SESSION NORMALE

ANALYSE-2 S2

# Université de M'sila

## Faculté des Mathématiques et d'Informatique

## $1^{ier}$ Socle commun

## Module : Analyse-2

## Correction d'examen (Remplacement) : 07/06/ 2021

**Durée de l'examen : 1 Heure et 30 Minutes**

***Ce sujet comporte 3 exercices :***

- Exercice 1 : **Le développement limité.** ........................................ **7 points**
- Exercice 2 : **Les intégrales** ........................................................ **7 points**
- Exercice 3 : **Les équations différentielles** .................................... **6 points**

## Correction d'exercice 1 : (7 pts )

Soit $f(x) = -\frac{1}{2}x + e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x-3)}$, et $x \in ]-\infty, 0[\cup[3, +\infty[$.On développent $f$ à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$.

**1 - a)** Pour $e^{\frac{1}{x}}$, posons $x = \frac{1}{t}$, alors, on a $\begin{cases} x \to +\infty \\ t \to 0. \end{cases}$ Puis, on trouve,

$e^t = 1 + \frac{1}{1!}t + \frac{1}{2!}t^2 + o(t^2)$, par conséquent, on a

1 pt $e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$.

**b)** On développent $\sqrt{x(x-3)}$. Posons $x = \frac{1}{t}$, alors, on trouve

$$\begin{aligned} \sqrt{x(x-3)} &= \frac{1}{t}\sqrt{1-3t} = \frac{1}{t}\Big(1 + \frac{1}{2}(-3t) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(-3t)^2 + o(t^2)\Big) \\ &= \frac{1}{t} - \frac{3}{2} - \frac{9}{8}t + o(t). \end{aligned}$$

1.5 pt D'où, $\sqrt{x(x-3)} = x - \frac{3}{2} - \frac{9}{8}\frac{1}{x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big)$.

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{2}x + \Big(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big)\Big(x - \frac{3}{2} - \frac{9}{8}\frac{1}{x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big) \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{25}{8x} - \frac{15}{8x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big). \end{aligned}$$

1.5 pt

1 pt **2 -** L'équation de l'asymptote oblique $(\Delta)$ est $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, car $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y) = 0$.

La position dépend de le signe de $f(x) - y$ au voisinage de $+\infty$.

1 pt Comme, $f(x) - y = -\frac{25}{8x} - \frac{15}{8x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big) < 0$. Alors, $(\Delta)$ est au dessus de $(C_f)$.

**3 -**

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}\frac{u_n}{n} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{f(n)}{n} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}n - \frac{1}{2} - \frac{25}{8n} - \frac{15}{8n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)}{n} \\ &= \lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} - \frac{25}{8n^2} - \frac{15}{8n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

1 pt

## Correctio d'exercice 2 : ( 6 pts )

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$.

**1 -** Posons $\exists a, b \in \mathbb{R}$, tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a : $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$. Donc,

2 pt $f(x) = \frac{(a+b)x^2 + cx + a}{x(x^2+1)}$. Par identification, on trouve : $a = 1,\ b = -a = -1$ et $c = 0$.

C'est à dire $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$.

**2 -** On calcule l'intégrale $I = \int f(x)dx$. On a donc,

$$\begin{aligned} I = \int f(x)dx &= \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x}{x^2+1}dx = \int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + k,\ (k \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

**2 pt**

**3 -** Pour l'intégrale $J = \int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{x^2}\arctan x dx$. On intègre par parties, posons, donc,

$$\begin{cases} U' = \dfrac{1}{x^2} \\ V = \arctan(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U = \dfrac{-1}{x} \\ V' = \dfrac{1}{x^2+1} \end{cases}$$ Alors, on a,

**1 pt** $\int_{\frac{1}{2}}^{0} U'(x)V(x)dx = [U(x)V(x)]_{\frac{1}{2}}^{0} - \int_{\frac{1}{2}}^{0} U(x)V'(x)dx.$

Donc, d'après question (2), on obtient

$$\begin{aligned} J = \int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{x^2}\arctan x dx &= [-\frac{1}{x}\arctan x]_{\frac{1}{2}}^{0} + \int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{x(x^2+1)}dx \\ &= [-\frac{1}{x}\arctan x]_{\frac{1}{2}}^{0} + [\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + k]_{\frac{1}{2}}^{0} \\ &= -\frac{\pi}{4} + 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right). \end{aligned}$$

**1 pt**

## Correction d'exercice 3 : (7 pts)

**1 -** Soit l'équation $-xy' + y = \ln x$ (1).

**a)** On résoudre l'équation homogène (EH) : $-xy' + y = 0$. Alors, on a $y = 0$ est une solution de (EH), donc si $y \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} -xy' + y = 0 &\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \\ &\Leftrightarrow \ln|y| = \ln x + \ln c\ (c > 0) \Leftrightarrow y = kx\ /k = \mp c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**1 pt** C'est à dire $y_H = kx,\ /k \in \mathbb{R}$.

**b)** On cherche par méthode de variation de constante une solution particulière sous la forme $y_p = k(x)x$. On a donc : $y_p' = k'(x)x + k(x)$. Alors,

$$y_p' - 2xy_p = -x \quad \Leftrightarrow \quad k'(x) = -\frac{1}{x^2}\ln x \Leftrightarrow \int dk = \int \frac{1}{x^2}\ln x dx.$$

**0.5 pt** En utilisant intégration par parties $\begin{cases} U'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \\ V(x) = \ln x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U(x) = \dfrac{1}{x}, \\ V'(x) = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$

Par conséquent, on a

**1 pt** $\int dk = \int \frac{1}{x^2}\ln x dx \Rightarrow k(x) = \frac{1}{x}\ln x - \int \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{x}(1 + \ln x)$. Donc, $y_p = 1 + \ln x$.

**0.5 pt** Doù $y = y_H + y_p \Rightarrow y = kx + 1 + \ln x,\ /k \in \mathbb{R}$.

**2 -** Soit l'équation de Bernoulli $xy' + y = y^2 \ln x$ (2). Alors on divise (2) par $y^2$, on obtient

**0.5 pt** donc : $xy'y^{-2} + y^{-1} = \ln x$.

**0.5 pt** Puis, on pose $z = y^{-1}$, on trouve $z' = -y'y^{-2}$ et $-xz' + z = \ln x$

**1.5 pt** Alors, d'après (1) on obtient $z = kx + 1 + \ln x,\ /k \in \mathbb{R}$. Par conséquent $y = \dfrac{1}{kx + 1 + \ln x}$.

**3 -**

$$\begin{aligned} y(1) = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{k+1} = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad k + 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**0.5 pt**

**1 pt** C'est à dire $y = \dfrac{1}{-\frac{1}{2}x + 1 + \ln x}$.

**FIN.**