S E S S I O N N O R M A L E

A N A L Y S E -2 S 2

Université de M'sila

Faculté des Mathématiques et d'Informatique

1^{ier} Socle commun

جامعة محمد بوضياف - المسيلة

Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Module : Analyse-2

Correction d'examen (Session normale) : 24/05/ 2021

Durée de l'examen : 1 Heure et 30 Minutes

Ce sujet comporte 3 exercices :

- Exercice 1 : **Le développement limité.** .... **7 points**
- Exercice 2 : **Les intégrales** .... **7 points**
- Exercice 3 : **Les équations différentielles** .... **6 points**

Correction d'exercice 1 : (7 pts)

1 - Comme $\sin, \arctan \in C^\infty(\mathbb{R})$. Alors, par la formule de Mac-Laurin, on a

1 pt $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$ (1).

1 pt et $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$ (2).

2 - Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{1-\sin x} - \frac{1}{1-\arctan x}$.

1 pt **a)** On a $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + o(t^4)$.

Pour $\frac{1}{1-\sin x}$, et d'après (1), on pose $t = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$, on a $\begin{cases} t \to 0 \\ x \to 0. \end{cases}$ Alors, on trouve,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\sin x} &= 1 + (x - \frac{1}{6}x^3) + (x - \frac{1}{6}x^3)^2 + (x - \frac{1}{6}x^3)^3 + (x - \frac{1}{6}x^3)^4 + o(x^4) \\
&= 1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

1 pt La même méthode pour $\frac{1}{1-\arctan x}$, et d'après (2), on pose $t = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$, on obtient, donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\arctan x} &= 1 + (x - \frac{1}{3}x^3) + (x - \frac{1}{3}x^3)^2 + (x - \frac{1}{3}x^3)^3 + (x - \frac{1}{3}x^3)^4 + o(x^4) \\
&= 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

1 pt Par conséquent, on a $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$

b) D'après la formule de Mac-Laurin, on a aussi :

0.5 pt $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f'(0)}{2!}x^2 + \frac{f'(0)}{3!}x^3 + \frac{f'(0)}{4!}x^4 + o(x^4)$.

Donc, par identification, on a

$$\begin{cases} f(0) = 0, \\ \frac{f'(0)}{1!} = 0, \\ \frac{f''(0)}{2!} = 0, \\ \frac{f^{(3)}(0)}{3!} = \frac{1}{6}, \\ \frac{f^{(4)}(0)}{4!} = \frac{1}{3}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0, \\ f'(0) = 0, \\ f''(0) = 0, \\ f^{(3)}(0) = 1, \\ f^{(4)}(0) = 8. \end{cases}$$

0.5 pt

1 pt **c)** $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)}{x^3} = \lim_{x\to 0}(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}x + o(x)) = \frac{1}{6}$.

Correction d'exercice 2 : (7 pts)

1 - Posons $\exists a, b, c \in \mathbb{R}$, tels que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ on a :

1 pt $\frac{3}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$. Donc, $\frac{3}{x^3+1} = \frac{(a+b)x^2 + (-a+b+c)x + a + c}{(x+1)(x^2-x+1)}$.

Par identification on trouve,

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -a+b+c=0 \\ a+c=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1, \\ b=-1, \\ c=2. \end{cases}$$

1.5 pt C'est à dire : $\frac{3}{x^3+1} = \frac{1}{x+1} + \frac{-x+2}{x^2-x+1}$

2 - On calcule l'intégrale $I = \int f(x)dx$. On a donc,

$$\begin{aligned} I = \int f(x)dx &= \int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{-x+2}{x^2-x+1}dx \\ &= \int \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx \\ &= \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| + 2\int \frac{1}{(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})^2+1}dx. \end{aligned}$$

2 pt

Pour l'intégrale $\int \frac{1}{(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})^2+1}dx$, on fait le changement $u = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$, donc, on trouve

$du = \frac{2}{\sqrt{3}}dx$. Par conséquent

1 pt $2\int \frac{1}{(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})^2+1}dx = \sqrt{3}\int \frac{1}{u^2+1}du = \sqrt{3}\arctan(u) = \sqrt{3}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})$.

0.5 pt En fin, on obtient : $I = \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| + \sqrt{3}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}) + c$.

1 pt **3 -** D'où : $J = \int_0^1 f(x)dx = \left[\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| + \sqrt{3}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}) + c\right]_0^1 = \ln 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$.

Correction d'exercice 3 : (6 pts)

1 - Soit l'équation $y' - 2xy = -x$ (1).

a) On résoudre l'équation homogène (EH) : $y' - 2xy = 0$. Alors, on a $y = 0$ est une solution de (EH), donc si $y \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} y' - 2xy = 0 &\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 2xdx \\ &\Leftrightarrow \ln|y| = x^2 + c \Leftrightarrow y = ke^{x^2} \ /k = \mp c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1 pt C'est à dire $y_H = ke^{x^2}$, $/k \in \mathbb{R}$.

b) On cherche par méthode de variation de constante une solution particulière sous la forme $y_p = k(x)e^{x^2}$. On a donc : $y_p' = k'e^{x^2} + 2xke^{x^2}$. Alors,

$$\begin{aligned} y_p' - 2xy_p = -x &\Leftrightarrow k'(x) = -xe^{-x^2} \Leftrightarrow \int dk = \frac{1}{2}\int -2xe^{x^2}dx \\ &\Leftrightarrow k(x) = \frac{1}{2}e^{-x^2}. \end{aligned}$$

1 pt Comme $y_p = k(x)e^{x^2}$. D'où $y_p = \frac{1}{2}$.

0.5 pt Par conséquent $y = y_H + y_p \Rightarrow y = ke^{x^2} + \frac{1}{2}, \ /k \in \mathbb{R}$.

2 - Soit l'équation de Bernoulli $y' - 2xy = -x$ (2). Alors on divise (2) par y^2, on obtient

0.5 pt donc : $y'y^{-2} + 2xy^{-1} = x$.

0.5 pt Puis, on pose $z = y^{-1}$, on trouve $z' = -y'y^{-2}$ et $z' - 2xz = -x$

1.5 pt Alors, d'après (1) on a $z = ke^{x^2} + \frac{1}{2}, \ /k \in \mathbb{R}$. Par conséquent $y = \frac{1}{ke^{x^2} + \frac{1}{2}}$.

3 -

$$
\begin{aligned}
y(0) = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{k + \frac{1}{2}} = 2 \\
&\Leftrightarrow \quad k + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = 0.
\end{aligned}
$$

1 pt C'est à dire $y = 2$.

FIN.