Chapitre 3

Canal de transmission

1. Généralités

On appelle canal de transmission le support ou le milieu qui achemine le message entre émetteur et récepteur. Un canal discret sans mémoire (CDSM) peut être représenté par un modèle statistique d'entrée X et de sortie Y. À chaque période d'échantillonnage, on fournit au canal un symbole appartenant à X et celui-ci délivre un symbole appartenant à Y. Le canal est dit «discret» lorsque les alphabets de X et de Y sont finis. Il est dit «sans mémoire» lorsque le symbole de sortie fourni par le canal ne dépend que du dernier symbole reçu en entrée, indépendamment de tous les symboles d'entrée précédents.

2. Un canal de transmission

- Un **canal de transmission** est ce qui se passe entre l'**émission** d'un message et sa **réception.**
- Le rôle d'un canal est de transmettre des messages (« information ») d'un point (l'entrée) à un autre (la sortie).
- Un canal de transmission reçoit un message d'entrée et restitue un message de sortie.
- D'un point de vue abstrait nous le considèrerons comme une entité qui fait le lien entre deux alphabets : $X \rightarrow Y$.

2.1.Canal discret

Les deux alphabets d'entrée et de sortie sont des alphabets discrets qui comportent un nombre fini de symboles.

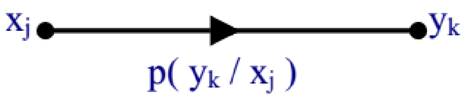
2.2.Canal sans mémoire

Le symbole courant de sortie ne dépend que du symbole courant d'entrée et ne dépend pas des précédents ni des suivants.

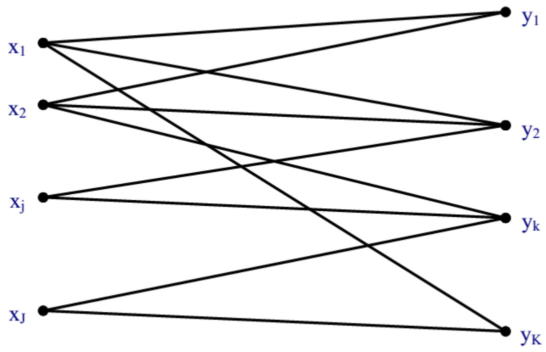
2. Représentation graphique

Le canal effectue donc le couplage entre deux alphabets. S'il est sans mémoire, lorsqu'il reçoit le symbole x_j de l'alphabet d'entrée, il a une probabilité de transmettre le symbole y_k de l'alphabet de sortie. La donnée essentielle pour comprendre le fonctionnement du canal est ainsi l'ensemble des probabilités conditionnelles $\{ p(y_k / x_j) \}$.

Cette donnée peut se représenter graphiquement grâce à un ensemble d'arcs élémentaires reliant deux sommets :



Le schéma complet du fonctionnement du canal est donné par le graphe



Chaque lien est pondéré par la probabilité conditionnelle $p(\,y_k/\,x_j)$. Si cette probabilité est nulle, nous ne plaçons pas de lien.

a. Matrice de canal

Plutôt qu'un graphe le canal est représentable par la matrice P des probabilités conditionnelles ou matrice de canal.

$$P=\left.\underbrace{\begin{bmatrix} p(y_1/x_1)\;. & . & .\;.\;.\;.\;.\;. & p(y_K/x_1) \\ \vdots & p(y_k/x_j) & & \vdots \\ p(y_1/x_J)\;. & . & .\;.\;.\;. & p(y_K/x_J) \end{bmatrix}}_{K}\right\}J$$

Première propriété:

Nous savons que : $\sum_k p(y_k|x_j)=1 \Rightarrow$la somme des éléments d'une ligne est égale à 1.

Deuxième propriété:

Rappelons les expressions de la loi de Bayes et des probabilités marginales :

$$P(x_j,y_k)=P(y_k|x_j)\,P(x_j)$$

$$P(y_k)=\sum_{j=1}^{J}P(x_j,y_k)=\sum_{j=1}^{J}P(y_k|x_j)\,P(x_j)$$

La dernière expression peut se représenter avec la matrice de canal :

$$[\dots\dots\dots.\,p(\,y_k)\dots\dots..]\;=\;[\dots\dots\dots..\,p(\,x_j)\dots\dots\dots].P$$

Ou encore:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \vdots \\ p(y_k) \\ \vdots \end{bmatrix} = P^T \begin{bmatrix} \vdots \\ p(x_j) \\ \vdots \end{bmatrix}}$$

3. Capacité d'un canal

3.1 Définition

Un canal lie deux sources d'entrée X et de sortie Y. Pour comparer la similitude de ces deux sources, nous avons à notre disposition la quantité d'information mutuelle qui est définie par :

$$I(X,Y) = I(Y,X) = \sum_{j,k} P(x_j, y_k) \log_2 \left(\frac{P(x_j, y_k)}{P(x_j)\, P(y_k)} \right)$$

Cette quantité peut être redéfinie en utilisant les probabilités conditionnelles qui définissent le canal:

$$I(X,Y) = \sum_{j,k} P(y_k|x_j)\, P(x_j)\, log \left(\frac{P(y_k|x_j)}{P(y_k)} \right)$$

Les probabilités marginales $\{ p(x_j) \}$ dépendent de la source d'entrée et donc du système de codage de canal utilisé.

Nous pouvons rechercher un système de codage qui rende maximal cette quantité, c'est ce qui définit la capacité du canal:

$$C = max_{/\{p(x_j)\}}[I(X,Y)]$$

On appelle capacité du canal, le maximum de l'information mutuelle $I(X;Y)$, pris sur toutes les probabilités possibles d'entrée.

La capacité s'exprime en bits/utilisateur de canal.

Si la cadence d'utilisation du canal est d'un symbole toute les T_c secondes, **le débit maximum du canal** sera :

C/T_c [bits/s

3.2 Canal binaire symétrique :

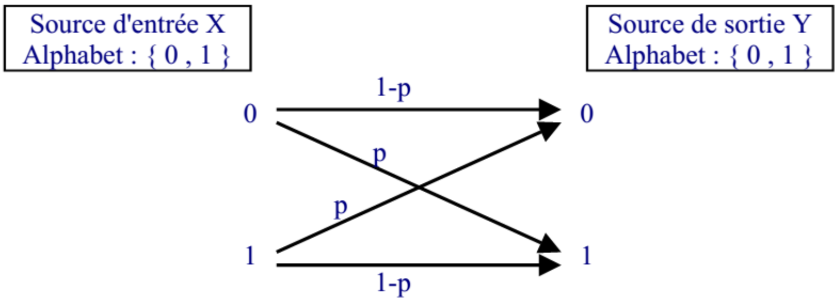
Ce modèle de canal binaire sans mémoire est le plus simple. Ses alphabets d'entrée et de sortie sont binaires :

$$X \;\rightarrow \{ x_1, x_2\}, \quad \{ p(x_1) \;=\; \alpha, \quad p(x_2) \;=\; 1-\alpha\}$$

$$Y \;\rightarrow \{ y_1, y_2\}, \; \{ p(y_1) \;=?\;, \quad p(y_2) \;=?\;\}$$

Il est caractérisé par une matrice de canal :

$$\mathrm{P} = \{p(y_k/x_i)\} = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$



Où p est la probabilité d'erreur de transmission.

Pour calculer la capacité de ce canal il nous faut calculer la quantité d'information mutuelle entre les deux sources puis déterminer la valeur de α qui la rend maximale.

$$I(X, Y) \;=\; H(Y) - H(Y/X)$$

a. Calcul des $p(y_k)$:

La deuxième propriété de la matrice de canal : $[\, p(y_k)\,] \;=\; P^T[\, p(x_j)]$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{p}(\mathrm{y}_1) \\ \mathrm{p}(\mathrm{y}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\mathrm{p} & \mathrm{p} \\ \mathrm{p} & 1-\mathrm{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\mathrm{p})\alpha + \mathrm{p}(1-\alpha) \\ \mathrm{p}\alpha + (1-\mathrm{p})(1-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - 2\mathrm{p}\alpha + \mathrm{p} \\ 1 - \alpha + 2\mathrm{p}\alpha - \mathrm{p} \end{bmatrix}$$

b. Calcul de $H(Y)$:

$$\mathrm{H(Y)} = (\alpha - 2\mathrm{p}\alpha + \mathrm{p}) \log\left(\frac{1}{\alpha - 2\mathrm{p}\alpha + \mathrm{p}}\right) + (1 - \alpha + 2\mathrm{p}\alpha - \mathrm{p}) \log\left(\frac{1}{1 - \alpha + 2\mathrm{p}\alpha - \mathrm{p}}\right)$$

$$\mathrm{H(Y/X)} = \sum_{\mathrm{j}} \mathrm{P(x_j) H(Y/x_j)} = \sum_{\mathrm{j}} \mathrm{P(x_j)} \sum_{\mathrm{k}} \mathrm{P(y_k|x_j)} \log \frac{1}{\mathrm{P(y_k|x_j)}}$$

$$H(Y/X) = \alpha \underbrace{\left[(1-p)\log\left(\frac{1}{1-p}\right) + p\log\left(\frac{1}{p}\right) \right]}_{H(Y/x_1)} + (1-\alpha) \underbrace{\left[(1-p)\log\left(\frac{1}{1-p}\right) + p\log\left(\frac{1}{p}\right) \right]}_{H(Y/x_2)}$$

$$= \left[(1-p)\log\left(\frac{1}{1-p}\right) + p\log\left(\frac{1}{p}\right) \right]$$

Ce résultat est indépendant de α.

Calcul de $I(X,Y)$:

$$I(X,Y) = H(Y) - H(Y/X)$$

c. Capacité du canal :

Il faut déterminer la valeur de α qui rend maximale $I(X,Y)$. Comme $H(Y/X)$ ne dépend pas ici de α, il suffit de rendre maximale $H(Y)$.

En posant :

$$\mathrm{f}(\alpha) = \alpha - 2p\alpha + p \Rightarrow \mathrm{H}(Y) = -\mathrm{f}(\alpha).\log(\mathrm{f}(\alpha)) - (1-\mathrm{f}(\alpha)).\log(1-\mathrm{f}(\alpha))$$

$$\frac{\mathrm{dH(Y)}}{\mathrm{d}\alpha} = -\acute{\mathrm{f}}(\alpha)\log\big(\mathrm{f}(\alpha)\big) - \mathrm{f}(\alpha)\frac{\acute{\mathrm{f}}(\alpha)}{\mathrm{f}(\alpha)} + \acute{\mathrm{f}}(\alpha)\log\big(1-\mathrm{f}(\alpha)\big) - \big(1-\mathrm{f}(\alpha)\big)\frac{-\acute{\mathrm{f}}(\alpha)}{\mathrm{f}(\alpha)}$$

$$= \acute{\mathrm{f}}(\alpha)\log\left(\frac{1-\mathrm{f}(\alpha)}{\mathrm{f}(\alpha)}\right) = (1-2p)log\left(\frac{1-\mathrm{f}(\alpha)}{\mathrm{f}(\alpha)}\right)$$

Pour que $I(X,Y)$ soit maximale il faut que :

$$1 - f(\alpha) = f(\alpha) \Rightarrow f(\alpha) = ½ = \alpha - 2p\alpha + p \Rightarrow \alpha = (½ - p)/(1-2p) = ½$$

La capacité du canal est atteinte lorsque les deux symboles de la source d'entrée sont équiprobables.

$$\{p(x1) = 1/2, p(x2) = 1/2\} \Rightarrow \{p(y1) = 1/2, p(y2) = 1/2\}$$

$$H(Y) = 1/2\, log(2) + 1/2\, log(2) = 1\, bit.$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{C = 1 - p\log\left(\frac{1}{\mathit{p}}\right) - (1-\mathit{p})\,\mathit{log}\left(\frac{1}{1-\mathit{p}}\right)}}$$

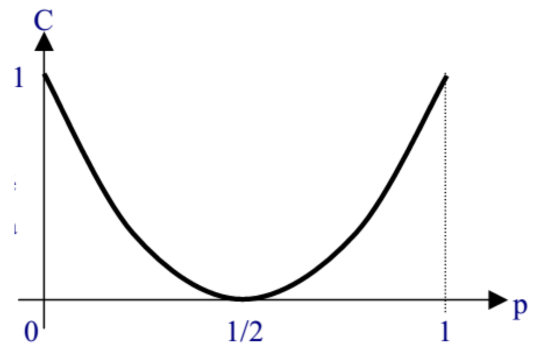
Nous vérifions rapidement que :

$$p = 0 \Rightarrow C = 1.$$

$p = 1 \Rightarrow C = 1.$

La capacité est minimale pour $p = 1/2 \Rightarrow C = 0.$

Ce qui donne le graphe suivant :



Nous retrouvons les conclusions de l'illustration de la notion de quantité d'information mutuelle : lorsque la probabilité d'erreur est de 50% , la capacité du canal est nulle, lorsqu'elle est égale à 0% ou 100% la capacité du canal est maximale (une erreur de 100% correspond à une simple inversion des bits "0" et "1" par le canal).

II.3 Canal binaire à effacement :

C'est un modèle dérivé du canal binaire sans mémoire dans lequel une erreur de transmission génère une forme d'onde différentes de celles associées aux deux symboles binaires ainsi, l'alphabet de sortie comprend trois caractères, le troisième étant l'effacement "E" qui correspond à une erreur de transmission..

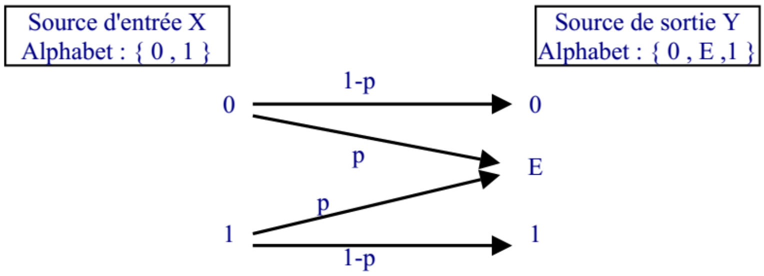
Ses alphabets d'entrée et de sortie sont :

$$X \rightarrow \{ x1 = "0" , x2 = "1" \} , \{ p(x1) = \alpha, \quad p(x2) = 1 - \alpha\}$$

$$Y \rightarrow \{ y1 = "0" , y2 = "E" , y3 = "1" \} , \{ p(y1) = ? , p(y2) = ? , p(y3) = ? \}$$

Il est caractérisé par une matrice de canal :

$$P = \left\{ p(y_k/x_j) \right\} = \begin{bmatrix} 1\text{-}p & p & 0 \\ 0 & p & 1\text{-}p \end{bmatrix}$$



Où p est la probabilité d'erreur de transmission.