Université de M'sila
Faculté des mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques
$2^{ième}$ année Mathématiques(2021-2022)

Série N° 02(Analyse complexe)

N.B: Les questions $(*)$ sont hors **T.D.**

Exercice 1 1)$^{(*)}$ *Déterminer l'ordre de tous les zéros des fonctions suivantes:*
a) $f(z) = 1-\cos(z)$, *b)* $f(z) = z\sin(z)$, *c)* $f(z) = (1-e^z)\sin(z)$, *d)* $f(z) = z^3\sin(z^3)$.
2) *Calculer les intégrales suivantes:*
a) $\int_\gamma (2\bar{z}+5)\,dz$ *où* γ *est le segment* $[i+1, 1]$.
b) $\int_\gamma y dz$ *où* γ *est la compositions des segments* $[0, i]$ *et* $[i, i+2]$.
c)$^{(*)}$ $\int_\gamma (z^2+3z)\,dz$ *où* γ *est le segment de droite joignant les points* $(0;0)$ *et* $(0;1)$.
d)$^{(*)}$ $\int_C \frac{dz}{z}$, $\int_C \frac{dz}{z^2}$, $\int_C \frac{dz}{|z|^2}$ *où* C *est le cercle d'équation* $|z| = 1$.

Exercice 2 *En utilisant les formules intégrales de Cauchy, calculer les intégrales suivantes:*
a)$^{(*)}$ $\int_{|z|=4} \frac{ze^z}{(z-\pi)^2}$, *b)* $\int_{|z+2|=\frac{3}{2}} \frac{z^2+1}{z(z+1)}dz$, *c)* $\int_{|z|=5} \frac{dz}{z^2+16}$, *d)*$^{(*)}$ $\int_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z^3}dz$,
e)$^{(*)}$ $\int_{|z-2|=3} \frac{e^z}{z^2-6z}dz$, *f)* $\int_{|z-i|=2} \frac{\cos(\pi z)}{(z^2+4)^2}dz$, *g)*$^{(*)}$ $\int_{C_k} \frac{e^{z^2}}{z^2-6}dz$ *où* C_k *les courbes suivantes* $C_1 : |z-2| = 1$, $C_2 : |z-2| = 3$, $C_3 : |z-2| = 5$.

Exercice 3 *Développer les fonctions suivantes en série de Laurent au voisinage de* z_0 *en précisant les domaines de convergence:*
a) $f(z) = \frac{1}{z(z-3)}$, $z_0 = 0$, *b)* $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$, $z_0 = 1$, *c)*$^{(*)}$ $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$, $z_0 = -1$, *d)*$^{(*)}$ $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$.

Exercice 4 1)$^{(*)}$ *Déterminer les points singuliers et préciser leurs types puis calculer les résidus des fonctions suivantes:*

a) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2(z-1)(z-2)}$, b) $f(z) = \dfrac{e^z}{z}$, c) $f(z) = \dfrac{1-\cos(z)}{z}$, d)$^{(*)}$ $f(z) = \dfrac{\log(1+z)}{z^2}$, e) $f(z) = \dfrac{1-e^z}{1+e^z}$, f) $f(z) = \dfrac{ze^z}{z^2-1}$, g) $f(z) = e^{-\dfrac{1}{(z-1)^2}}$.

2) *Calculer les intégrales suivantes:*

$\int_{|z|=2} \tan(z)\,dz$, $\int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \dfrac{1}{z^4-1}dz$, $\int_{|z|=1} \sin\left(\dfrac{1}{z}\right) dz$, $\int_{|z-1|=3} \dfrac{e^z}{z(z+1)}dz$.

3) *En utilisant le théorème de résidus, calculer les intégrales suivantes:*

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos(x)},\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1},\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1},\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx,\ \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+1)^2}dx,\ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{5+\cos x},\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{(x^2+1)\,x}dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+x+1}dx,\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x)}dx \text{ et } \alpha \in \,]0,1[,\ \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}\,(x^2+1)^2}dx,\ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2+\sin(x)}.$$

Série 02 (Analyse Complexe).

EXO1

2) a) $\int_{[i+1,\,1]} (2\bar{z}+5)\,dz$

La paramétrisation du chemin est donnée par :

$\gamma(t) = (i+1)(1-t) + 1\times t = i+1-it$

où $0\le t\le 1$, donc $\gamma'(t) = -i$, $0\le t\le 1$

alors $\int_\gamma (2\bar{z}+5)\,dz = \int_0^1 (2\overline{\gamma(t)}+5)\gamma'(t)\,dt$

$= \int_0^1 [-2i+2+2it+5](-i)\,dt$

$= -1+7i.$

b) $\int_\gamma y\,dz$ où γ est la composition des segments $[0,i]$ et $[i,i+2]$:

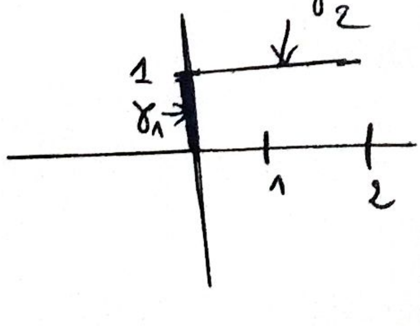
$\gamma_1 = [0,i]$, $z(t) = ti$, $0\le t\le 1$

$\int_{\gamma_1} y\,dz = \int_0^1 t\,(i\,dt) = \frac{i}{2}t^2\Big]_0^1 = \frac{i}{2}$

$\gamma_2 = [i,i+2]$, $z(t) = t+i$, $0\le t\le 2$

$\int_{\gamma_2} y\,dz = \int_0^2 dt = 2$, donc

$\int_\gamma y\,dz = \int_{\gamma_1} y\,dz + \int_{\gamma_2} y\,dz = 2+\frac{i}{2}.$



d) $\int_C \frac{dz}{z}$ où C est le cercle d'équation $|z| = 1$, donc

$z(t) = e^{it}$, $0\le t\le 2\pi$

$z'(t) = ie^{it}dt$, donc

$\int_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{i\cancel{e^{it}}}{\cancel{e^{it}}}\,dt = [it]_0^{2\pi}$

$= i2\pi.$

EXO2 :

b) $\int_{|z+2|=\frac{3}{2}} \frac{z^2+1}{z(z+1)}\,dz$, $\boxed{|z+2| = 3/2 \text{ fermé}}$

On pose $g(z) = \frac{z^2+1}{z(z+1)}$

g est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{0,-1\}$

$z=0$ à l'extérieur de $|z+2| = \frac{3}{2}$

$z=-1$ à l'intérieur de $|z+2| = \frac{3}{2}$

alors d'après le thé de Cauchy on a

$\int_{|z+2|=\frac{3}{2}} \frac{z^2+1}{z(z+1)}\,dz = 2\pi i g(-1)$

$= -4\pi i$

$$\int_{|z|=5} \frac{dz}{z^2+16} \ ?$$

$|z|=5$ est chemin fermé (Cercle de Centre 0 et de rayon 5).

on a $\frac{1}{z^2+16} = \frac{1/8i}{z-4i} - \frac{1/8i}{z+4i}$

donc $\int_{|z|=5} \frac{dz}{z^2+16} = \frac{1}{8i}\left[\int_{|z|=5} \frac{dz}{z-4i} - \int_{|z|} \frac{dz}{z+4i}\right]$

d'après th Cauchy, on a

$$\int_{|z|=5} \frac{dz}{z^2+16} = \frac{1}{8i}\left[2\pi i f(4i)\right] - \frac{1}{8i}\left[2\pi i f(-4i)\right]$$

où $f(z) = 1$

$-4i, 4i$ à L'interieur de $(|z|=5)$.

f) $$\int_{|z-i|=2} \frac{\cos(\pi z)}{(z^2+4)^2} dz = I$$

Les deux singularités sont $-2i$ et $2i$ et le point $2i$ est à L'intérieur de $(|z-i|=2)$ et le point $-2i$ est à L'extérieur de $(|z-i|=2)$

et on a $\frac{\cos(\pi z)}{(z^2+4)^2} = \frac{\cos \pi z}{(z+2i)^2(z-2i)^2}$

Posons $g(z) = \frac{\cos \pi z}{(z+2i)^2}$

En utilisant le théorème d'intégrales de Cauchy, on a

$$I = \frac{2\pi i}{1!} g'(2i)$$

La dérivée de g est donnée par

$$g'(z) = \frac{-\pi(z+2i)^2 \sin(\pi z) - 2(z+2i)\cos \pi z}{(z+2i)^4}$$

alors

$$I = \frac{\pi \sinh(2\pi) + \pi \cosh(2\pi)}{32}$$

EX 3:

a) Pour $|z| < 3$, on a

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{z-3} = \frac{1}{3z(\frac{z}{3}-1)}$$

$$= \frac{-1}{3z} \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3z} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{z}{3}\right)$$

Pour $|z| > 3$, on a.

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{z-3} = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1-\frac{3}{z}}$$

$$= \frac{1}{z^2} \sum_{n\geq 0}^{\infty} \left(\frac{3}{z}\right)^n$$

b) $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$, $z_0 = 1$

$$f(z) = e \cdot \frac{e^{z-1}}{(z-1)^2} = e \sum_{n\geq 0} \frac{(z-1)^n}{n!}$$

$$= \underbrace{\frac{e}{(z-1)^2} + \frac{e}{z-1}}_{\text{partie singulière}} + \underbrace{\frac{e}{2} + \frac{(z-1)}{3!} + \cdots}_{\text{partie de Taylor}}$$

$z=1$ est un pôle d'ordre 2. double.

EXO4 :

a) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2(z-1)(z-2)}$

les singularités de f sont $z_0 = 0$

$z_1 = 1, \quad z_2 = 2$

on a $\lim\limits_{z \to 1} (z-1) f(z) = -e$

et $\lim\limits_{z \to 2} (z-2) f(z) = \dfrac{e^2}{4}$

donc $z_1 = 1$ et $z_2 = 2$ sont des pôles simples.

et on a $\lim\limits_{z \to 0} z^2 f(z) = \frac{1}{2}$

donc $z_0 = 0$ est un pôle double

on calcule les résidus.

$$Res(f,0) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to 0} \left[z^2 \frac{e^z}{z^2(z-1)(z-2)} \right]'$$

$$= \frac{5}{4}$$

$$Res(f,1) = \lim_{z \to 1} \left[(z-1) f(z) \right]$$

$$= -e$$

$$Res(f,2) = \lim_{z \to 2} \left[(z-2) f(z) \right]$$

$$= e^2/4$$

b) $f(z) = e^z/z$

les singularité de f ~~est~~ $z_0 = 0$

et on a $\lim\limits_{z \to 0} (z-0) f(z) = e^0 = 1$

donc $z_0 = 0$ est un pôle simple

et $Res(f,0) = \lim\limits_{z \to 0} z f(z) = 1$

c) $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{z}$,

$z_0 = 0$ est une singularité de f

et nous avons

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{z} = \frac{1 - (1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots)}{z}$$

$$= \frac{z}{2!} - \frac{z^3}{4!} + \cdots$$

Par conséquent, $z_0 = 0$ est une singularité apparente ou bien

on a $\lim\limits_{z \to 0} f(z) = 0$.

e) $f(z) = \dfrac{1 - e^z}{1 + e^z}$

si $1 + e^z \neq 0$, alors

$z_k = (2k+1)\pi i, \ k \in \mathbb{Z}$

on a $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ tq

$g(z) = 1 - e^z$ et $h(z) = 1 + e^z$

et $g(z_k) \neq 0$ et $h'(z_k) \neq 0$

alors

$$Res(f, z_k) = \frac{g(z_k)}{h'(z_k)} =$$

$$= \frac{1 - e^{(2k+1)\pi i}}{e^{(2k+1)\pi i}} = -2.$$

f) $f(z) = \frac{z e^{z}}{z^{2}-1}$

les points -1 et 1 sont des pôles simples et on a.

$Re(f,1) = \lim_{z \to 1} \left[(z-1) \frac{z e^{z}}{z^{2}-1} \right]$

$= -e/2$

$Re(f,-1) = \lim_{z \to -1} \left[(z+1) \frac{z e^{z}}{z^{2}-1} \right]$

$= -\frac{1}{2e}$

g) $f(z) = \exp\left(\frac{-1}{(z-1)^{2}} \right)$, $z=1$ est une singularité de f

$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n}}{n!(z-1)^{2n}}$, il existe une infinité du coefficients de $\left(\frac{1}{(z-1)^{n}} \right)$ ne sont pas ~~nulle~~ tous nulls ; alors $z=1$ est une singularité essentielle.

2] Calcul des intégrales :

a) $\int_{|z|=2} \tan g(z) \, dz = I_1$

on a $\tan g(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$

si $\cos(z) = 0$ alors $z_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

les singularités sont $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$. Ainsi

$I_1 = 2\pi i \left(Res(f, \frac{\pi}{2}) + Res(f, -\frac{\pi}{2}) \right)$

$= -4\pi i$ tq :

$Res(f, \pi/2) = \frac{\sin(\pi/2)}{(\cos(x))'(\pi/2)}$

$= \frac{\sin \pi/2}{-\sin \pi/2} = -1$

$Res(f, -\frac{\pi}{2}) = \frac{\sin(-\pi/2)}{-\sin(-\pi/2)} = -4\pi i$

b) $\int_{|z-i| = \frac{1}{2}} \frac{1}{z^{4}-1} \, dz = I_2$

Les singularités de $\frac{1}{z^{4}-1}$ sont $1, -1, i, -i$ et on a i à ~~l'int~~ l'intérieur de $(|z-i| = \frac{1}{2})$ et les pts $1, -1, -i$ sont à ~~l'ext~~ l'extérieur de $(|z-i| = \frac{1}{2})$, donc

$I_2 = 2\pi i \, Res(f, i) = \lim (z-i) \frac{1}{z^{4}-1}$

$= 2\pi i \left(\frac{1}{4 i^{3}} \right) = \boxed{-\pi/2 = I_2}$

c) $\int_{|z|=1} \sin\left(\frac{1}{z} \right) dz = I_3$

on a.

$\sin\left(\frac{1}{z} \right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3! z^{3}} + \cdots$

$\Rightarrow Res(f, 0) = 1$ et

$\boxed{I_3 = 2\pi i}$

d) $I_4 = \int_{|z-1|=3} \underbrace{\frac{e^z}{z(z+1)}}_{= f(z)} dz$

les singularité de f sont $z_0 = 0$ et $z_1 = -1$
0 et -1 sont à l'intérieur de $|z-1| = 3$ et sont des pôles simples

donc

$I_4 = 2\pi i \left[Res(f,0) + Res(f,-1) \right]$

$= 2\pi i \left[\lim_{z\to 0} z f(z) + \lim_{z\to -1} (z+1) f(z) \right]$

$= 2\pi i \left[e - \frac{1}{e} \right] = \boxed{2\pi i \left(\frac{e-1}{e}\right) = I_4}$

3)

a) $I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$

on pose $z = e^{ix}$, $0 \leq x \leq 2\pi$

donc $\cos x = \frac{z+z^{-1}}{2}$ et $dx = \frac{dz}{iz}$

et $|z| = 1$. Alors

$I_1 = \int_{|z|=1} \frac{1}{2+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})} \frac{dz}{iz}$

$= \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+4z+1}$

$= \frac{2}{i} 2\pi i \, Res\left(\frac{1}{(z+2+\sqrt{3})(z+2-\sqrt{3})}, -2+\sqrt{3} \right)$

$= \boxed{\frac{2\pi}{\sqrt{3}} = I_1}$

$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$

on calcule $\int_\gamma \frac{dz}{z^4+1}$

$z^4+1 = 0$, alors $z_k = e^{(2k+1)\pi i/4}$

$k = 0,1,2,3$ on obtient $z_0 = e^{\pi i/4}$

$e^{3\pi i/4}$, $e^{5\pi i/4}$ et $e^{7\pi i/4}$

il claire que les points $e^{\pi i/4}$ et $e^{3\pi i/4}$ sont à l'intérieur de γ

donc

$\int_\gamma \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i \left[Res(f, e^{\pi i/4}) + Res(f, e^{3\pi i/4}) \right]$ où

$f(z) = \frac{1}{1+z^4}$, alors

$\int_\gamma \frac{dz}{z^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

D'autre part

$\int_\gamma \frac{dz}{z^4+1} = \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^4+1} + \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4+1}$

si $R \to +\infty$, alors

$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^4+1} \longrightarrow 0$

Car le degré de z^4+1 est $4 \geq 0+2$. Nous obtenons $\frac{I}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

• $I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx$

On a $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, donc

$$I_4 = \frac{1}{2}\left[\int_0^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2} dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2} dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(1+x^2)^2} dx$$

On pose $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$ avec $\lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 0$, donc

$$\boxed{I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dx = 2\pi i \sum Res(f(z)e^{iz}, z_k)}$$

Puisque les singularités sont $z_1 = i$ et $z_2 = -i$ avec $Im(z_1) > 0$ et $Im(z_2) < 0$, donc

$$I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dx = 2\pi i \, Res(f(z)e^{iz}, i)$$

$= \frac{1}{2e}$, alors

$$\boxed{I_4 = \frac{\pi}{e}}$$

$$I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)x} dx$$

puisque $z_0 = i$ est le seul pôle de $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+1)z}$ avec $Im(i) > 0$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)x} dx = i\pi + 2\pi i \, Res(f, i)$$

$= i\pi(1-e^{-1})$ et on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)x} dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)x} dx = 2i\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)x} dx$$

alors $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)x} dx = (1-e^{-1})\frac{\pi}{2}$