.

Université Mohamed Boudiaf-M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'informatique
Département des Mathématiques

Module: **Probabilités,**
2 ième Année Licence LMD,
Année universitaire: 2021/2022

Série d'exercices N° : 4
Lois discrètes

1-Loi discrète Uniforme.:

- $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
- Pour tout x_i on a $\mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{n}$.
- $E(X) = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}, V(X) = \frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n} - (E(X))^2$

2-Loi de Bernoulli ($X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$).

- $X(\Omega) = \{0, 1\}$.
- $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = q$ où $q = 1 - p$.

$E(X) = p, V(X) = pq$.

3-Loi binomiale ($X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$).

- $X(\Omega) = \{0, 1, ..., n\}$.
- $\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, où $q = 1 - p$.
- $E(X) = np$, $V(X) = npq$.

4-Loi gémétrique ($X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$).

- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^* : \mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1}$ où $q = 1 - p$.
- $E(X) = \frac{1}{p}$, $V(X) = \frac{q}{p^2}$

5-Loi Hypergéométrique ($X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$):

- $X(\Omega) = \begin{cases} \{0, 1, ..., n\} & \text{si } n \leq Np \\ \{0, 1, ..., Np\} & \text{si } n > Np \end{cases}$.
- Pour tout $k \in \{0, 1, ..., n\} : \mathbb{P}(X = k) = \frac{C_{Np}^k \times C_{Nq}^{n-k}}{C_N^n}$, où $q = 1 - p$.
- $E(X) = np$, $V(X) = npq\frac{N-n}{N-1}$

6-Loi de Poisson ($X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$).

- $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.
- $E(X) = \lambda, V(X) = \lambda$.

<u>Série d'exercices N° : 4</u>

Exercice 1 (Cours) (*Loi binomiale*)**:**

Une salle de cinéma peut accueillir 10 personnes. Chaque personne a une probabilité de 0.3 pour que ne vienne pas après la réservation. Soit X la variable aléatoire définit comme étant " *le nombre de personnes parmi* 10 *qui viennent après réservation* ".

(1) Quelle est la loi de X ?
(2) Calculer son espérance et l'écart-type ?
(4) Quelle est la probabilité pour que X soit égal à 5?

Exercice 2 (*Loi binomiale*)**:**

On lance une pièce de monnaie 60 fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir 25 Pile.

Exercice 3 (Cours) (*Loi de poisson*)**:**

Une usine produit des bouteilles d'eau. Parmi celles-ci, 3% sont défectueuses. On appelle X la variable aléatoire qui, à tout lot de bouteilles prises au hasard, associe le nombre de bouteilles défectueuses. On admet que X suit une loi de Poisson de paramètre 3. Déterminer la probabilité qu'un tel lot ait 02 bouteilles défectueuses.

Exercice 4 (*Loi de poisson*)**:**

Un magasin spécialisé reçoit en moyenne 4 clients par jour, le nombre de clients étant distribué selon une loi de Poisson. Calculer la probabilité que le magasin soit visité le Mercredi par:

(1) aucun client ; (2) 2 clients ; (3) au moins 3 clients.

Exercice 5 (Cours) (*Loi géométrique*)**:**

Dans une maternité, on observe les nouvelles naissances. On considère la variable aléatoire X : " *le nombre de naissances pour obtenir une fille* ". On note que la probabilité de naissance d'une fille ou d'un garçon est égale à $\frac{1}{2}$.
(1) Quelle est la loi de X ?
(2) Calculer son espérance, variance et l'écart type ?
(3) Quelle est la probabilité d'obtenir une faille dans la Cinquième naissance?

Exercice 6 (*Loi géométrique*)**:**

On lance un dé continuellement jusqu'a l'obtention de 6. Soit X le nombre de lancers nécessaires.

(1) Quelle est la probabilité d'obtenir un premier 6 au deuxième lancer ?
(2) Quelle est la probabilité qu'il faille plus de 10 lancers pour obtenir un 6 ?

Exercice 07 (exercice pour l'étudiant) (*Loi hypergéométrique*)**:**
Dan un concours oral, il y en a 100 sujets; les candidats tirent trois sujets et choisissent alors un sujet parmi ces trois sujets. Chaque candidat a déjà révisé 60 sujets sur les 100.
(1) Quelle est la probabilité pour que le candidat a révisé :
  (a) les trois sujets tirés ;
  (b) exactement deux sujets sur les trois sujets;
  (c) aucun des trois sujets.
(2) Définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance et variance.

Université Mohamed Boudiaf-M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'informatique
Département des Mathématiques

Module: **Probabilité,**
2 ième Année Licence LMD,
Année universitaire: 2017/2018

Solutions de la série N° : 4
Variables aléatoires discrètes

Solution de l'exercice 1:

Soit X la variable aléatoire définit par :"*nombre de clients qui viennent après réservation parmi* 10".

(1) La loi de X est une loi binomiale de paramètres $n = 10$, $p = 0.7$.
(2) Son espérance est $np = 7$,
(3) Son écart-type est

$$\begin{aligned}\sigma_X &= \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10 \times (0.7) \times (0.3)} \\ &= \sqrt{2.1}\end{aligned}$$

(4) La probabilité pour que X soit égal à 5 est

$$\mathbb{P}(X = 5) = C_{10}^{5}(0.7)^5(0.3)^5$$

Solution de l'exercice 2 :

Soit X une variable aléatoire qui compte *le nombre d'apparition de Pile*. Donc

$$X(\Omega) = \{0, 1, ..., 60\}.$$

La loi de X est une loi binomiale de paramètres $n = 60$, $p = \frac{1}{2}$. Alors,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 25) &= C_{60}^{25}\left(\frac{1}{2}\right)^{25}\left(\frac{1}{2}\right)^{60-25} \\ &= \frac{C_{60}^{25}}{2^{60}}\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3 :

On a

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{(3)^2}{2!}e^{-3} = \frac{9}{2e^3} = 0.22.$$

Solution de l'exercice 4 :

(1) $\mathbb{P}(X=0)=\frac{(4)^0}{0!}e^{-4}=\frac{1}{e^4}=0.02.$;
(2) $\mathbb{P}(X=2)=\frac{(4)^2}{2!}e^{-4}=\frac{8}{e^4}=0.15$;
(3) $\mathbb{P}(X\geq 3)=1-\mathbb{P}(X=2)-\mathbb{P}(X=1)-\mathbb{P}(X=0)$

Solution de l'exercice 5 :

(1) X est la variable aléatoire qui suit la loi géométrique. On a

$$X\left(\Omega\right)=\mathbb{N}^* \text{ et } p=\frac{1}{2}$$

et

$$P\left(X=k\right)=p\times\left(1-p\right)^{k-1}, k\in\mathbb{N}^*$$

(2) $E\left(X\right)=\frac{1}{p}$ et $V\left(X\right)=\frac{1-p}{p^2}$.
(3) $P\left(X=5\right)=p\times\left(1-p\right)^{5-1}$.

Solution de l'exercice 6 :

On définit la variable aléatoire X : "*nombre de tirages nécessaires pour obtenir* 6". On a

$$X\left(\Omega\right)=\mathbb{N}^*.$$

et

$$\begin{aligned} P\left(X=k\right) &= p\times\left(1-p\right)^{k-1}, k\in\mathbb{N}^* \\ E\left(X\right) &= \frac{1}{p} \\ V\left(X\right) &= \frac{1-p}{p^2} \end{aligned}$$

Avec $p=\frac{1}{6}$.
(1) $P\left(X=2\right)=\frac{1}{6}\times\left(1-\frac{1}{6}\right)^{2-1}=\frac{5}{36}$.
(2) $P\left(X>10\right)=1-P\left(X\leq 10\right)$ avec

$$\begin{aligned} P\left(X\leq 10\right) &= \sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{6}\right)\times\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{6}\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}}{1-\frac{5}{6}} \\ &= 1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 7:

La variable aléatoire associée à ce problème est X : «nombre de sujets révisés parmi les 3». On a

$$X\left(\Omega\right)=\left\{0,1,2,3\right\}.$$

(1)

(a) Les trois sujets tirés ont été révisés :

$$\mathbb{P}\left(X=3\right)=\frac{C_{60}^{3}}{C_{100}^{3}}.$$

(b) Deux des trois sujets tirés ont été révisés :

$$\mathbb{P}\left(X=2\right)=\frac{C_{40}^{1}\times C_{60}^{2}}{C_{100}^{3}}.$$

(c) Aucun des trois sujets :

$$\mathbb{P}\left(X=0\right)=\frac{C_{40}^{3}}{C_{100}^{3}}.$$

(2) La loi de X est une loi *hypergéométrique* puisque:

$$\mathbb{P}\left(X=k\right)=\frac{C_{Np}^{k}\times C_{N(1-p)}^{3-k}}{C_{N}^{k}},0\leq k\leq 3.$$

où

$$\left\{\begin{array}{c} N=100 \\ p=0.6 \end{array}\right.$$

Alors

$$\begin{array}{rcl} E\left(X\right) & = & 3\times 0.6=1.8 \\ V\left(X\right) & = & 3\times 0.6\times 0.4\dfrac{100-3}{100-1} \\ & = & 0.72\times 0.98=0.70 \end{array}$$