Université Mohamed Boudiaf-M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'informatique
Département des Mathématiques

Module: **Probabilité,** Année universitaire: 2021/2022
2 ième Année Licence LMD,

Série d'exercices N° : 5 (Lois usuelles continues)

Loi uniforme:

Dire que X suit une loi uniforme sur $[a,b]$ (on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$), si sa densité de probabilité est constante sur $[a,b]$ et nulle ailleurs.
Quand on utilise la loi uniforme: Quand on choisit un nombre au hasard entre a et b.

Exercice 1 (Loi uniforme):
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[a,b]$.
1) Trouver la formule de la fonction de densité f.
2) Montrer que $E[X] = \frac{a+b}{2}$ et $V[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$.
3) Calculer sa fonction de répartition $F(X)$.

Exercice 2 (Loi uniforme):

On tire au hasard un nombre de l'intervalle $[2,3]$. On définit une variable aléatoire X qui indique le nombre obtenu.
1) Quelle est la loi de X.
2) Calculer les probabilités suivantes: $P(X = 2,5)$, $P(2,5 \leq X \leq 3)$.

Exercice 3 (Loi uniforme):

On tire au hasard un nombre entre -1 et 3. Quelle est la probabilité qu'il soit solution de l'inéquation $x^2 - 4 \leq 0$?

Exercice 4 (Loi uniforme):

On choisit un nombre au hasard entre -2 et 2. Sachant que ce nombre est supérieur à $1,8$, quelle est la probabilité que sa deuxième décimale soit 5?

Exercice 5 (Loi uniforme):

Chaque jour, la mère de Ahmed arrive à la maison à $12h$ et repart à $12h30$. Ahmed arrive aléatoirement entre $11h45$ et $13h15$ et reste 5 min avant de repartir.
1) Quelle est la probabilité qu'ils se croisent?
2) Ahmed n'est pas arrivée à la maison à $12h15$. Quelle est la probabilité qu'ils se croisent?
3) En moyenne, sur un grand nombre de journée, à quelle heure Ahmed arrive-t-il?

Exercice 6 (Loi exponentielle):

Soit $\lambda > 0$. Soit X une variable aléatoire avec sa densité:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) (**Vérification**) Vérifier les conditions de densité sur la fonction f.
2) Monter que $E[X] = \frac{1}{\lambda}$ et $V[X] = \frac{1}{\lambda^2}$. 3) Calculer sa fonction de répartition $F(X)$.
Remarque: On dit que X suit une *loi exponentielle* de paramètre λ (on note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$). Généralement on utilise la loi exponentielle pour modiliser la duée de vie.

Exercice 7 (Loi exponentielle):

Une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer λ sachant que $P(1 \leq X \leq 2) = \frac{1}{4}$.

Exercice 8 (Loi exponentielle):

La durée de vie T en année, d'un appareil avant la première panne suit une loi exponentielle de paramètre λ. D'après une étude, la probabilité que cet appareil tombe en panne pour la première fois avant la fin de la première année est $0,2$. D'après cette étude, déterminer la valeur de λ.

Exercice 9 (Loi exponentielle):

On contrôle un appareil avant la première panne. Cette variable aléatoire suit une loi exponentielle de paramètre λ.
1) La durée de vie moyenne de cet appareil avant la première panne est de deux ans. Calculer λ.
2) Quelle est parobabilté pour que cet appareil tombe en panne entre $2,5$ et $3,6$ année.

Exercice 10 (Loi exponentielle):

La durée de vie T en année, d'un appareil avant la première panne suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,3$.
1) Calculer la probabilité pour que l'appareil ne connaisse pas de panne au cours des 3 premières années.
2) Calculer la probabilité pour que l'appareil tombe en panne avant la fin de 2ieme année.
3) Supposons que l'appareil n'a connu aucune panne les 2 premières années, quelle est la probabilité pour qu'il ne connaisse aucune panne dans l'année suivante.

Exercice 11 (Loi normale):

Soit X une variable aléatoire avec sa densité est donné par: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.
1) (**Vérification**) Vérifier les conditions de densité sur la fonction f.
2) Montrer que $E[X] = 0$ et $V[X] = 1$. Calculer sa fonction de répartition $F(X)$.

Remarque: On dit que X suit une *loi Normale centrée et réduite* (on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$).