Université de M.Boudiaf M'sila
Faculté des Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

2020/2021

Examen du Module Introduction à la Théorie des Groupes

Exercice 1 (4 pts) :

Soit $(G, \cdot)$ un groupe tel que $\forall x \in G, x^2 = 1_G$,i.e, tout élément de G différent de 1_G est d'order 2.
Montrer que $(G, \cdot)$ est commutatif.

Exercice 2 (10 pts) :

Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $SL\left(2,\mathbb{Z}\right) = \left\{M \in \mathcal{M}\left(2,\mathbb{Z}\right) : \det\left(M\right) = 1\right\}$.
1. Montrer que $\left(SL\left(2,\mathbb{Z}\right), \times\right)$ est un groupe.

Soient $H = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{Z}\right\}$ et $K = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2t & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. Montrer que $(H, \times)$ et $(K, \times)$ sont des sous groupes de $\left(SL\left(2,\mathbb{Z}\right), \times\right)$.
3. Calcculer $H \times K = \{h \times k, h \in H, k \in K\}$ et $K \times H = \{k \times h, k \in K, h \in H\}$.
4. En déduire que $H \times K$ n'est pas un sous groupe de $\left(SL\left(2,\mathbb{Z}\right), \times\right)$.

Exercice 3 (6 pts) :

(a) Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

1. Montrer que $U_n = \left\{e^{\frac{2\pi ik}{n}}, k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq n-1\right\}$ est un sous groupe du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$.

(b) Soit l'application $\theta : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (U_n, \times)$ définie par $f\left(k\right) = e^{\frac{2\pi ik}{n}}$.

1. Montrer que θ est un morphisme surjectif.
2. Calculer $Ker\left(\theta\right)$.

Bonne chance