

Chapitre 2

Statique des fluides

Partie b : Pression sur une paroi

2.7 Forces de pression des fluides sur des surfaces

L'étude des forces exercées par les fluides sur la paroi d'une structure a pour but de faire assurer sa résistance. Quatre caractéristiques d'une force hydrostatique à définir : la grandeur, la direction, le sens et le point d'application.



Aquarium



Réservoir métallique



Barrage hydraulique

2.7.1 Résultante des forces exercées sur une surface plane

Deux méthodes de traitement ont été utilisées pour déterminer la résultante des forces de pression : Méthode graphique et méthode analytique.

2.7.1.1 Méthode graphique

Il s'agit de tracer la variation de la pression sur une surface (variation linéaire de la pression en fonction de la profondeur).

La méthode est basée sur l'application des étapes suivantes :

Etape 1 : Limiter la surface d'étude S (surface mouillée) ;

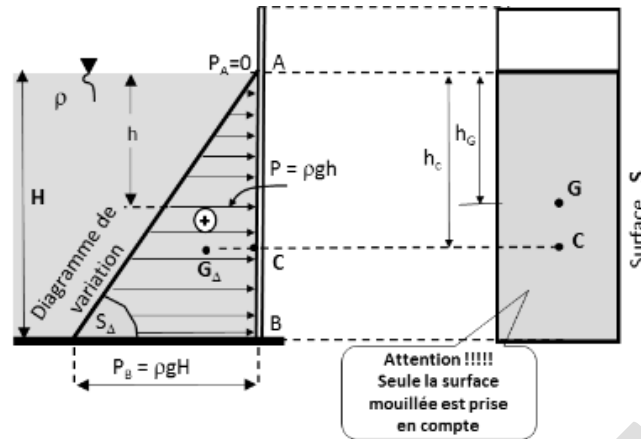
Etape 2 : Calculer la pression aux extrémités A et B de la surface S ;

Etape 3 : tracer le diagramme de variation de la pression (fonction linéaire) entre les extrémités A et B ;

Etape 4 : Calculer la surface S_{Δ} (dans le cas de 2D) ou V_{Δ} (dans le cas de 3D) ;

Etape 5 : Calculer l'intensité de la résultante des forces $F_R = S_{\Delta}$ ou $F_R = V_{\Delta}$;

Etape 6 : Point d'application (C) de F_R est la projection du centre de gravité G_{Δ} de la surface S_{Δ} ou le volume V_{Δ} sur la surface d'étude S .

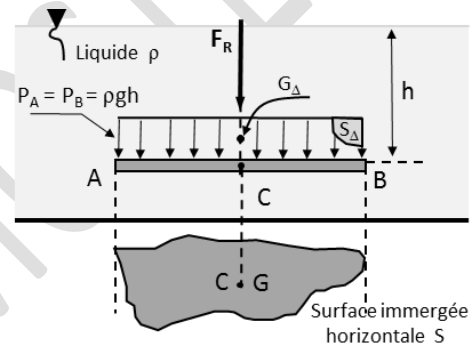


a) Surface plane horizontale

La résultante des forces F_R exercée par un liquide sur une surface plane S est égale au poids du liquide qui se trouve au-dessus, *appliquée au centre de gravité de S* .

$$F_R = S_{\Delta} = P \cdot S = \rho \cdot g \cdot h \cdot S \quad [N] \quad (2-16)$$

- Direction : verticale
- Le sens : de l'intérieur du liquide vers la surface étudiée.
- Le point d'application (c) :
 $h_C = h =$ centre de gravité de S



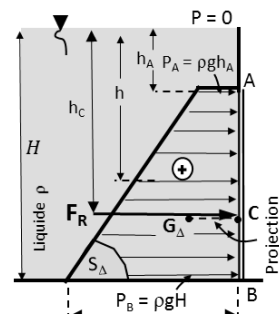
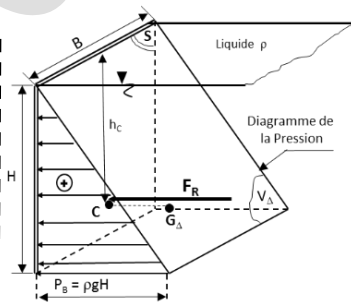
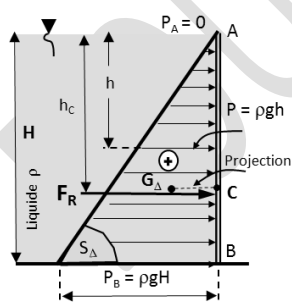
b) Surface plane verticale

La surface latérale à étudier est celle de $\overline{AB}$.

Cas n° 1 (2D)

Cas n° 2 (3D)

Cas n° 3 (2D)



- L'intensité :

$$F_R = S_{\Delta} = \frac{P_B \cdot H}{2}$$

$$F_R = V_{\Delta} = \frac{P_B \cdot H}{2} \cdot B$$

$$F_R = S_{\Delta} = \frac{P_A + P_B}{2} (H - h_A)$$

- Point d'application :

$$h_C = \frac{2H}{3}$$

$$(h_C = \frac{2H}{3}, x_C = \frac{B}{2})$$

$$h_C = h_A + \frac{(H - h_A)}{3} \left[\frac{2H + h_A}{H + h_A} \right]$$

- Direction : horizontale
- Le sens : de l'intérieur du liquide vers la surface étudiée.
- Le point d'application (C) : Projection du centre de gravité de S_Δ ou V_Δ sur la surface d'étude (S).

2.7.1.2 Méthode analytique

a) Surface plane inclinée

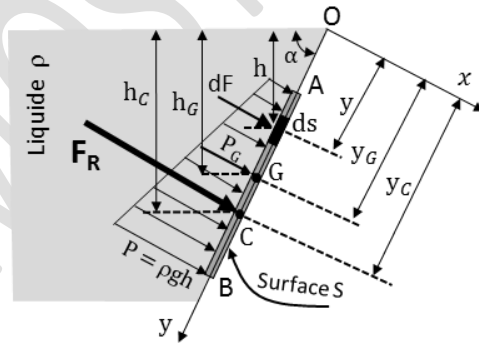
Soit une surface plane $\overline{AB}$ inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale est immergée dans un liquide de masse volumique ρ .

Etablissons l'expression de la résultante (F_R) des forces de pression appliquée sur la surface S. Dans la mesure où la pression varie sur la surface, nous pouvons diviser S en surfaces élémentaires pour maintenir une pression constante dans chaque surface élémentaire (dS). Considérons pour cela la force élémentaire $d\vec{F}$ s'exerçant sur une surface élémentaire dS , voir la figure :

Intensité F_R

$$dF = P \cdot dS = \rho \cdot g \cdot h \cdot dS$$

La force résultante F_R est égale à l'intégrale de $d\vec{F}$ sur toute la surface S :



$$F_R = \int dF = \int_S P \cdot dS = \int_S \rho \cdot g \cdot h \cdot dS ; \quad h = y \cdot \sin(\alpha)$$

D'où :

$$F_R = \int_S \rho \cdot g \cdot y \cdot \sin(\alpha) \cdot dS = \rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) \int_S y \cdot dS =$$

Le terme $\int_S y \cdot dS$ représente le moment statique de la surface S par rapport à $\overrightarrow{Ox}$:

$$\int_S y \cdot dS = y_G \cdot S \quad y_G : \text{ordonnée du centre de gravité de la surface S.}$$

L'expression de F_R devient :

$$F_R = \rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot y_G \cdot S \quad \text{avec :} \quad \sin(\alpha) \cdot y_G = h_G$$

h_G : est la profondeur du centre de gravité de la surface S.

$$F_R = \rho \cdot g \cdot h_G \cdot S = P_G \cdot S \quad [N] \quad (2-18)$$

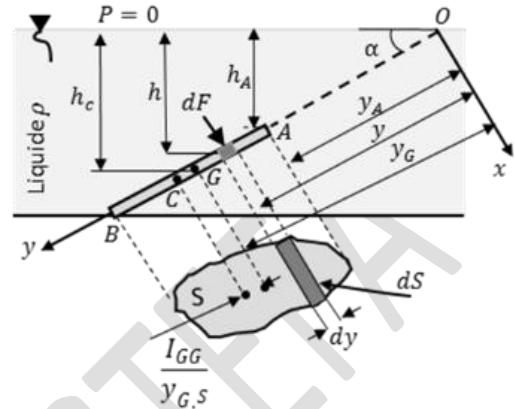
P_G : est la pression au centre de gravité de la surface S

- Point d'application de F_R :

Pour déterminer la profondeur du point d'application (h_C), nous utilisons le principe des moments, voir la figure ci-dessous. Le moment de la résultante des forces par rapport au point O est égal à la somme des moments élémentaires de $d\vec{F}$:

$$\sum_{AB} \mathcal{M}_i = \mathcal{M}_{O/F_R} = F_R \cdot y_C = \rho \cdot g \cdot h_G \cdot S \cdot y_C$$

$$\begin{aligned} \sum_{AB} \mathcal{M}_i &= \int_S y dF = \int_S y \rho \cdot g \cdot y \cdot \sin(\alpha) dS \\ &= \rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) \int_S y^2 \cdot dS \end{aligned}$$



$\int_S y^2 \cdot dS$ représente le moment d'inertie (I_{Ox}) de la surface S par rapport à l'axe $\overrightarrow{Ox}$.

$$\rho \cdot g \cdot y_G \cdot \sin(\alpha) \cdot y_C \cdot S = \rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot I_{Ox} \quad \text{Donc : } y_C = \frac{I_{Ox}}{y_G \cdot S}$$

L'utilisation du théorème de Huygens permet d'écrire que :

$$I_{Ox} = I_{GG} + y_G^2 \cdot S \quad (2-19)$$

I_{GG} : Moment d'inertie de la surface S par rapport à un axe passant par son centre de gravité.

$$\text{L'expression de } y_C \text{ devient : } y_C = y_G + \frac{I_{GG}}{y_G \cdot S} \quad \text{ou} \quad y_C = y_G + \frac{K_{GG}^2}{y_G} \quad ; \quad K_{GG} = \sqrt{\frac{I_{GG}}{S}}$$

- K_{GG} : Rayon de giration de la surface S par rapport à l'axe passant par son centre de gravité.

- Direction : parallèle à la normale de la surface S.
- Sens : de l'intérieur du liquide vers la surface S.

Remarque

Le point d'application de la résultante F_R se trouve plus bas que le centre de gravité (G) d'une distance égale à $\frac{I_{GG}}{y_G \cdot S}$ ou $\frac{K_{GG}^2}{y_G}$

b) Surface plane verticale

- Intensité $|F_R|$

Pour un angle de $\alpha = 90^\circ \Rightarrow \sin(\alpha) = 1$, les formules précédentes deviennent :

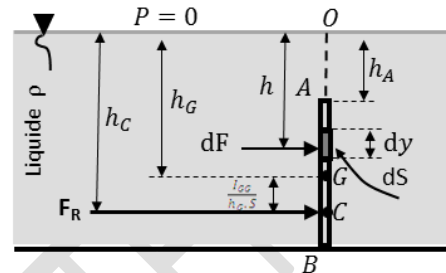
$$F_R = P_G \cdot S = \rho \cdot g \cdot h_G \cdot S \quad [N] \quad (2-20)$$

P_G : Pression au centre de gravité de la surface S

- Point d'application de F_R est donnée par :

$$h_C = h_G + \frac{I_{GG}}{h_G \cdot S} = h_G + \frac{K_{GG}^2}{h_G} \quad (2-21)$$

- Direction : perpendiculaire à la surface S .
- Sens : de l'intérieur du liquide vers la surface S .



Le tableau suivant propose quelques caractéristiques géométriques de formes connues.

Type	Surface (S)	Rayon de giration (K^2)	Moment d'inertie (I_{GG})
	ab	$b^2/12$	$(ab^3)/12$
	$ab/2$	$b^2/18$	$(ab^3)/36$
	πR^2	$R^2/4$	$(\pi R^4)/4$
	$\pi R^2/2$	$0,07 \times R^2$	$0,11 \times R^4$
	πab	$b^2/4$	$\pi ab^3/4$

2.7.2 Résultante des forces de pression sur une surface courbée

La variation de la pression sur une surface courbée, voir la figure, nécessite de décomposer la force en deux composantes suivant le système cartésien $\overrightarrow{ox}\overrightarrow{oy}$.

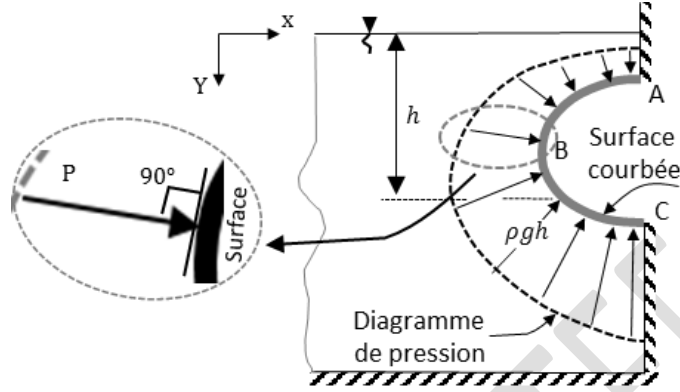


Figure 2.13 : Répartition de la pression sur une surface courbée

Pour faciliter l'explication prenant une partie de la surface courbée ($\hat{S} = \widehat{BC} \times 1$ unité de largeur) retenant un fluide de masse volumique (ρ), voir la figure ci-dessous.

Soit un élément dS de la surface S situé à une profondeur h et sur lequel s'exerce une force élémentaire $\overrightarrow{dF}$ qui se décompose en deux forces élémentaires :

Une composante dF_x , agissant sur la surface dS_x (projection de dS suivant l'axe $\overrightarrow{ox}$).

Une composante dF_y , agissant sur la surface dS_y (projection de dS suivant l'axe $\overrightarrow{oy}$).

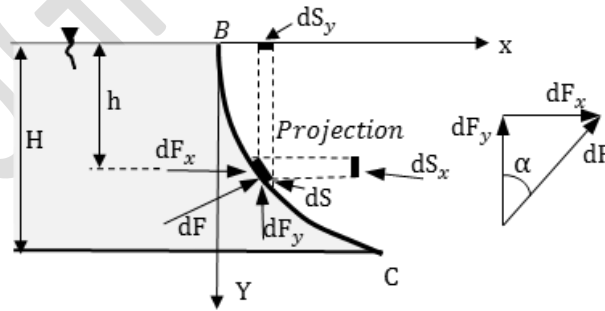


Figure 2.14 : Projection de la surface élémentaire $d\vec{s}$ suivant les axes $\overrightarrow{ox}$ et $\overrightarrow{oy}$

On sait que : $dF = \rho \cdot g \cdot h \cdot dS$

Sachant que :

$$dF_x = dF \cdot \sin(\alpha) = \rho \cdot g \cdot h \cdot dS \cdot \sin(\alpha) = \rho \cdot g \cdot h \cdot dS_x \quad \text{car} \quad dS \cdot \sin(\alpha) = dS_x$$

$$dF_y = dF \cdot \cos(\alpha) = \rho \cdot g \cdot h \cdot dS \cdot \cos(\alpha) = \rho \cdot g \cdot h \cdot dS_y \quad \text{car} \quad dS \cdot \cos(\alpha) = dS_y$$

D'où :
$$F_x = \int dF_x = \rho \cdot g \cdot \int h \cdot dS_y = \rho \cdot g \cdot h_{G_x} S_x$$

$$F_x = \rho \cdot g \cdot h_{G_x} S_x \quad (2-22)$$

S_x est la projection horizontale de la surface courbée $\hat{S}$.

h_{G_x} est la profondeur du centre de gravité de S_x .

Donc, la composante horizontale (F_x) sur une surface courbe est égale à la force normale appliquée sur la surface projetée $S_x = \overline{B'C'}$, voir la figure 2.15. La composante s'applique au centre de poussée (C_x) de la projection verticale.

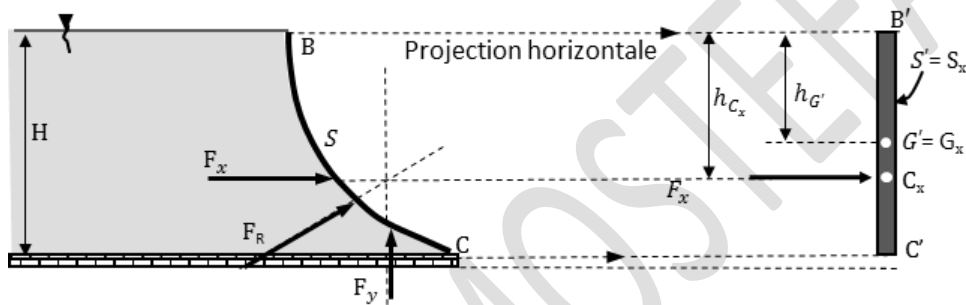


Figure 2.15 : Projection de la surface courbée $\overline{BC}$ sur un plan vertical, qui donne la surface $\overline{B'C'}$.

Par conséquent, pour déterminer la composante (F_x), il faut suivre ces étapes :

1. Projeter la surface courbée sur un plan vertical $S' = \overline{B'C'} \times 1 \text{ ml}$.
2. Déterminer le centre de gravité G' de la surface projetée S' .
3. Déterminer la profondeur du $h_{G'}$.
4. Calculer $F_x = \rho \cdot g \cdot h_{G'} \cdot S'$ (Par exemple, la méthode analytique)
5. Pour déterminer le point d'application (C_x) de F_x utiliser l'une des deux méthodes (analytique ou graphique).

De la même manière pour déterminer la composante verticale (F_y) :

$$F_y = \int dF_y = \rho \cdot g \int h \cdot dS_y = \rho \cdot g \int dV = \rho \cdot g \cdot V$$

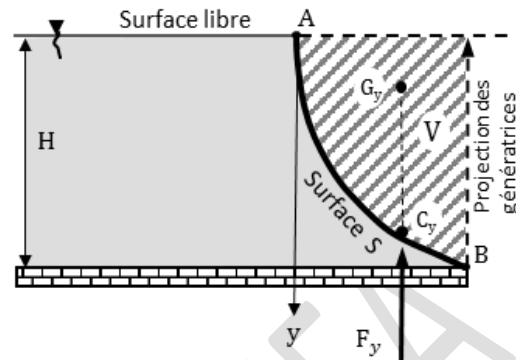
$$F_y = \rho \cdot g \cdot V \quad (2-23)$$

V : est le volume réel ou imaginaire délimité par : La surface d'étude $\widehat{AB}$, la surface libre du fluide, et la projection des génératrices A et B de la surface $\widehat{AB}$ sur la surface libre du fluide, voir la figure ci-dessous.

Donc, la composante verticale (F_y) de la résultante sur la surface courbée est égale au poids de fluide (réel ou imaginaire) situé au-dessus de cette surface.

Le point d'application (C_y) de la composante F_y représente la projection du centre de gravité du volume V sur la surface d'étude S .

Par conséquent, pour déterminer la composante de la force verticale sur une surface courbée, il faut :



1. Identifier la colonne efficace du fluide nécessaire pour causer la pression sur la surface.
2. Déterminer le volume de la colonne efficace du fluide V .
3. Calculer le poids de la colonne efficace de F_v liquide $F_y = \rho \cdot g \cdot V$.

- Calcul de la résultante : $F_R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$

- Point d'application de F_R :

Il suffit de trouver

- La direction (la pente) de F_R : $\tan(\theta) = \frac{F_y}{F_x}$
- Le point d'intersection des directions de F_x et F_y

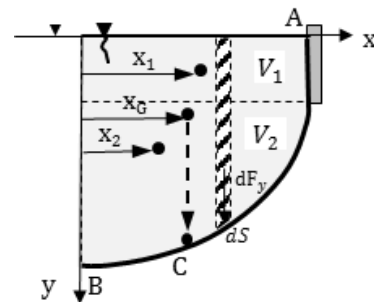
Applications

Méthode pratique pour déterminer le volume V

Cas N° 1

Pour connaître le volume concerné, choisir une surface élémentaire sur S ensuite déterminer graphiquement la pression et la force élémentaire appliquée sur cette surface élémentaire. Le volume est :

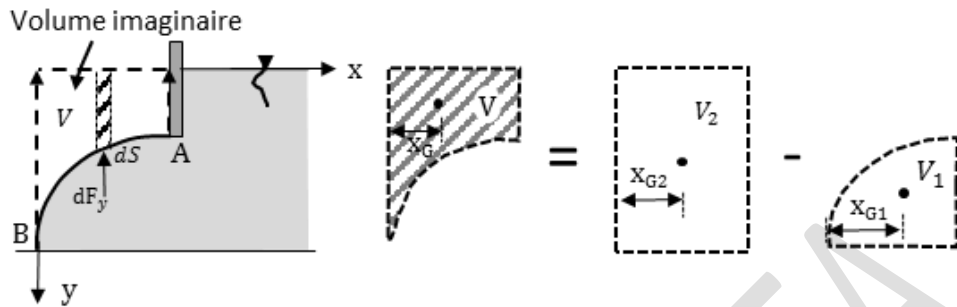
$$V = V_1 + V_2$$



- Point d'application (C_y) est déterminé par la méthode des moments statiques. Le centre de gravité (G) sera projeté sur la surface S .

$$X_G \cdot V = X_1 \cdot V_1 + X_2 \cdot V_2$$

Cas N° 2



Le volume : $V = V_2 - V_1$

Le point d'application (C_y) est déterminé aussi par la méthode des moments statiques :

$$X_G \cdot V = X_{G2} \cdot V_2 - X_{G1} \cdot V_1 \Rightarrow X_G = \frac{X_{G2} \cdot V_2 - X_{G1} \cdot V_1}{V}$$

2.8 Résumé des formules importantes du chapitre

Surface plane

- Méthode analytique

Résultante F_R $F_R = P_G \cdot S$ (2-18)

Point d'application $h_C = h_G + \frac{I_{GG}}{h_G \cdot S} = h_G + \frac{K_{GG}^2}{h_G}$ (2-21)

- Méthode graphique

Résultante F_R : $F_R = S_\Delta$ (en 2D) ; $F_R = V_\Delta$ (en 3D)

Le point d'application : Projection du centre de gravité de S_Δ ou V_Δ sur la surface d'étude (S).

Surface courbée

Résultante F_R $F_R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ $F_x = \rho \cdot g \cdot h_{Gx} S_x$ $F_y = \rho \cdot g \cdot V$

Point d'application

- 1) La direction (la pente) de F_R : $\tan(\theta) = \frac{F_y}{F_x}$
- 2) Le point d'intersection des directions de F_x et F_y