Examen de LaTeX

Master (EDP + Ana. Fonct.)

Nom et Prénom

date

Résumé

L'examen consiste à reproduire, en utilisant TeXnicCenter, les deux pages du sujet. Utiliser la classe `article` avec les options `a4paper,11pt`.

Table des matières

1 Quelques propriétés des L^p

1.1 Convergence simple et convergence dans L^1

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $(f_n) \subset L^1(\mathbb{R})$ telle que

1. $\lim_{n\to+\infty} \int_R f_n dx = \int_R f dx$.
2. $\forall n \geq 1$, f_n est positive
3. f_n converge p.p. vers f,

alors $\int_{\mathbb{R}} |f_n - f|\, dx \to 0$.

1.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $f, g \in L^2\,(a, b)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

$$\left(\int_a^b fg dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2 dx \times \int_a^b g^2 dx. \tag{1}$$

L'inégalité (1) est un cas particulier de l'inégalité de Hölder [1].

1. Ernst Hölder, mathématicien allemand, 1901 1990.

2 Une EDP

2.1 Le problème

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On considère le problème d'évolution suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 t} - \Delta u = f, & \text{dans } \Omega \times \left]0, T\right[, \\ u|_\Sigma = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times \left]0, T\right[, \\ u(0) = u^0, \;\; u'(0) = u^1 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{2}$$

avec

$$u^0 \in H_0^1(\Omega), \;\; u^1 \in L^2(\Omega) \;\; \text{et} \;\; f \in L^2(Q), \tag{3}$$

Remarque 2.1 *La première égalité a lieu au sens du distribution* (*cf.* [2]).

2.2 Éxistence et unicité

On a le théorème suivant (cf. [1])

Théorème 2.2 *Avec les donneés initiales* (3), *il existe une solution unique u de* (2) *qui satisfait*

$$u \in C\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right), \quad u' \in C\left(0, T; L^2(\Omega)\right), \quad u \in L^2\left(0, T; H^{-1}(\Omega)\right).$$

Lemma 2.3 *La solution u du problème* (2) *satisfait*

$$\int_\Omega \left|u'(t)\right|^2 dx + \int_\Omega \left|\nabla u(t)\right|^2 dx = \int_\Omega \left|u^1\right|^2 dx + \int_\Omega \left|\nabla u^0\right|^2 dx + 2\int_0^t \int_\Omega f u' dx ds.$$

3 LaTeX Vs Word

Comparer Microsoft Word avec TeXnicCenter ?

LaTeX	Word
....	....
....	....
....	....
....	....

Références

[1] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, AMS, Providence, RI, **2010**.

[2] L. Schwartz. *Théorie des distributions*. Hermann, 1966.

Good LaTeX

Examen de LaTeX

Master EDP & applications

Nom et Prénom

date

Résumé

L'examen consiste à reproduire, en utilisant TeXnicCenter, les deux pages du sujet. Utiliser la classe `article` avec les options `a4paper,11pt` et les packages packages `amsfonts` et `amsmath`.

1 Vibrations d'une corde de longueur infini

Le modèle simplifié est donné par

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \text{for} \;\; x \in \mathbb{R},\; t > 0 \tag{1.1}$$

où $c > 0$ est une constante.

1.1 Solution Générale

Théorème 1.1 *La solution générale de* (1.1) *est donnée par*

$$u = f(x+ct) + g(x-ct) \tag{1.2}$$

où f et g sont deux fonctions de $C^2(\mathbb{R})$.

Remarque 1.2 *Pour la démonstration du théorème* 1.1, *voire* [2].

1.2 Problème à valeurs initiales

Si $u_0 \in C^2$ et $v_0 \in C^1$, alors l'équation (1.1) avec les données initiales

$$u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = v_0(x), \;\text{sur}\; \mathbb{R} \tag{1.3}$$

a une solution unique $u \in C^2$ donnée par [1]

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x+ct) + u_0(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s)ds.$$

1. Cette formule est due à D'Alembert 1746.

2 Vibration d'une corde de longueur variable

Pour $T > t_0 > 0$ et $0 < \ell < 1$, on considère le problème suivant

$$\begin{cases} \phi_{tt} - \phi_{xx} = 0, & x \in (0, \ell t), t \in (t_0, T), \\ \phi(0,t) = 0, \quad \phi(\ell t, t) = 0, & t \in (t_0, T), \\ \phi(x, t_0) = \phi^0(x), \ \phi_t(x, t_0) = \phi^1(x), & x \in (0, \ell t_0), \end{cases} \tag{2.1}$$

N. Balazs [1] a démontrer le résultat suivant

Théorème 2.1 *Il existe une solution unique solution de* (2.1) *donnée par*

$$\phi(x,t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \left(e^{in\pi\alpha_\ell \log(t+x)} - e^{in\pi\alpha_\ell \log(t-x)} \right) \quad \textit{où } \alpha_\ell = 2/\log\left(\frac{1+\ell}{1-\ell}\right).$$

3 Editeurs et Distributions

1. Citer 3 éditeurs de LaTeX :
   (a) ....
   (b) ....
   (c) ....
2. Citer 2 distributions de TeX ?
   (a) ....
   (b) ....

Table des matières

Références

[1] N. Balazs. *J. Math. Anal. Appl.*, 3 :472–484, **1961.**

[2] L. C. Evans, *PDEs,* AMS, Providence, RI, **2010**.

Good LaTeX

Examen de $\LaTeX$– Master 1, EDP & Applications

Name and First name

Date

Abstract

L'examen consiste à reproduire, en utilisant $\TeX$nicCenter, les deux pages du sujet. Utiliser la classe `article` avec les options `a4paper,11pt` et les packages `amsfonts` et `amsmath`.

1 Some PDE

Some PDE from mathematical physics:

$$
\begin{align}
u_t &= \triangle u, & \textit{Heat} \tag{1}\\
\triangle u &= k^2 u, & \textit{Helmoltz} \tag{2}\\
u_{tt} &= c^2 \triangle u - m^2 u, & \textit{Klein} - \textit{Gordon} \tag{3}
\end{align}
$$

2 A theorem and a matrix

2.1 Divergence theorem

Let Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ with boundary $\partial\Omega$.

Theorem.

$$\int_\Omega \partial_{x_k} u dx = \int_{\partial\Omega} u \ \nu_k dS, \quad k = 1, \cdots, n \tag{Div}$$

where ν is the normal vector on $\partial\Omega$.

2.2 Magical matrix

The following Matrix is magical of ordre 3

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & \begin{vmatrix} \ell & \pi \\ 0 & 2/\ell \end{vmatrix} \end{pmatrix} \tag{Magic}$$

3 Integration

3.1 Riemann Integration

If the function f is Riemann summable on $[a, b]$, then

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left[a + i(\frac{b-a}{n})\right]. \tag{4}$$

1. Cauchy-Schwarz's inequality:

$$\|fg\|_{L^1(a,b)} \leq \|f\|_{L^2(a,b)} \times \|g\|_{L^2(a,b)}\,. \tag{5}$$

2. Inequality (5) is a particular case of the Hölder [1] inequality.

3. See [1, 2] for other proprieties.

3.2 A semi-convergent integral

The function $\sin x/x$ is not summable on $\mathbb{R}^+$ in the sense of Riemann. However, using the formula (4), we can show that

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^n \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Contents

References

[1] A. GRAMAIN, *Intégration*, Hermann, Paris, **1988**.

[2] A. SENGOUGA, *Cours de Mesure et Intégration*, Univ. M'sila, **1981**.

Written by $\LaTeX 2_\varepsilon$.

[1] Ernst Hölder, a German mathematician, 1901–1990.