Interpolation

1. Interpolation de Lagrange

On veut interpoler entre les valeurs f_0, f_1, f_2, ... f_n, valeurs de la fonction f aux points x_0, x_1, x_2, ... x_n. La méthode de Lagrange pour un polynôme de degré n interpolant n+1 points est définie comme suit :

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f_i l_i \quad \text{avec} \quad l_i=\prod_{j\neq i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j} \qquad i=0,1\ldots,n$$

par exemple, pour une interpolation de degré n, les polynômes de base i, aussi appelés fonctions cardinales, sont exprimés:

$$l_i(x)=\frac{x-x_0}{x_i-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_i-x_1}\cdot\ldots\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\cdot\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\ldots\frac{x-x_n}{x_i-x_n}$$

2. Interpolation de Newton (différences divisées)

La méthode de Lagrange est simple sur le plan du concept mais pas très efficace sur le plan de l'application d'un algorithme de calcul. La méthode de Newton se prête mieux à la programmation car elle exprime le même polynôme sous la forme récurrente suivante:

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\ldots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

Les coefficients $\boldsymbol{a_i}$ sont calculés en utilisant les «différences divisées» :

$$\Delta^1[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta^0[x_1] - \Delta^0[x_0]}{x_1 - x_0}$$

$$\Delta^2[x_0, x_1, x_2] = \frac{\Delta^1[x_1, x_2] - \Delta^1[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$\Delta^3[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{\Delta^2[x_1, x_2, x_3] - \Delta^2[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$$ etc...

et la formule d'interpolation devient, en utilisant ces différences divisées :

$$\boldsymbol{P(x) = y_0 + \frac{\Delta\ y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots. + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}$$