r(z) = \lim_{z\to 1} \left\{ \frac{\frac{E_0 T_e z}{(z-1)}}{A(z)} \right\} = \infty$$

si on prend ($n=1$) (syst de classe 1)

$$\varepsilon_r(\infty) = \lim_{z\to 1} (z-1)\varepsilon_r(z) = \lim_{z\to 1} \left\{ \frac{E_0 T_e z}{A(z) z} \right\} = \frac{E_0 T_e}{A(1)}$$

si on prend ($n=2$) (syst de classe 2)

$$\varepsilon_r(\infty) = \lim_{z\to 1} (z-1)\varepsilon_r(z) = \lim_{z\to 1} \left\{ \frac{E_0 T_e z(z-1)}{A(z) z^2} \right\} = 0$$

En conclusion, la présence d'un intégrateur dans la fonction de Transfert en B.O assure une erreur de vitesse finie d'autant plus faible que la periode d'echantillonnage est faible. La présence d'au moins deux intégrateurs assure la nullité de l'erreur de vitesse

Récape :

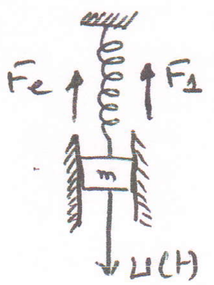
Classe du syst / Entrée	Classe 0 (n=0) pas d'intégration	Classe 1 (n=1) 1 intégration	Classe 2 (n=2) 2 intégration	Classe >2
Entrée Echelon	$\frac{E_0}{A(1)}$	0	0	0
Entrée rampe	∞	$\frac{E_0 Te}{A(1)}$	0	0
Entrée parabole	∞	∞	$\frac{E_0 Te^2}{A(1)}$	0

Chapitre 03 Analyse des systèmes Echantillonnés dans l'espace d'état

→ Rappel sur l'espace d'état continue :

Exemple 01 :

Soit le système mécanique suivant :



$$\sum F_i = m\ddot{x}$$

$$u(t) - F_e - F_1 = m\ddot{x}$$

$u(t) - f\dot{x} - Kx = m\ddot{x}$ avec $\begin{cases} f : \text{coef de frottement} \\ K : \text{const du ressort} \end{cases}$

$$m\ddot{x} + f\dot{x} + Kx = u(t) \quad \text{Eq dif du 2}^{\text{e}} \text{ ordre}$$

- Choix des variables d'état ⇒ 2 variables d'état $x(t), \dot{x}(t)$

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{x} = -\frac{K}{m}x_1 - \frac{f}{m}x_2 + \frac{1}{m}u(t) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} & -\frac{f}{m} \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix}}^{B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

(61)

A : Matrice d'evaluation ou dynamique

B : Matrice de commande

C : Matrice d'observation

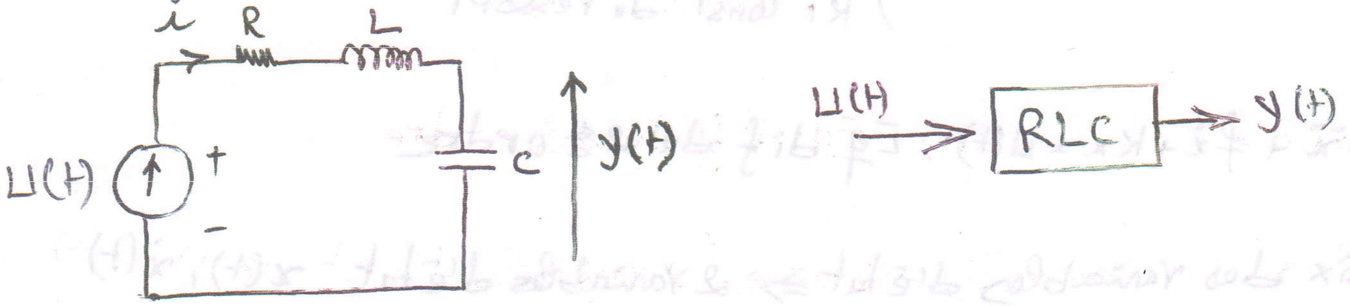
D'1 façon générale la représentation d'état d'1 syst d'ordre n est données par :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BU \\ y = Cx + DU \end{cases}$$

D : matrice de transfert direct

Exemple 02 :

Circuit RLC :



$$U(t) = Ri + L\frac{di}{dt} + y \text{ ----- } (*)$$

$$y(t) = \frac{1}{c}\int i(t)\,dt$$

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{c} i(t) \Rightarrow i(t) = \dot{y}C$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \ddot{y}C$$

On ramplace dans (*)

$$U = RC\dot{y} + LC\ddot{y} + y \Rightarrow \boxed{\ddot{y} + \frac{R}{L}\dot{y} + \frac{1}{LC}y = \frac{1}{LC}U(t)}$$

$$x_1 = y(t) \qquad x_2 = \dot{y}(t) \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y}(t) \\ \dot{x}_2 = \ddot{y}(t) \end{cases}$$

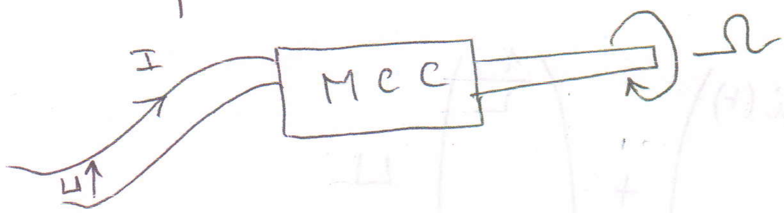
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{-1}{LC} x_1 - \dfrac{R}{L} x_2 + \dfrac{1}{LC} u(t) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{-1}{LC} & -\dfrac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{LC} \end{pmatrix} u$$

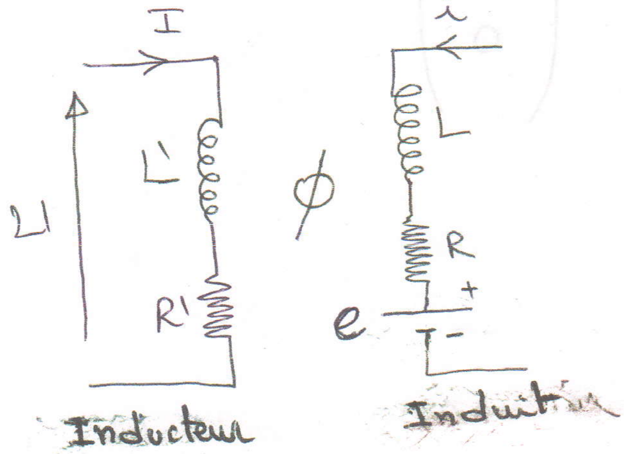
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

<u>Exemple 03</u> =

La représentation d'état d'1 MCC



$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$



I : courant Inducteur
U : tension d'entrée
Ω : vitesse
i : courant induit
ϕ = flux
$e = K_m \phi \Omega$

C_m : Couple mécanique

$C_m = K_m \phi i$

Eq Electrique

$$U = Ri + L\frac{di}{dt} + \underbrace{K_m \phi}\Omega$$

$$U = Ri + L\frac{di}{dt} + K\Omega$$

On prend (i, Ω) comme variable d'état =

$$\boxed{\frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L} - \frac{K}{L}\Omega + \frac{1}{L}U}$$

Eq Mécanique

$$\sum M = J\dot{\Omega}$$

$$J\dot{\Omega} = C_m - f\Omega$$

$$J\dot{\Omega} = K i - f\Omega$$

$$\boxed{\frac{d\Omega}{dt} = \frac{K}{J}i - \frac{f}{J}\Omega}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{di(t)}{dt} \\ \frac{d\Omega(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K}{L} \\ \frac{K}{L} & -\frac{f}{J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i(t) \\ \Omega(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} U$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i(t) \\ \Omega(t) \end{pmatrix}$$

Exemple 04 =

soit l'eq diff suivante =

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b_1\dot{U} + b_0 U \quad \text{------} \quad (*)$$

$$\mathcal{L}(*) \Rightarrow s^2 Y(s) + a_1 sY(s) + a_0 Y(s) = b_1 sU(s) + b_0 U(s)$$

$$Y(s)\left[s^2 + a_1 s + a_0\right] = U(s)\left[b_1 s + b_0\right]$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$ possant $$Z(s) = \frac{U(s)}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$U(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0}} \xrightarrow{Z(s)} \boxed{b_1 s + b_0} \longrightarrow Y(s)$$

$$\left\{\begin{array}{l} Z(s) = \dfrac{U(s)}{s^2 + a_1 s + a_0} \\[2ex] Y(s) = Z(s)\left(b_1 s + b_0\right) \end{array}\right.$$

$\mathcal{L}^{-1}$

$$\left\{\begin{array}{l} \ddot{z}(t) + a_1 \dot{z}(t) + a_0 z(t) = U(t) \\[2ex] y(t) = b_1 \dot{z}(t) + b_0 z(t) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = z(t) \\[2ex] x_2 = \dot{z}(t) \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\[2ex] \dot{x}_2 = -a_0 x_1 - a_1 x_2 + U(t) \end{array}\right.$$

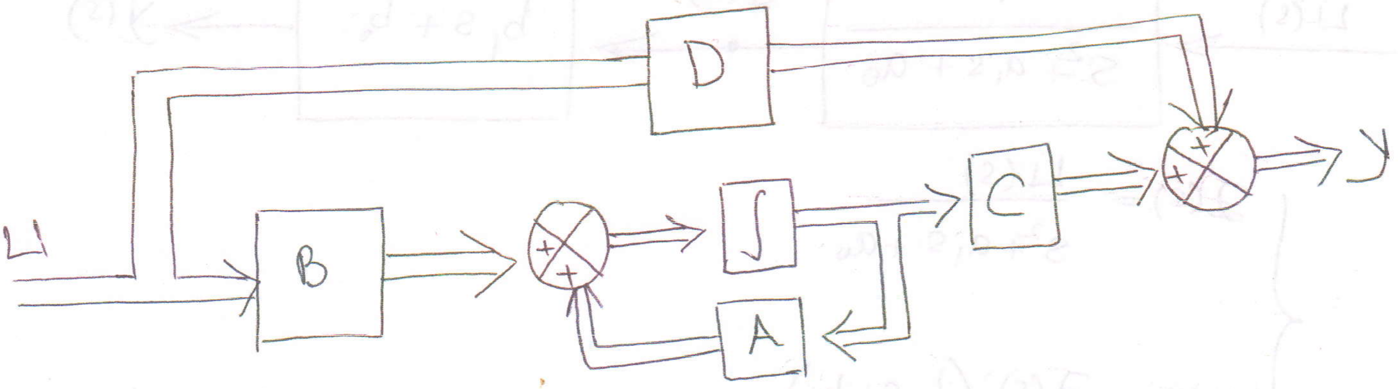
$$y(t) = b_0 x_1 + b_1 x_2$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} U$$

$$y = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Diagramme de simulation d'un représentation Continue

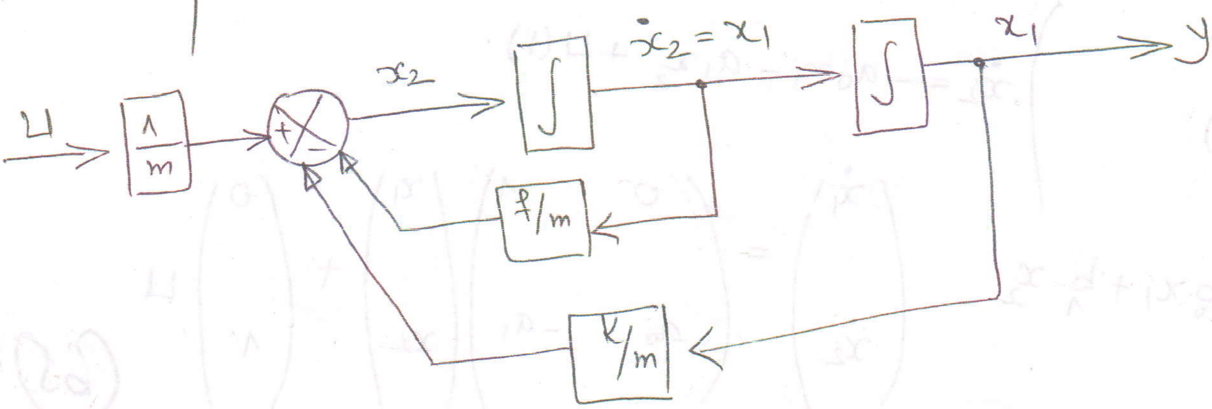
$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ y = CX + DU \end{cases}$$



Exemple :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} & -\frac{f}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} U \qquad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{K}{m} x_1 - \frac{f}{m} x_2 + \frac{U}{m} \end{cases}$$



(66)

Représentation d'état des syst discrets

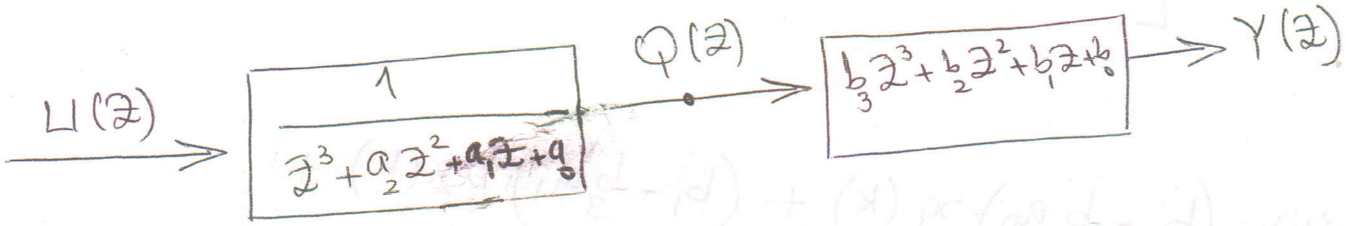
Exemple : soit l'eq au diff

$$y(k+3) + a_2\, y(k+2) + a_1\, y(k+1) + a_0\, y(k) = b_3\, u(k+3) + b_2\, u(k+2) + b_1\, u(k+1) + b_0\, u(k)$$

Variable Auxiliaire :

appliquant la T.Z on trouve

$$\left[z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0\right] Y(z) = \left[b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0\right] U(z)$$



$$\begin{cases} Q(z) = \dfrac{U(z)}{z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0} \\[2ex] Y(z) = \left(b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0\right) Q(z) \end{cases}$$

$$z^{-1} \longrightarrow \begin{cases} q(k+3) + a_2\, q(k+2) + a_1\, q(k+1) + a_0\, q(k) = u(k) \\[1ex] y(k) = b_3\, q(k+3) + b_2\, q(k+2) + b_1\, q(k+1) + b_0\, q(k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(k) = q(k) \\ x_2(k) = q(k+1) \\ x_3(k) = q(k+2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(k+1) = q(k+1) \\ x_2(k+1) = q(k+2) \\ x_3(k+1) = q(k+3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_3(k) \\ x_3(k+1) = u(k) - a_0 x_1(k) - a_1 x_2(k) - a_2 x_3(k) \end{cases}$$

$$y(k) = b_0 x_1(k) + b_1 x_2(k) + b_2 x_3(k) + b_3\left[-a_0 x_1(k) - a_1 x_2(k) - a_2 x_3(k) + u(k)\right]$$

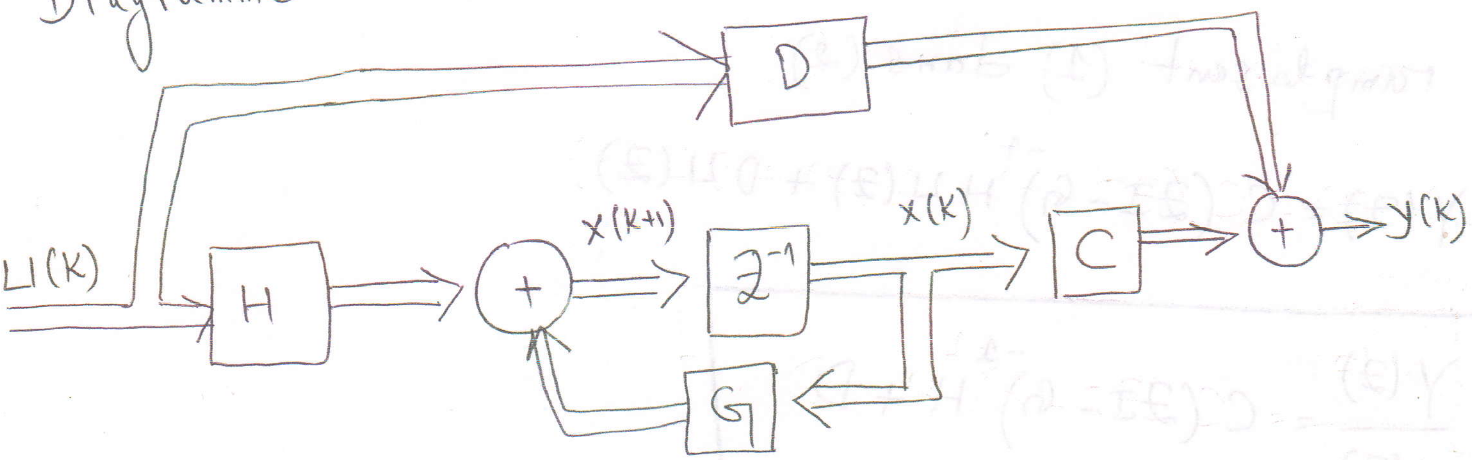
$$y(k) = (b_0 - b_3 a_0)\, x_1(k) + (b_1 - b_3 a_1)\, x_2(k) + (b_2 - b_3 a_2)\, x_3(k) + b_3 u(k)$$

$$y(k) = \underbrace{\begin{pmatrix} b_0 - b_3 a_0 & b_1 - b_3 a_1 & b_2 - b_3 a_2 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix} + \underbrace{(b_3)}_{D}\, u(k)$$

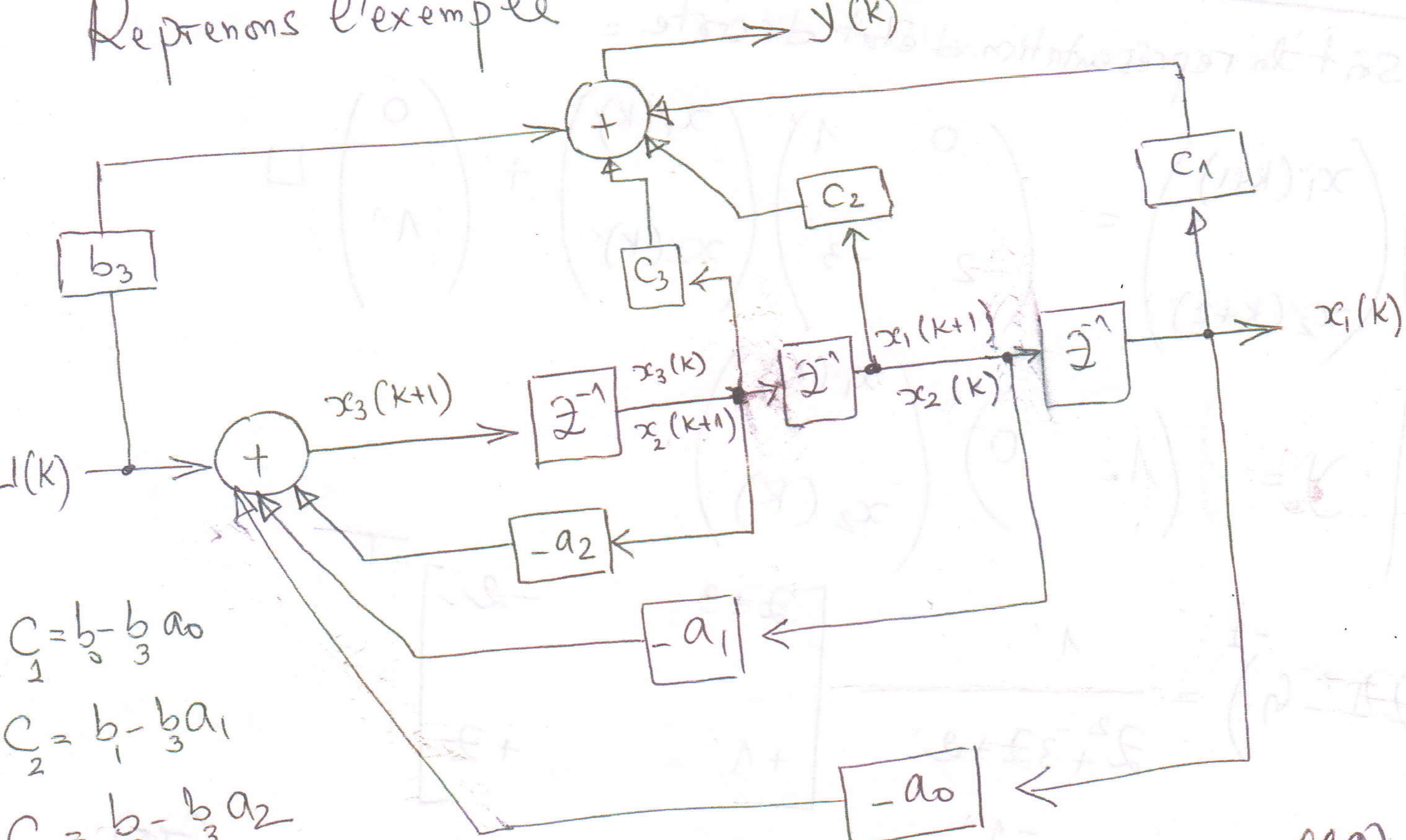
$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}}_{A \equiv G} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B \equiv H} u(k)$$

$$\begin{cases} x(k+1) = G\,x(k) + H\,u(k) \\ y(k) = C\,x(k) + D\,u(k) \end{cases}$$

Diagramme de simulation



Reprenons l'exemple



$c_1 = b_0 - b_3 a_0$

$c_2 = b_1 - b_3 a_1$

$c_3 = b_2 - b_3 a_2$

Fonction de transfert discrète =

$$\begin{cases} x(k+1) = G\,x(k) + H\,u(k) \\ y(k) = C\,x(k) + D\,u(k) \end{cases} \xrightarrow{TZ} \begin{cases} Z\,X(Z) = G\,X(Z) + H\,U(Z) \\ (ZI - G)\,X(Z) = H\,U(Z) \quad (1) \end{cases}$$

$$Y(Z) = C\,X(Z) + D\,U(Z) \text{ ------ } (2)$$

ramplaçant (1) dans (2)

$$Y(Z) = C\,(ZI-G)^{-1} H\,U(Z) + D\,U(Z)$$

$$\boxed{\frac{Y(Z)}{U(Z)} = C\,(ZI-G)^{-1} H + D}$$

Ex : Soit la représentation d'état discrète =

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$(ZI-G)^{-1} = \frac{1}{Z^2+3Z+2} \begin{bmatrix} Z+3 & -2 \\ +1 & +Z \end{bmatrix}^T$$

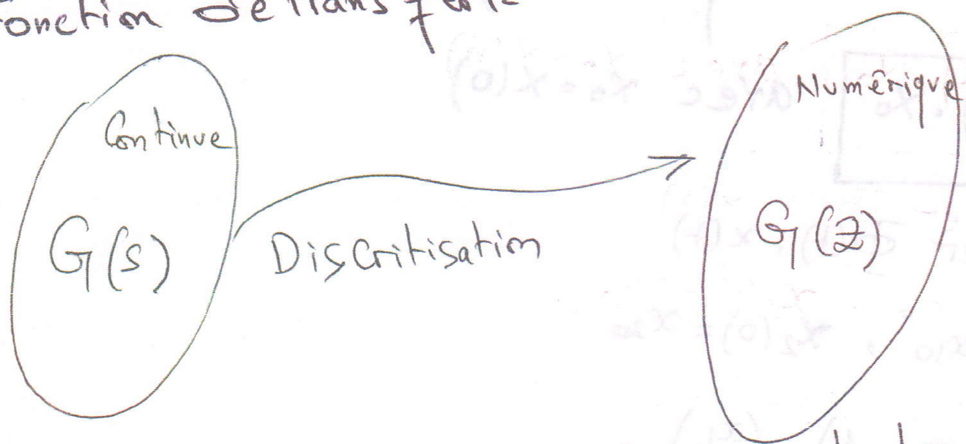
$$G(Z) = C\,(ZI-G)^{-1} H$$

$$G(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{z+3}{z^2+3z+2} & \frac{1}{z^2+3z+2} \\ \frac{-2}{z^2+3z+2} & \frac{z}{z^2+3z+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{G(z) = \frac{1}{z^2+3z+2}}$$

Discritisation d'un syst Continue :

① Fonction de transfert :



Le syst est donné par une fonction de transfert $G(s)$

1- Calculer $g(t)$ tq $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$

2- Echantillonner $g(t) \Rightarrow g(kT) = g(k)$

3- Calculer $G(z)$: $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)\, z^{-k}$

② Espace d'état :

soit la representation d'état suivante

$\dot{x} = Ax \leadsto x(t) = e^{At} \cdot X_0$ avec $X_0 = X(0)$

Preuve :

$$\dot{x} = Ax$$

$$s\,x(s) = A\,x(s)$$

$$(sI - A)\,x(s) = x_0 \Rightarrow x(s) = (sI-A)^{-1} x_0$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\} \cdot x_0$$

donc : $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\} = \Phi(t)$

$\boxed{x(t) = \Phi(t) \cdot x_0}$ avec $x_0 = x(0)$

Exemple : trouver $\Phi(t)$, $x(t)$

avec $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\}$$

$$sI - A = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{pmatrix} , \quad (sI-A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \\ \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+2} & \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}(sI-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} x_{10} \\ \\ x_{20} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2e^{-t} - e^{-2t})\, x_{10} + (e^{-t} - e^{-2t})\, x_{20} \\ \\ (-2e^{-t} + 2e^{-2t})\, x_{10} + (-e^{-t} + 2e^{-2t})\, x_{20} \end{pmatrix}$$

Le syst d'état continue est donnée par $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$

La dicrétisation =

$$\begin{cases} x(k+1) = G(T)\, x(k) + H(T)\, u(k) \\ \\ y(k) = C\,x(k) + D\,u(k) \end{cases}$$

avec T : periode d'ech

$$G(T) = e^{AT} = \Phi(T)$$

$$H(T) = \left\{ \int_0^T e^{A\lambda}\, d\lambda \right\} \cdot B$$

Récap:

$$G(S) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} g(t) \xrightarrow{Ech} g(K) \xrightarrow{Z} G(Z)$$

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ y = CX + DU \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X(K+1) = G(T)\,X(K) + H(T)\,U(K) \\ y(K) = C\,X(K) + D\,U(K) \end{cases}$$

Exemple:

Soit le système linéaire suivant

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} U$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- Calculer $\Phi(t)$
- Discritiser le syst avec une péri de d'échantillonnage T

- Solution:

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(SI - A)^{-1}\right\}, \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a}\left(e^{at} - 1\right) \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix}$$

$$G(T) = \Phi(T) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{a}\left(e^{aT} - 1\right) \\ 0 & e^{aT} \end{bmatrix}$$

$$H(T) = \left\{ \int_0^T e^{A\lambda} d\lambda \right\} \cdot B$$

$$H(T) = \left\{ \int_0^T e^{A\lambda} d\lambda \right\} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, \quad e^{A\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{a}(e^{a\lambda} - 1) \\ 0 & e^{a\lambda} \end{bmatrix}$$

$$H(T) = \begin{bmatrix} \frac{b}{a} \int_0^T (e^{a\lambda} - 1) d\lambda \\ b \int_0^T e^{a\lambda} d\lambda \end{bmatrix}$$

$$H(T) = \begin{bmatrix} \frac{b}{a^2}(e^{aT} - 1) - T \\ e^{aT} - 1 \end{bmatrix}$$

Donc le système discret est :

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a}(e^{aT} - 1) \\ 0 & e^{aT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} \frac{b}{a^2}(e^{aT} - 1) - T \\ e^{aT} - 1 \end{pmatrix} u$$

résolution de l'eq d'état discrète :

Soit la représentation d'état discrète

$$\begin{cases} X(k+1) = G\,X(k) + H\,U(k) \\ X(0) \end{cases}$$

$X(1) = G\,X(0) + H\,U(0)$

$X(2) = G\,X(1) + H\,U(1)$

$X(2) = G\left(G\,X(0) + H\,U(0)\right) + H\,U(1)$

$X(2) = G^2 X(0) + G\,H\,U(0) + H\,U(1)$

$X(3) = G^3 X(0) + G^2 H\,U(0) + G\,H\,U(1) + H\,U(2)$

$$\boxed{X(k) = \underbrace{G^k X(0)}_{\text{Solution homogène}} + \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} G^{k-1-j} H\,U(j)}_{\text{Solution forcée}}}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots 3$

On pose : $\Phi(k) = G^k$ matrice discrète

cette matrice verifier

$\Phi(k+1) = G^{k+1} = G \cdot G^k$

$\boxed{\Phi(k+1) = G\,\Phi(k)}$ et $\Phi(0) = I$

$$\Rightarrow x(k) = \Phi(k)\,x(0) + \sum_{j=1}^{k-1} \Phi(k-j-1)\,H\,u(j)$$

$$x(k) = \Phi(k)\,x(0) + \sum_{j=1}^{k-1} \Phi(k)\,H\,u(k-j-1)$$

On à la réponce $y(k) = C\,x(k) + D\,u(k)$

$$\boxed{y(k) = C\,\Phi(k)\,x(0) + C\sum_{j=1}^{k-1} \Phi(k)\,H\,u(k-j-1) + D\,u(k)}$$

Pour calculer $\Phi(k)$ il faut appliquer la T Z :

$$X(k+1) = G\,X(k) + H\,u(k)$$

$$\xrightarrow{T.Z} \; Z\,X(Z) - Z\,X(0) = G\,X(Z) + H\,u(Z)$$

$$(ZI - G)\,X(Z) = Z\,X(0) + H\,u(Z)$$

$$X(Z) = (ZI-G)^{-1}\cdot Z\,X(0) + (ZI-G)^{-1}\,H\,u(Z)$$

$$\xrightarrow{TZ^{-1}} \; x(k) = Z^{-1}\left\{(ZI-G)^{-1}\cdot Z\right\} x(0) + Z^{-1}\left\{(ZI-G)^{-1}\,H\,u(Z)\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi(k) = Z^{-1}\left\{(ZI-G)^{-1}\cdot Z\right\} \\ \sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1} = Z^{-1}\left\{(ZI-G)^{-1}\,H\,u(Z)\right\} \end{cases}$$

Pour déterminer l'eq caractéristique il suffit de calculer

$$\det(zI - G)$$

Commandabilité :

La matrice de commandabilité :

$$\mathcal{C} = [H \,\vdots\, GH \,\vdots\, \cdots\cdots G^{n-1} H]$$

si Rang $\mathcal{C} = n \Rightarrow$ syst Commandable

Exemple :

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} u(k)$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathcal{C}) = -6 \neq 0$$ syst Commandable

Observabilité :

$$\Theta = \begin{bmatrix} C \\ \hline CG \\ \hline \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix}$$

si Rang $\Theta = n \Rightarrow$ syst observable

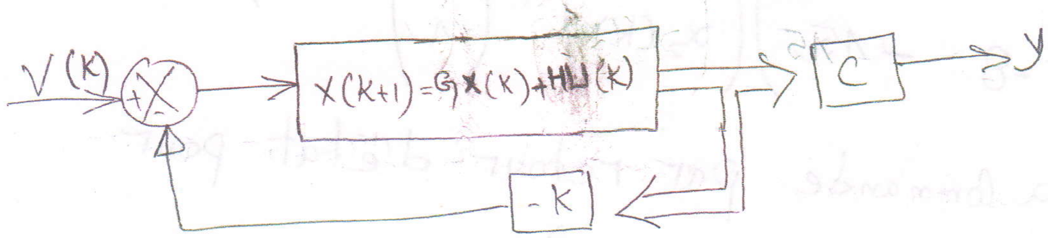
Exemple

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} u(k), \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$$

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \det \theta = 0 \Rightarrow \text{syst } \underline{\text{non}} \text{ observrable}$$

Chapitre 04 = Synthèse d'un contrôleur

1- Placement des pôles par retour d'état =



La loi de commande est une simple combinaison linéaire de forme

$$U(K) = V(K) - K X(K) = V(K) - \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & \cdots & K_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(K) \\ x_2(K) \\ \vdots \\ x_n(K) \end{pmatrix}$$

K représente un vecteur constant qu'on l'appelle vecteur de gain régulateur

$X(K+1) = G X(K) + H U(K)$ le syst à réguler (mauvais pôles)

si on remplace la loi de commande $U(K) = V(K) - K X(K)$

le système devient

$$X(K+1) = G X(K) + H (V - K X(K))$$

$$\boxed{X(K+1) = \left[G - HK \right] X(K) + H V(K)}$$

Nous remarquons que la matrice G s'est transformées en

$G-HK$ ont peut choisir nous m̂ les nouvaux poles de

$G-HK$

$$\det\left(zI-(G-HK)\right)=(z-P_1)(z-P_2)\cdots\cdots(z-P_n)$$

$P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n$ sont les pôles desirés

Exemple =

$$\begin{pmatrix} x_1(K+1) \\ x_2(K+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(K) \\ x_2(K) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(K)$$

Déterminer la commande par retour d'état pour que les pôles sont $(-0{,}25, -0{,}125)$

$$G-HK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_1 & K_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ K_1 & K_2 \end{pmatrix}$$

$$G-HK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8-K_1 & -15-K_2 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(zI-(G-HK)\right)=?$$

$$\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8-K_1 & -15-K_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & -1 \\ 8+K_1 & z+15+K_2 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(zI-(G-HK)\right) = z\left(z+15+K_2\right)+8+K_1$$

$$= z^2+15z+zK_2+8+K_1$$

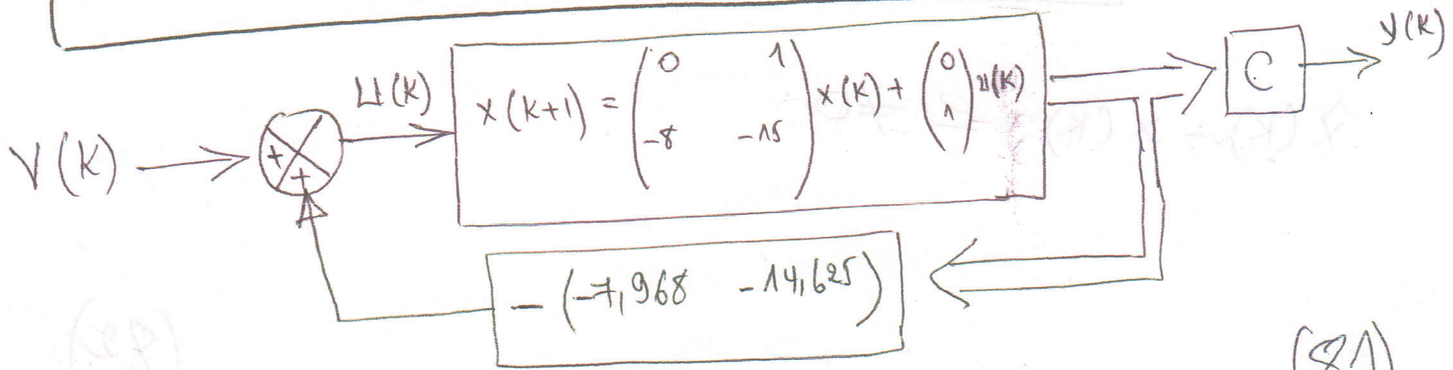
$$= z^2+z\left(15+K_2\right)+8+K_1$$

$$\left(z+0{,}25\right)\left(z+0{,}125\right) = z^2+0{,}375z+0{,}03125$$

$$\begin{cases} 15+K_2 = 0{,}375 \\ 8+K_1 = 0{,}03125 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_2 = -14{,}625 \\ K_1 = -7{,}968 \end{cases}$$

$$U(K) = V(K) - \begin{pmatrix} -7{,}968 & -14{,}625 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(K) \\ x_2(K) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{U(K) = V(K) + 7{,}968\, x_1(K) + 14{,}625\, x_2(K)}$$



(81)

Observateur d'état =

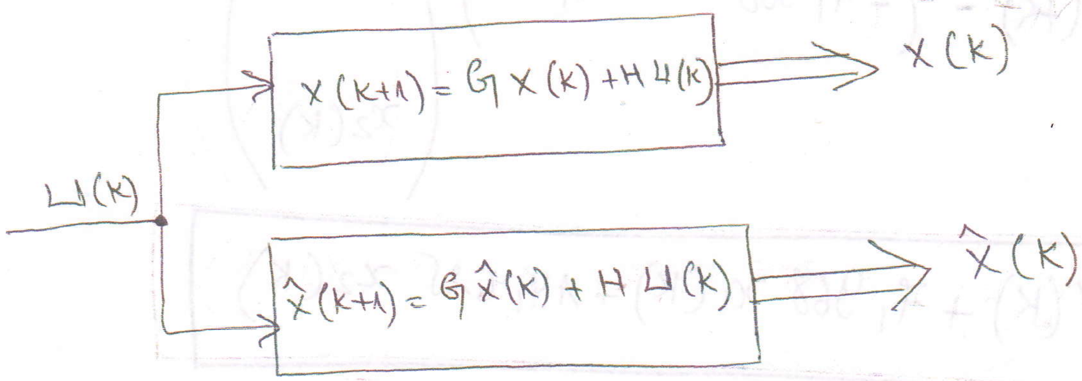
La loi de commande $U(k) = V(k) - K\,X(k)$, suppose la connaissance de $X(k)$ ce qui est inévident, il est physiquement impossible de mesuré tout les états comme par exemple dans un réacteur nécluaire il est imposible d'accéder à tout les grandeurs donc pour résoudre ce problème nous devons construire un estimateur ou observateur qui va estimer le vecteur d'état $X(k)$ a partir de l'entrée et de la sortie du système. L'estimer de X sera noté par $\hat{X}(k)$, $U(k) = V(k) - K\,X(k)$

Soit le système

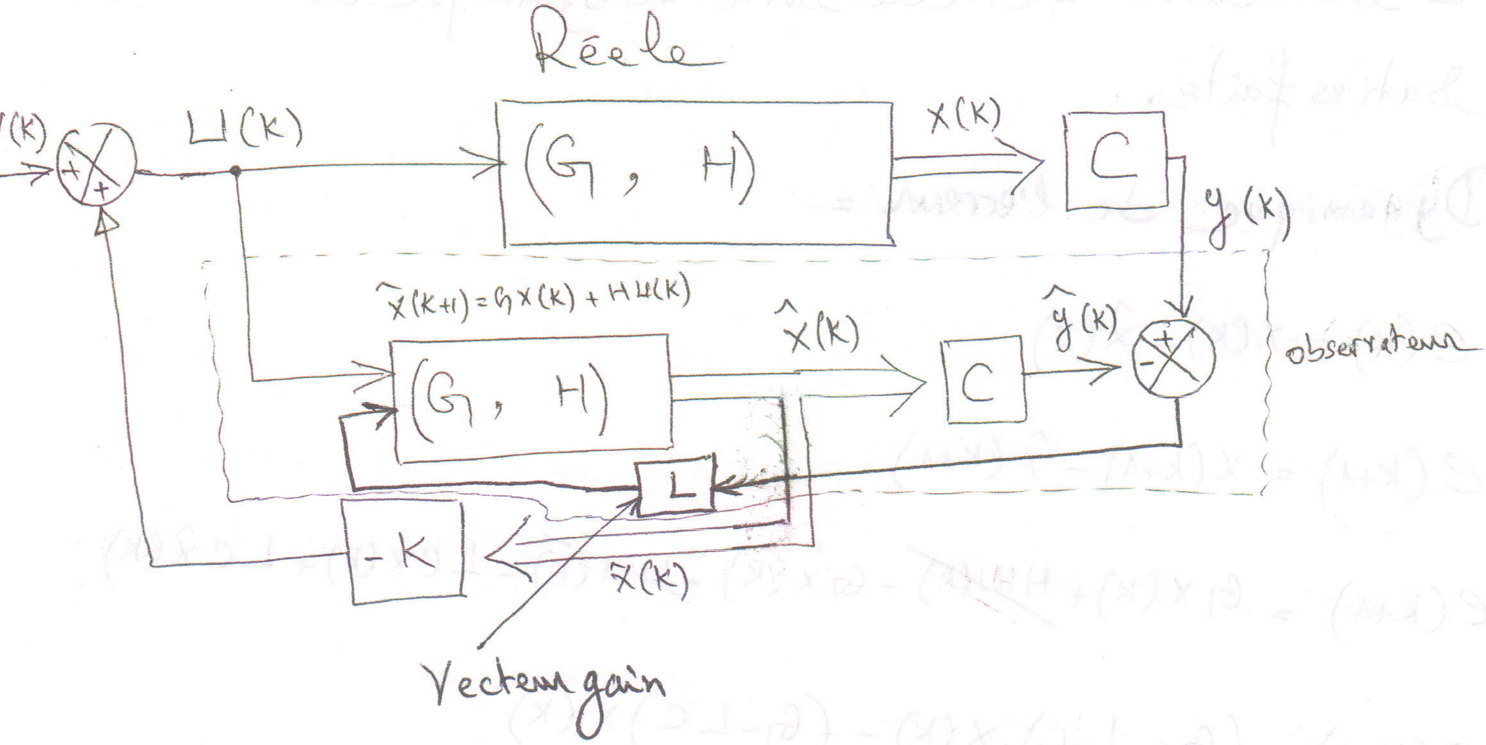
$$X(k+1) = G\,X(k) + H\,U(k)$$

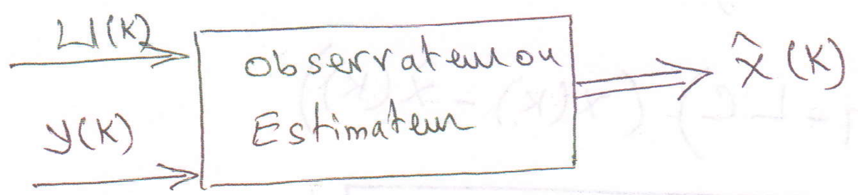
$X(k)$: non accessible (non mesurable) $\rightsquigarrow \hat{X}(k)$

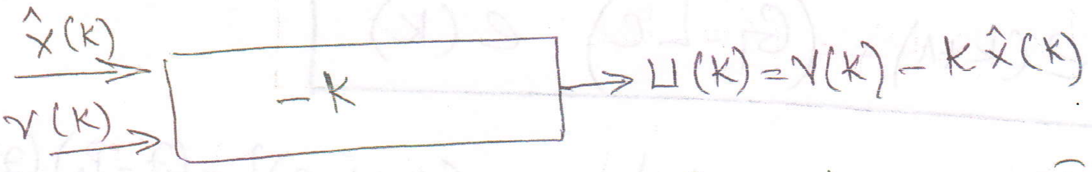
$$\hat{X}(k+1) = G\,\hat{X}(k) + H\,U(k)$$



$$\hat{X}(k) - X(k) = e \neq 0$$







Considerons le retour de la difference entre la sortie mesuré $y(K)$ et l'estimer $\hat{y}(K)$ avec se retour nous allons corrigé continuellement le modéle avec se signal d'erreur.

Calcule le vecteur gain L =

$$\hat{x}(k+1) = G\,\hat{x}(K) + H\,U(K) + L\,(y(K) - \hat{y}(K))$$

$$= G\,\hat{x}(K) + H\,U(K) + L\,(y(K) - C\,\hat{x}(K))$$

avec $L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$ = vecteur gain

$y(K) - \hat{y}(K)$: Erreur d'estimation.

L sera choisit de telle sorte la dynamique de l'erreur sera satisfaite.

Dynamique de l'erreur =

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$$

$$e(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1)$$

$$e(k+1) = Gx(k) + \cancel{Hu(k)} - G\hat{x}(k) - \cancel{Hu(k)} - LCx(k) + LC\hat{x}(k)$$

$$e(k+1) = (G - LC)\,x(k) - (G - LC)\,\hat{x}(k)$$

$$e(k+1) = (G - LC)\,(x(k) - \hat{x}(k))$$

$$\boxed{e(k+1) = (G - LC)\; e(k)}$$

il faut que $\det \{ zI - (G - LC) \} = (z - P_1)(z - P_2) \cdots (z - P_n)$

avec $P_1, P_2, \ldots, P_n$ Pole désiré (Imposé)

si L peut être choisie comme nous vollons de tel sorte que $(G-LC)$ peut avoir des valeurs propres stable se qui implique que l'erreur tend vers "0" cela veut dire que $\hat{x}(k)$ va converger ver $x(k)$

Exemple :

soit le système

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} \qquad \left(\text{Pôle imposé } \left(-\frac{1}{3}, \frac{-1}{6} \right) \right)$$

Hyp : $x(k)$ est non accessible $\longrightarrow$ estimer $\hat{x}(k)$

$$x(k+1) = G\,x(k) + H\,u(k)$$

$$\hat{x}(k+1) = G\,x(k) + H\,u(k) + L\left(C\,x(k) - C\,\hat{x}(k)\right)$$

$$e(k+1) = (G - LC)\,e(k)$$

$$G - LC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G - LC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_1 & 0 \\ l_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_1 & 1 \\ -8-l_2 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(zI - (G - LC)\right) = ?$$

$$zI - (G - LC) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -l_1 & 1 \\ -8-l_2 & -15 \end{pmatrix}$$

$$zI - (G - LC) = \begin{pmatrix} z+l_1 & -1 \\ 8+l_2 & z+15 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(zI-(G-LC)\right) = z^2 + (15+l_1)z + 15l_1 + l_2 + 8$$

$$= (z+0{,}33)(z+0{,}166)$$

$$= z^2 + 0{,}496z + 0{,}055$$

$$\begin{cases} 15 + l_1 = 0{,}496 \\ 15l_1 + l_2 + 8 = 0{,}055 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_1 = -14{,}504 \\ l_2 = 209{,}55 \end{cases}$$

Le procédé :

$x_1(k+1) = x_2(k)$

$x_2(k+1) = -8x_1(k) - 15x_2(k) + u(k)$

$y = x_1(k) \qquad u(k) = r(k) + 7{,}968\,x_1(k) + 14{,}625\,x_2(k)$

L'observateur :

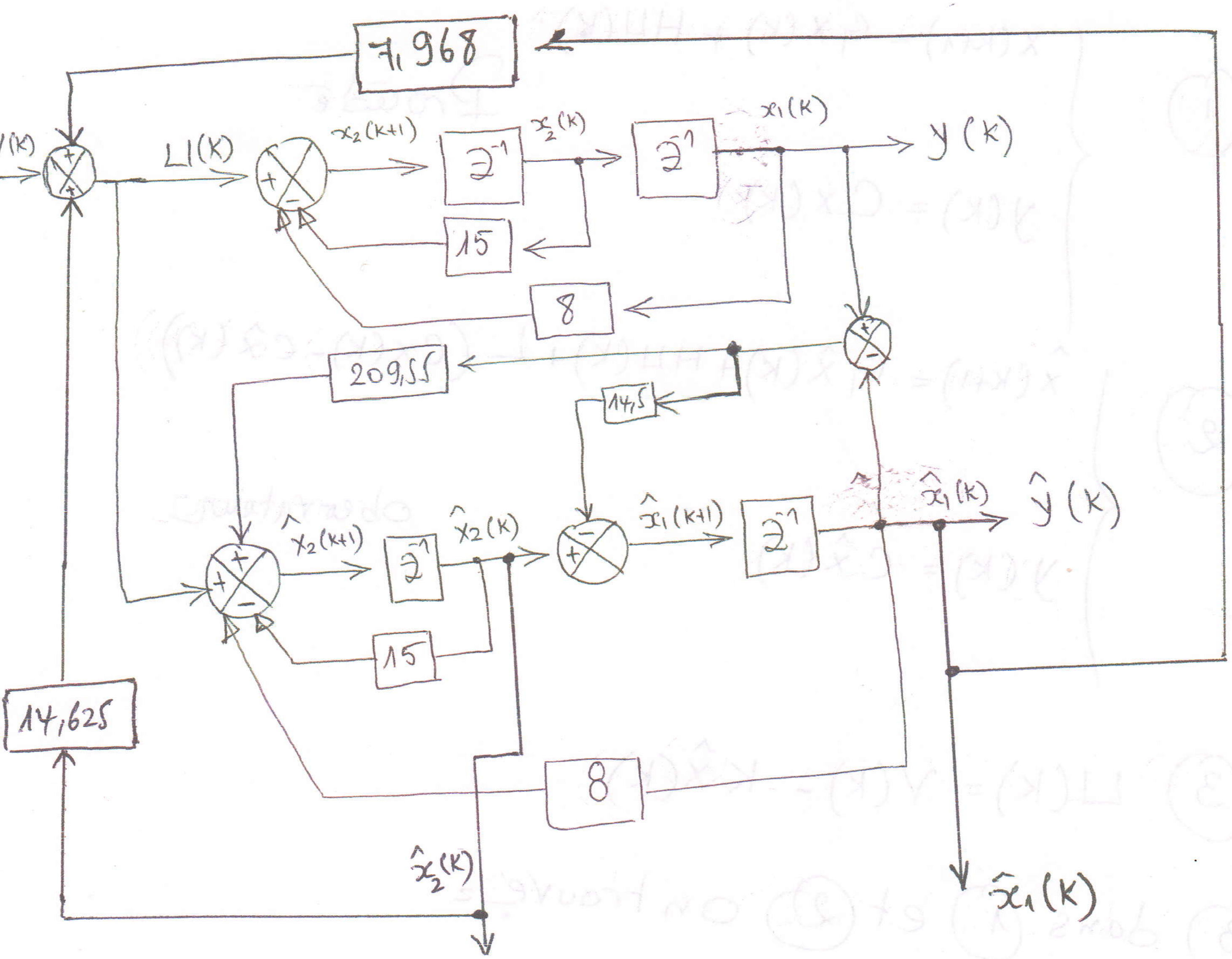
$\hat{x}_1(k+1) = \hat{x}_2(k) - 14{,}5\,(y(k) - \hat{y}(k))$

$\hat{x}_2(k+1) = -8\hat{x}_1(k) - 15\hat{x}_2(k) + u(k) + 209{,}55\,(y(k) - \hat{y}(k))$

$y = x_1(k)$

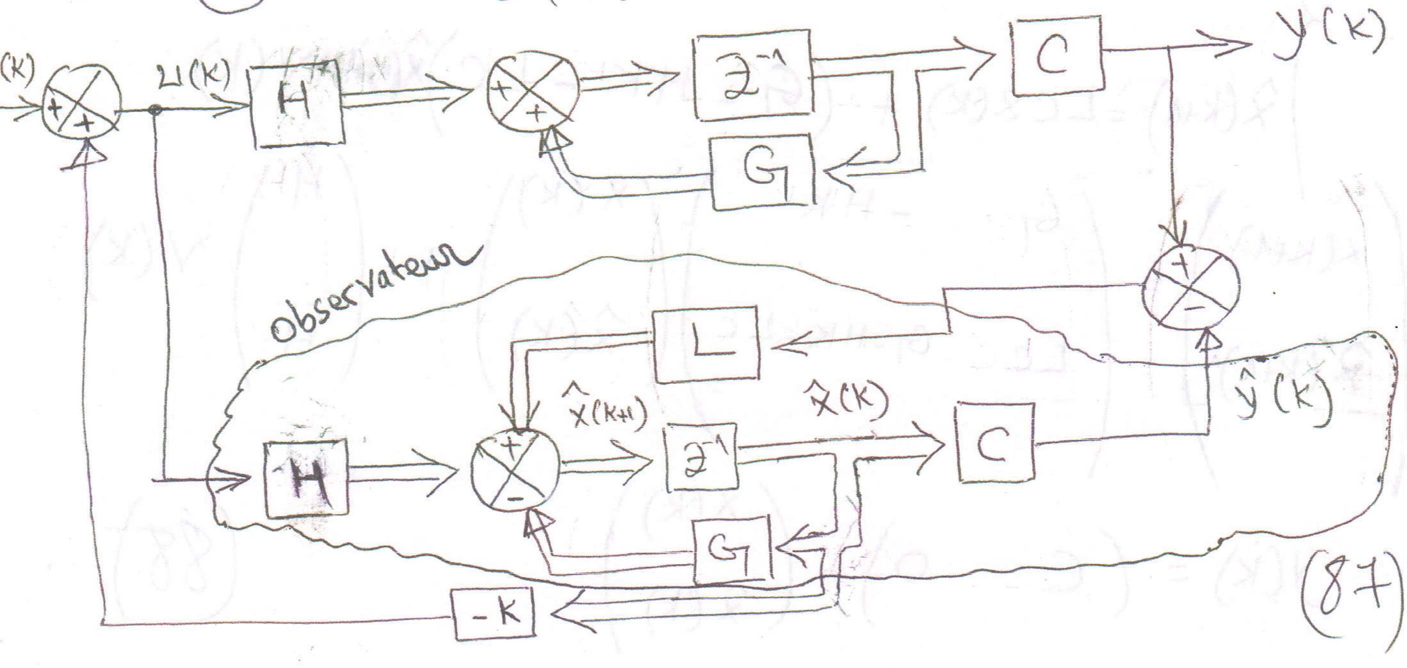
$$u(k) = r(k) + 7{,}968\,\hat{x}_1(k) + 14{,}625\,\hat{x}_2(k)$$

Diagramme de simulation (Procédé + obs + Commande)



Récap :

① Procédé + observateur + commande



Représentation d'état du Procédé + obs + Commande

① $$\begin{cases} x(k+1) = G\,x(k) + H\,u(k) \\ y(k) = C\,x(k) \end{cases}$$ Procédé

② $$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = G\,\hat{x}(k) + H\,u(k) + L\left(C\,x(k) - C\,\hat{x}(k)\right) \\ y(k) = C\,\hat{x}(k) \end{cases}$$ obervateur

③ $$u(k) = v(k) - K\,\hat{x}(k)$$

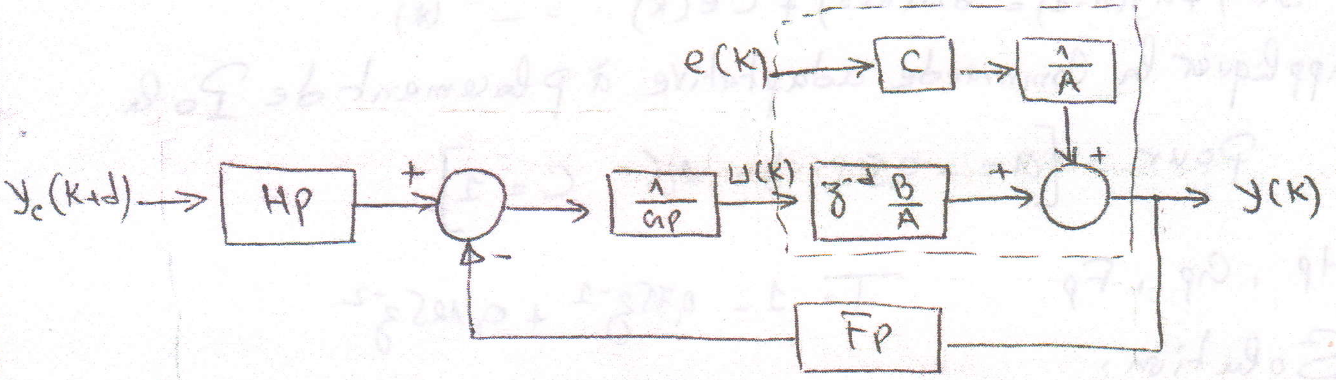
③ dans ① et ② on trouve :

$$\begin{cases} x(k+1) = G\,x(k) - HK\hat{x}(k) + H\,v(k) \\ \hat{x}(k+1) = LC\,x(k) + (G - HK - LC)\,\hat{x}(k) + H\,v(k) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ \hat{x}(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G & -HK \\ LC & G-HK-LC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H \\ H \end{pmatrix} v(k)$$

$$y(k) = \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{pmatrix}$$

③ Commande RST



La loi de Commande $\frac{1}{Gp}\left(-Fp\, y(K) + Hp\, y_c(K+d)\right) = U(K)$

Fp en z^{-1}

Gp en z^{-1}

Hp en z^{-1}

Indice de performance : stabilité en B.F

FTBF : $y(K) = \frac{BHp}{AGp + z^{-d}BFp} y_c(K) + \frac{GpC}{AGp + z^{-d}BFp} e(K)$

Eq de diophotine : $AGp + z^{-d} BFp = T.C$ T : polynome asymptotiquement stable.

FTBF : $y(K) = \frac{BHP}{T.C} y_c(K) + \frac{Gp.C}{T.C} e(K)$

Pour que : $y(K) \xrightarrow[\text{suit}]{} y_c(K)$ il faut que $\frac{BHP}{T.C} \longrightarrow 1$

Pour cela $Hp(z^{-1}) = \frac{T(z^{-1})\,C(z^{-1})}{B(z^{-1})} = \frac{T(1)\,C(1)}{B(1)} = \alpha$

$\Rightarrow Hp(z^{-1}) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \cdots$

dans le régime permanant On à

$y(K) = y_c(K) + \frac{Gp}{T} e(K)$

Exercice : Soit le syst discrét suivant :

$$y(k) + ay(k-1) = bu(k-1) + c\,e(k) \quad --- \quad (*)$$

Appliquer la Commande adaptative à placement de Pole

Pour $\left[a = -0{,}5 \;,\; b = 2{,}5 \;,\; C = 1\right]$

$H_p \,,\, G_p \,,\, F_p$ $\qquad T = 1 - 0{,}75 z^{-1} + 0{,}125 z^{-2}$

Solution :

L'equation (*) peut se réecrit

$$y(z^{-1}) + a z^{-1} y(z^{-1}) = b z^{-1} u(z^{-1}) + c\,e(z^{-1})$$

$$y(z^{-1})\left[1 + az^{-1}\right] = bz^{-1} u(z^{-1}) + c\,e(z^{-1})$$

$$y(z^{-1}) = \frac{bz^{-1}}{1+az^{-1}} u(z^{-1}) + \frac{c}{1+az^{-1}} e(z^{-1})$$

D'aprés le shéma de la cde :

$$y(z^{-1}) = z^{-d} \frac{B}{A} u(z^{-1}) + \frac{C}{A} e(z^{-1}) \Rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ B = b = 2{,}5 \\ A = 1 + az^{-1} = 1 - 0{,}5z^{-1} \\ C = c = 1 \end{cases}$$

$$H_p(z^{-1}) = \frac{T(z^{-1})\,c(z^{-1})}{B(z^{-1})}$$

On à l'equation de diophotine

$$A G_p + z^{-1} B F_p = T.C$$

$$(1 - az^{-1}) G_p + z^{-1} (2{,}5) F_p(z^{-1}) = 1 - 0{,}75 z^{-1} + 0{,}125 z^{-2}$$

$$G_p(z^{-1}) = g_0 \qquad F_p(z^{-1}) = f_0 + f_1 z^{-1}$$

$$(1-az^{-1})g_0+z^{-1}\,2{,}5\,(f_0+f_1z^{-1})=1-0{,}75z^{-1}+0{,}125z^{-2}$$

$$g_0-g_0az^{-1}+2{,}5f_0z^{-1}+f_1z^{-2}\,2{,}5=1-0{,}75z^{-1}+0{,}125z^{-2}$$

$$g_0+z^{-1}(-ag_0+2{,}5f_0)+2{,}5f_1z^{-2}=1-0{,}75z^{-1}+0{,}125z^{-2}$$

$$\begin{cases} g_0=1 \\ 2{,}5f_0-0{,}5g_0=-0{,}75 \Rightarrow f_0=\dfrac{-0{,}75+0{,}5}{2{,}5}=-0{,}1 \Rightarrow \boxed{f_0=-0{,}1} \\ 2{,}5f_1=0{,}125 \Rightarrow f_1=\dfrac{0{,}125}{2{,}5}=0{,}05 \end{cases}$$

$$\boxed{G_p=g_0=1}$$

$$\boxed{F_p=f_0+f_1z^{-1}=-0{,}1+0{,}05z^{-1}}$$

$$\boxed{H_p(z^{-1})=\frac{1-0{,}75z^{-1}+0{,}125z^{-2}}{2{,}5}}$$