Université de M.Boudiaf M'sila
Faculté des Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

2020/2021

Corrigé type du Module Introduction à la Théorie des Groupes

Exercice 1 (4 pts) :

Soit $(G, \cdot)$ un groupe tel que $\forall x \in G, x^2 = 1_G \quad (\Delta)$,i.e, tout élément de G différent de 1_G est d'ordre 2.
Soient $x, y \in G$, on a $xy \in G$ et d'après la propriété (Δ) $(xy)^2 = 1_G$,i.e, $(xy)(xy) = 1_G$, par conséquent $x(yx)y = 1_G$, donc $xx(yx)yy = xy$, qui implique $yx = xy$. Finalement le groupe $(G, \cdot)$ est commutatif.

Exercice 2 (10 pts) :

(a) Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $SL(2, \mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}(2, \mathbb{Z}) : \det(M) = 1\}$.
$(SL(2, \mathbb{Z}), \times)$ est un groupe:
1. La loi " $\times$ " (le produit matriciel) est interne sur $(SL(2, \mathbb{Z}), \times)$: soient $M, N \in SL(2, \mathbb{Z})$, i.e, $\det(M) = 1$ et $\det(N) = 1$. On sait que $\det(M \times N) = \det(M)\det(N) = 1$, donc $\det(M \times N) = 1$, par conséquent $M \times N \in SL(2, \mathbb{Z})$.
2. Il est claire que le produit matriciel est associative.
3. La matrice $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est l'élément neutre de $SL(2, \mathbb{Z})$ car $\forall M \in SL(2, \mathbb{Z}), M \times I_2 = I_2 \times M = M$.
4. Chaque élément de $(SL(2, \mathbb{Z}), \times)$ admet un élément symétrique: soit $M \in SL(2, \mathbb{Z})$, i.e, $\det(M) = 1$.on note M^{-1} la matrice inverse de M. On a $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}$, donc $\det(M^{-1}) = 1$, de plus $M \times M^{-1} = M^{-1} \times M = I_2$, finalement M^{-1} est l'élément symétrique de M.

(b) Soit $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{Z} \right\}$, $(H, \times)$ est un sous groupe de $(SL(2, \mathbb{Z}), \times)$:
1. Pour tout $s \in \mathbb{Z}, \det \begin{pmatrix} 1 & 2s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$, donc $H \subseteq SL(2, \mathbb{Z})$.
2. $H \neq \emptyset$: si $s = 0$, alors $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$.

3. Soient $S,T\in H$, i.e, $S=\begin{pmatrix}1 & 2s\\ 0 & 1\end{pmatrix}, s\in\mathbb{Z}$ et $T=\begin{pmatrix}1 & 2t\\ 0 & 1\end{pmatrix}, t\in\mathbb{Z}$.
On a $S\times T=\begin{pmatrix}1 & 2(s+t)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in H$ et $S^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2s\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in H$.

(c) Soit $K=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2s & 1\end{pmatrix}, s\in\mathbb{Z}\right\}$, $(K,\times)$ est un sous groupe de $(SL(2,\mathbb{Z}),\times)$:
1. Pour tout $s\in\mathbb{Z}, \det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2s & 1\end{pmatrix}=1$, donc $K\subseteq SL(2,\mathbb{Z})$.
2. $K\neq\emptyset$: si $s=0$, alors $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in K$.
3. Soient $S,T\in K$, i.e, $S=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2s & 1\end{pmatrix}, s\in\mathbb{Z}$ et $T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2t & 1\end{pmatrix}, t\in\mathbb{Z}$.
On a $S\times T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2(s+t) & 1\end{pmatrix}\in K$ et $S^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2s & 1\end{pmatrix}\in K$.
(d) $H\times K=\{h\times k, h\in H, k\in K\}$
$=\left\{\begin{pmatrix}1 & 2s\\ 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2t & 1\end{pmatrix}, s,t\in\mathbb{Z}\right\}$
$=\left\{\begin{pmatrix}4st+1 & 2s\\ 2t & 1\end{pmatrix}, s,t\in\mathbb{Z}\right\}$.
$K\times H=\{k\times h, k\in K, h\in H\}$
$=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2t & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 2s\\ 0 & 1\end{pmatrix}, s,t\in\mathbb{Z}\right\}$
$=\left\{\begin{pmatrix}1 & 2s\\ 2t & 4st+1\end{pmatrix}, s,t\in\mathbb{Z}\right\}$.

(e) Comme $H\times K\neq K\times H$, alors $(H\times K,\times)$ n'est pas un sous groupe de $(SL(2,\mathbb{Z}),\times)$.

Exercice 3 (6 pts) :

(a) Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $U_n = \left\{e^{\frac{2\pi ik}{n}}, k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq n-1\right\}$, $(U_n, \times)$ est un sous groupe du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$:

1. $U_n \neq \emptyset$: si $k = 0$, on a $e^{\frac{2\pi i \times 0}{n}} = 1 \in U_n$.
2. Soients $e^{\frac{2\pi ik_1}{n}}, e^{\frac{2\pi ik_2}{n}} \in U_n$, on a

$e^{\frac{2\pi ik_1}{n}} \times \left(e^{\frac{2\pi ik_2}{n}}\right)^{-1} = e^{\frac{2\pi i(k_1-k_2)}{n}} \in U_n$.

(b) Soit l'application $\theta : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (U_n, \times)$ définie par $\theta(k) = e^{\frac{2\pi ik}{n}}$.

1. θ est un morphisme surjectif:

on a $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z}, \theta(k_1 + k_2) = e^{\frac{2\pi i(k_1+k_2)}{n}} = e^{\frac{2\pi ik_1}{n}} \times e^{\frac{2\pi ik_2}{n}} = \theta(k_1) \times \theta(k_2)$.

L'application θ est surjective car $\forall e^{\frac{2\pi ik}{n}} \in U_n, \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta(k) = e^{\frac{2\pi ik}{n}}$.

$Ker(\theta) = \left\{k \in \mathbb{Z}, \theta(k) = e^{\frac{2\pi ik}{n}} = 1\right\} = n\mathbb{Z}$.