✍ Examen de Remplacement ✍

1^er Année Socle Commun Année Universitaire : 2020/21 Module Analyse 2

Exercice 1: 7 points

Soit la fonction f définie sur $]-\infty,0[\cup[3,+\infty[$ par

$$f(x)=-\frac{1}{2}x+e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x-3)}.$$

1. Donner le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$.
2. Déterminer l'asymptote oblique et sa position par rapport au graphe de f au voisinage de $+\infty$.
3. Soit la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ telle que $u_n=f(n)$, utiliser le résultat précédent pour calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{u_n}{n}$.

Exercice 2: 6 points

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{1}{x(x^2+1)}$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que

$$\forall x\in\mathbb{R}^*:\ f(x)=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+1}.$$

2. Calculer l'intégrale $I=\int f(x)dx$.
3. Déduire la valeur de l'intégrale $J=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{1}{x^2}\arctan x dx$.

Exercice 3: 7 points

1. Résoudre l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante

$$-xy'+y=\ln x,\quad x>0. \tag{1}$$

2. En utilisant le résultat de (1) résoudre l'équation de Bernoulli suivante

$$xy'+y=y^2\ln x. \tag{2}$$

3. Donner la solution de (2) qui satisfait la condition initiale $y(1)=2$.

❄Calculatrice non programmable est autorisée❄ ❄ Bon chance. ❄