Résolution des systèmes d'équations linéaires

1. Méthode de Gauss

Il s'agit de la méthode élémentaire d'élimination des variables. Rappelons-la d'abord sur un exemple simple :

$$(S)\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} P_1(x,y,z)=d \\ P_2(x,y,z)=d' \\ P_3(x,y,z)=d'' \end{cases}$$

Supposons $a \neq 0$: on peut alors éliminer *x* dans les deuxième et troisième équations en remplaçant (*S*) par le système équivalent

$$(S_1)\begin{cases} P_1=d \\ P_2-\dfrac{a'}{a}P_1=d'-\dfrac{a'}{a}d \\ P_3-\dfrac{a''}{a}P_1=d''-\dfrac{a''}{a}d \end{cases}$$

Qui est de la forme

$$(S_1)\begin{cases} P_1=d \\ Q_2=d_2 \\ Q_3=d_3 \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} Q_2=b_2y+c_2z \\ Q_3=b_3y+c_3z \end{cases}$$

Supposons $b2 \neq 0$: on peut alors éliminer *y* dans la dernière équation en remplaçant (*S*1) par le système équivalent

$$(S_2)\begin{cases} P_1=d \\ Q_2=d_2 \\ Q_3-\dfrac{b_3}{b_2}Q_2=d_3-\dfrac{b_3}{b_2}d_2 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} ax+by+cz=d \\ \quad b_2y+c_2z=d_2 \\ \quad\quad c'_3z=d'_3 \end{cases}$$

Qui est un système triangulaire ; on peut le résoudre à l'aide de la méthode de remontée.

2. **<u>Méthode de Gauss Seidel</u>**

Etant donné le système $AX = B$ à résoudre, les méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires consistent à calculer les valeurs successives d'une suite de vecteurs X^k convergeant vers la solution X quand $k \to \infty$.

Principe : On décompose A en $A = M - N$ où M est une matrice "facile" à inverser, au sens que le système $MY = d$ se résout facilement (M diagonale, ou triangulaire, ou diagonale par blocs...). Alors

$$AX = b \Longleftrightarrow MX = NX + b$$

conduit à l'itération

$$MX^{k+1} = NX^k + b.$$

La relation de Gauss-Seidel :

$$\boldsymbol{x_i^{(k+1)}} = \left[\boldsymbol{b_i} - \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{i-1}} \boldsymbol{a_{ij}} \ \boldsymbol{x_j^{(k+1)}} - \sum_{\boldsymbol{j=i+1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{a_{ij}} \ \boldsymbol{x_j^{(k)}}\right] / \boldsymbol{a_{ii}}$$