Chapitre 1

Méthode numérique pour EDP

Schéma d'ordre supérieur

1.1 Discrétisation pour l'équation de la chaleur 1D

Considérons le prolème monodimentionnelle de la conduction de la chaleur dans une barre 1 m de longueur.

le champ de température $u(x,t)$ véirfie l'équation de la chaleur, avec quelques conditions comme suit

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = v^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t \succ 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0,\ t \succeq 0, \\ u(x,0) = f(x),\ x \in [0,1] \end{cases}$$

discrétisé l'intrvalle en $N+1$ noeuds de coordonnées x_i, (i variant de 1 à $N+1$) régulièrements éspacées.

Notons h le pas de l'espace, le temps est discrétisé en intervalle de pas constant k , notons u_i^n la température au noeud $x_i = ih$, et à l'instant $t_j = jk$

On peut utiliser deux approches pour discrétiser cette équation

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^j &= \left(v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^j \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+1} &= \left(v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^{j+1} \end{aligned}$$

La première dite explicite utilise une discrétisation au noeud x_i et à l'itération courante j, la seconde dite implicite utilise une discrétisation au noeud x_i et à l'itération courante $j+1$

1.2 Schéma explicite

Nous utilisons un schéma avant d'ordre 1 pour évaluer la dérivée temporelle et un schéma centré d'ordre 2 pour la dérivée seconde en espace

d'ordre 2 pour la dérivée seconde en espace

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^j &= \frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{k}\\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^j &= \frac{u_{i+1}^j-2u_i^j+u_{i-1}^j}{h^2}\end{aligned}$$

d'où le prolème discrétisé est donné par

$$\begin{cases}\dfrac{u_i^{j+1}-u_i^j}{k}=v^2\dfrac{u_{i+1}^j-2u_i^j+u_{i-1}^j}{h^2},\ t\succ 0\\ u_0^j=u_{N+1}^j=0,\ t\succeq 0,\\ u_i^0=f(x_i),\ x\in[0,1]\end{cases}$$

En posant $\lambda=\dfrac{\alpha k}{h^2}$ la température à l'itération $j+1$ est donnée par

$$u^{j+1}=\lambda u^j$$

qu'on peut l'écrire sous forme matricielle comme suit

$$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\.\\.\\.\\u_N\end{pmatrix}^{j+1}=\begin{pmatrix}1-2\lambda & \lambda & 0 & . & . & 0\\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & & & .\\ 0 & & & & & .\\ . & & & & & 0\\ . & & & & & \lambda\\ 0 & & & & \lambda & 1-2\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\.\\.\\.\\u_N\end{pmatrix}^{j}+\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\0\\.\\.\\0\\\beta\end{pmatrix}$$

1.3 Schéma implicite

Nous utilisons un schéma arrière d'ordre 1 pour évaluer la dérivée temporelle et un schéma centré d'ordre 2 pour la dérivée seconde en espace

d'ordre 2 pour la dérivée seconde en espace

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^{j+1} &= \frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{k} \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^{j+1} &= \frac{u_{i+1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i-1}^{j+1}}{h^2} \end{aligned}$$

d'où le prolème discrétisé est donné par

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{j+1}-u_i^j}{k} = v^2\dfrac{u_{i+1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i-1}^{j+1}}{h^2},\ 1\leq\ i\leq N\ ,1\leq\ j\leq M \\ u_0^j = u_{N+1}^j = 0,\ t\succeq 0,\ 0\leq\ j\leq M+1 \\ u_i^0 = f(x_i),\ x\in[0,1],\ 0\leq\ i\leq N\ +1 \end{cases}$$

En posant $\lambda = \dfrac{\alpha k}{h^2}$ la température à l'itération $j+1$ est donnée par

$$u^{j+1} = \lambda u^j$$

qu'on peut l'écrire sous forme matricielle comme suit

$$\begin{pmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & 0 & . & . & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & & & . \\ 0 & & & & & . \\ . & & & & & 0 \\ . & & & & & -\lambda \\ 0 & & & & -\lambda & 1+2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_N \end{pmatrix}^{j+1} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_N \end{pmatrix}^{j} + \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

d'où

$$AU^{j+1} = U^j + C \Rightarrow U^{j+1} = A^{-1}U^j + A^{-1}C$$

Exemple 1.3.1 *Soit le problème*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0\prec\ t\prec\dfrac{1}{2},\ x\in]0,2[\\ u(0,t) = u(2,t) = 0,\ 0\leq\ t\leq\dfrac{1}{2}, \\ u(x,0) = 1-\cos(\pi x),\ x\in[0,2] \end{cases}$$

1. *Donner les schémas explicite et implicite pour* $h = 0.5,\ k = 0.1,$

2. *Trouver deux solutions approchées en utilisant les deux schémas à l'instant* 0.1.

Solution 1.3.1 *On a* $h = \dfrac{b-a}{N+1} = \dfrac{2}{1+N} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow N = 3$

$k = \dfrac{d-c}{M+1} = \dfrac{0.5}{1+M} = 0.1 \Rightarrow M = 4$

$\lambda = \dfrac{v^2 k}{h^2} = \dfrac{1^2(0.1)}{(0.5)^2} = 0.4$

Schéma explicite

On remplace u_t, u_{xx} *par leurs approximations*

$$u_t = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k},\ u_{xx} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$$

Alors on obtient le schéma aux différences finies pour le problème (1) comme suit

$$\begin{cases} u_i^{j+1} = \dfrac{k}{h^2}u_{i+1}^j - (1 - 2\dfrac{k}{h^2})u_i^j + \dfrac{k}{h^2}u_{i-1}^j,\ 1 \leq\ i \leq N\ ,1 \leq\ j \leq M \\ u_0^j = u_{N+1}^j = 0,\ 0 \leq\ j \leq M+1, \\ u_i^0 = 1 - \cos(\pi x),\quad 0 \leq\ i \leq N+1, \end{cases}$$

Schéma implicite

On remplace u_t, u_{xx} *par leurs approximations*

$$u_t = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k},\ u_{xx} = \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2}$$

Alors on obtient le schéma aux différences finies pour le problème (1) comme suit

$$\begin{cases} -\dfrac{k}{h^2}u_{i+1}^{j+1} + (1 + 2\dfrac{k}{h^2})u_i^{j+1} - \dfrac{k}{h^2}u_{i-1}^{j+1} = u_i^j,\ 1 \leq\ i \leq N\ ,1 \leq\ j \leq M \\ u_0^j = u_{N+1}^j = 0,\ 0 \leq\ j \leq M+1, \\ u_i^0 = 1 - \cos(\pi x),\quad 0 \leq\ i \leq N+1, \end{cases}$$

2. *Calculons les deux solutions approchées en utilisant les deux schémas*

Schéma explicite

$$u_i^{j+1} = \frac{k}{h^2}u_{i+1}^j - (1 - 2\frac{k}{h^2})u_i^j + \frac{k}{h^2}u_{i-1}^j,\ 1 \leq\ i \leq N\ ,1 \leq\ j \leq M$$

avec $u_0^j = u_{N+1}^j = 0$,*pour* $0 \leq\ j \leq M+1, u_i^0 = 1 - \cos(\pi x)$,*pour* $0 \leq\ i \leq N+1,$

Posons $\lambda = \dfrac{k}{h^2} = 0.4$

Pour l'instant 0.1 *on prend* $j=0$

$$\begin{aligned}
&pour\ i=1 \ \rightarrow\ u_1^1=\frac{k}{h^2}u_2^0-(1-2\frac{k}{h^2})u_1^0+\frac{k}{h^2}u_0^0\\
&pour\ i=2 \ \rightarrow\ u_2^1=\frac{k}{h^2}u_3^0-(1-2\frac{k}{h^2})u_2^0+\frac{k}{h^2}u_1^0\\
&pour\ i=3 \ \rightarrow\ u_3^1=\frac{k}{h^2}u_4^0-(1-2\frac{k}{h^2})u_3^0+\frac{k}{h^2}u_2^0
\end{aligned}$$

D'où le système matriciel correspondant au problème discretprecedent $U^{(j+1)}=AU^{(j)}$ *est donné par*

$$\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}^{(j+1)}=\begin{pmatrix} 1-2\lambda & \lambda & 0\\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda & 1-2\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}^{(j)}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}^{(1)}=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0\\ 0.4 & 0.2 & 0.4\\ 0 & 0.4 & 0.2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}^{(0)}=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0\\ 0.4 & 0.2 & 0.4\\ 0 & 0.4 & 0.2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}^{(1)}=\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

Schéma implicite

$$-\frac{k}{h^2}u_{i+1}^{j+1}+(1+2\frac{k}{h^2})u_i^{j+1}-\frac{k}{h^2}u_{i-1}^{j+1}=u_i^j,\ 1\le\ i\le N\ ,1\le\ j\le M$$

avec $u_0^j=u_{N+1}^j=0$,*pour* $0\le\ j\le M+1, u_i^0=1-\cos(\pi x)$,*pour* $0\le\ i\le N+1$,

Posons $\lambda=\frac{k}{h^2}=0.4$

Pour l'instant 0.1 *on prend* $j=0$

$$\begin{aligned}
&pour\ i=1 \ \rightarrow\ -\lambda u_2^1+(1+2\lambda)u_1^1-\lambda u_0^1=u_1^0\\
&pour\ i=2 \ \rightarrow\ -\lambda u_3^1+(1+2\lambda)u_2^1-\lambda u_1^1=u_2^0\\
&pour\ i=3 \ \rightarrow -\lambda u_4^1+(1+2\lambda)u_3^1-\lambda u_2^1=u_3^0
\end{aligned}$$

D'où le système matriciel correspondant au problème discretprecedent $AU^{(j+1)} = U^{(j)}$ *est donné par*

$$\begin{pmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1+2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}^{(j+1)} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}^{(j)}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1.8 & -0.4 & 0 \\ -0.4 & 1.8 & -0.4 \\ 0 & -0.4 & 1.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}^{(1)} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{cases} 1.8u_1^1 - 0.4u_2^1 = 1 \\ -0.4u_1^1 + 1.8u_2^1 - 0.4u_3^1 = 2 \\ -0.4u_2^1 + 1.8u_3^1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1^1 = 0.3247 \\ u_2^1 = 1.0390 \\ u_3^1 = 0.3247 \end{cases}$$

Généralité d'un schéma pour l'équation de la chaleur

Il s'agit d'une genéralisationdes schémas précédent avec $0 \leq \theta \leq 1$, ce schéma s'écrit sous la forme suivantes

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} = v^2\left(\theta\frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} + (1-\theta)\frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}\right),\ 1 \leq i \leq N,\ j = 1, 2, ...$$

posons $\lambda = \dfrac{v^2 k}{h^2}$

on obtient

$$u_i^{j+1} - u_i^j = \lambda[\theta(u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}) + (1-\theta)(u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j)]$$

la forme matricielle de ce schémas'écrit comme suit

$$(I + \theta\lambda A)U^{(j+1)} = (I - (1-\theta)\lambda A)U^{(j)}$$

où $U^{(i)} = (u_1^j, u_2^j, ..., u_N^j)$,$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & . & . & . & 0 \\ -1 & 2 & -1 & . & . & 0 \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & -1 \\ 0 & . & . & . & -1 & 2 \end{pmatrix}$,et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix}$, Cas particuliers

Si $\theta = 0$ $\rightarrow$schéma explicite

Si $\theta = 1$ $\rightarrow$schéma implicite

Si $\theta = 0$ $\rightarrow$schéma de Crank Nicolson

1.4 schéma de Crank Nicolson

considerons le problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = v^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ x \in]0,1[,\ t \succ 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0,\ t \succeq 0, \\ u(x,0) = f(x),\ x \in [0,1] \end{cases}$$

Le schéma de crank Nicolson est donné par

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} = \dfrac{v^2}{2}(\dfrac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1} + u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}),\ 1 \leq\ i \leq N\ , 1 \leq\ j \leq M \\ u_0^j = u_{N+1}^j = 0,\ t \succeq 0,\ 0 \leq\ j \leq M+1 \\ u_i^0 = f(x_i),\ x \in [0,1],\ 0 \leq\ i \leq N\ +1 \end{cases}$$

En posant $\lambda = \dfrac{v^2 k}{h^2}$ on obtient

$$\begin{aligned} 2(u_i^{j+1} - u_i^j) &= \lambda(u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1} + u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) \\ &\Rightarrow -\lambda u_{i-1}^{j+1} + (2+2\lambda)u_i^{j+1} - \lambda u_{i+1}^{j+1} = \lambda u_{i-1}^j + (2-2\lambda)u_i^j + \lambda u_{i+1}^j \end{aligned}$$

Alors la forme matricielle $CU^{i+1} = DU^i$ équivalente au problème precedent est écrite comme suit

$$\begin{pmatrix} 2+2\lambda & -\lambda & 0 & . & . & 0 \\ -\lambda & 2+2\lambda & -\lambda & & & . \\ 0 & & & & & . \\ . & & & & & 0 \\ . & & & & & -\lambda \\ 0 & & & & -\lambda & 2+2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_N \end{pmatrix}^{j+1} = \begin{pmatrix} 2-2\lambda & \lambda & 0 & . & . & 0 \\ \lambda & 2-2\lambda & \lambda & & & . \\ 0 & & & & & . \\ . & & & & & 0 \\ . & & & & & \lambda \\ 0 & & & & \lambda & 2-2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_N \end{pmatrix}^{j}$$

tels que

$$C = \begin{pmatrix} 2+2\lambda & -\lambda & 0 & . & . & 0 \\ -\lambda & 2+2\lambda & -\lambda & & & . \\ 0 & & & & & . \\ . & & & & & 0 \\ . & & & & & -\lambda \\ 0 & & & & -\lambda & 2+2\lambda \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2-2\lambda & \lambda & 0 & . & . & 0 \\ \lambda & 2-2\lambda & \lambda & & & . \\ 0 & & & & & . \\ . & & & & & 0 \\ . & & & & & \lambda \\ 0 & & & & \lambda & 2-2\lambda \end{pmatrix}, U^{j=} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_N \end{pmatrix}^j$$

d'oùù la solution

$$U^{j+1} = C^{-1} D U^j$$

1.5 Discrétisation de l'équation de Laplace 2D stationnaire

Considérons le problème de Poisson avec conditions aux limites de type Dirichlet homogène sur le pavé $\Omega = [0,a] \times [0,b] \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} -\Delta u = f \ sur \ \Omega \\ u = 0 \ sur \ \partial \ \Omega \end{cases}$$

où $u = u(x,y)$ et f est une fonction régulière donnée dans Ω

Soient $n, m \in N*$. On définit le pas dans les deux directions comme suit :

$$\begin{aligned} h &= \frac{a}{n+1}, \ x_i = ih, \ i = O, 1, 2, ..., n+1. \\ k &= \frac{b}{m+1}, \ y_i = jk, \ j = O, 1, 2, ..., m+1. \end{aligned}$$

On écrit le schéma aux différences finies pour les dérivées partielles du second ordre par

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_i^{j-1} - 2u_i^j + u_i^{j+1}}{k^2}$$

Et les conditions aux bords de type de Dirichlet homogène

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 = u_i^0, u(x,b) = 0 = u_i^{m+1} \text{ pour } i = 0, 1, ..., n+1 \\ u(0,y) = 0 = u_0^j, u(a,y) = 0 = u_{n+1}^j \text{ pour } j = 0, 1, ..., m+1 \end{cases}$$

Alors le schéma de différences finies pour le problème (3.6) est donné par

$$\begin{cases} -\frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} - \frac{u_i^{j-1} - 2u_i^j + u_i^{j+1}}{k^2} = f_i^j, \ 1 \le i \le n, \ 1 \le j \le m \\ u_i^0 = u_i^{m+1} = 0, \quad 0 \le i \le n+1 \\ u_0^j = u_{n+1}^j = 0, \ 0 \le j \le m+1 \end{cases}$$

D'où le système matriciel correspondant à (3.7) s'écrit sous la forme suivante

$$AU = F,$$

où A est une matrice tridiagonale par blocs de taille $n \times m$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} B & C & 0 & . & . & 0 \\ C & B & C & & & . \\ 0 & & & & & . \\ . & & & & & 0 \\ . & & & C & B & C \\ 0 & & & 0 & C & B \end{pmatrix}$$

avec B et C sont deux matrices carrées dans le corps $\mathbb{R}$ représentons comme suit

$$B = \begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} + \frac{2}{k^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & . & . & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + \frac{2}{k^2} & -\frac{1}{h^2} & & & . \\ 0 & & & & & . \\ . & & & & & 0 \\ . & & & & & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & & & & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + \frac{2}{k^2} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{k^2} & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & -\frac{1}{k^2} & 0 & & & . \\ 0 & & & & & . \\ . & & & & & 0 \\ . & & & & & 0 \\ 0 & & & & 0 & -\frac{1}{k^2} \end{pmatrix}$$

et

$$U = (U_1, U_2, ..., U_j, ..., U_n)^t, F = (F_1, F_2, ..., F_j, ..., F_n)^t,$$

pour $1 \leq j \leq m$ on a

$$U_i = (u_i^1, u_i^2, ..., u_i^m)^t, \ F_i = (f_i^1, f_i^2, ..., f_i^m)^t$$

d'où la solution

$$U = A^{-1}F$$

Exemple 1.5.1 *Dans cet exemple, on prend $a = b = 1$ et $n = m = 3$. Le schéma de différences finies (3.7) est devient*

$$\begin{cases} 4u_i^j - u_{i-1}^j - u_{i+1}^j - u_i^{j-1} - u_i^{j+1} = h^2 f_i^j, \ 1 \leq i \leq 3, \ 1 \leq j \leq 3 \\ u_i^0 = u_i^{m+1} = 0, \quad 0 \leq i \leq 4 \\ u_0^j = u_{n+1}^j = 0, \ 0 \leq j \leq 4 \end{cases}$$

Ainsi on écrit le système matriciel pour $1 \leq i, j \leq 3$.

Fixons $i = 1$

$$pour\ j = 1 \rightarrow 4u_1^1 - u_0^1 - u_2^1 - u_1^0 - u_1^2 = h^2 f_1^1$$
$$pour\ j = 2 \rightarrow 4u_1^2 - u_0^2 - u_2^2 - u_1^1 - u_1^3 = h^2 f_1^2$$
$$pour\ j = 3 \rightarrow 4u_1^3 - u_0^1 - u_2^3 - u_1^2 - u_1^4 = h^2 f_1^3$$

Fixons $i = 2$

$$pour\ j = 1 \rightarrow 4u_1^1 - u_0^1 - u_2^1 - u_1^0 - u_1^2 = h^2 f_1^1$$
$$pour\ j = 2 \rightarrow 4u_1^2 - u_0^2 - u_2^2 - u_1^1 - u_1^3 = h^2 f_1^2$$
$$pour\ j = 3 \rightarrow 4u_1^3 - u_0^1 - u_2^3 - u_1^2 - u_1^4 = h^2 f_1^3$$