Université de M'sila
Département de Mathématiques
Module : Analyse complexe
$2^{ième}$année L.M.D (2014 /2015)

Examen final (Durée : 90min)

Q1(1.50 pts):
Quelles sont les conditions de cauchy-Riemann en coordonnées cartésiennes.
Q2(3.50 pts):
Trouver une fonction holomorphe $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ telle que $P(x,y) = e^x \sin y$.
Q3(02 pts):
En utilisant la formule intégrale de Cauchy. Calculer $\int_{|z|=1} f(z)dz$.
Q4(03 pts):
Combien de racines de l'équation $z^4 + 3z^3 + 6$ dans le disque $|z| < 2$.
Q5(1.50 pts):
Rappeler le theorème des résidus.
Q6(03 pts):
Soit $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$. Calculer le résidu aux points singuliers de f , puis Calculer $\int_{|z|=1} f(z)dz$.
Q7(04 pts):
Choisir (a) ou bien (b)
(a) Calculer la transformée de Fourier de $\frac{1}{x^4+1}$c-à-dire $F\left(\frac{1}{x^4+1}\right) =?$, puis déduire $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^4+1} dx$.
(b) Calculer $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\sin^2(x)}$.

$\mathcal{R} - \mathcal{HERAI}$

Université de M'sila
Département de Mathématiques
Module : Analyse complexe
$2^{ième}$année L.M.D (2015 /2016)

Examen final (Durée : 90min)

Exercice 1: **(11 pts)**

Partie 1: (04pts) Rappeler la définition d':
1- Une fonction harmonique.
2- Un point singulier.
3- Une série de Laurent.
4- Un résidu d'une fonction en un point singulier.
Partie 2: (02 pts) Trouver la série de laurent de la fonction $f(z) = e^{\frac{2}{z}} + \sin 3z$ en point $z = 0$.
Partie 3: (05 pts) Vérifier que $P(x, y) = 2x(1 - y)$ est une fonction harmonique. Trouver une fonction $Q(x, y)$ de manière que la fonction $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ soit holomorphe et exprimer f à l'aide de la variable z.

Exercice 2: **(04 pts=02 pts+02 pts)**

1- Combien de racines de l'équation $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$ dans le disque $|z| < 1$.
2- En utilisant le principe de l'argument, calculer

$$\int_{|z|=1} \frac{8z^7 - 20z^4 + 2z}{z^8 - 4z^5 + z^2 - 1} dz.$$

Exercice 3: **(05 pts=02 pts+03 pts)**

1- Sur l'ellipse $\gamma : z(t) = 2\cos t + 3i \sin t$ (pour $t \in [0; 2\pi]$), calculer

$$\int_\gamma (x - iy) dz.$$

2- En utilisant le théorème des résidus, calculer la valeur d'une seule intégrale parmi les deux intégrales suivantes

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\,(x+1)}, \qquad J = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2 + \sin x)^2}$$

Bonne chance à tous

Correction d'examen final (Analyse complexe 2015-2016)

Exercice 1

Partie 1:

Déf$_1$- f est dite harmonique si $\triangle f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$.

Déf$_2$- z_0 est un point singulier de $f \Leftrightarrow f$ n'est pas analytique à z_0, bien que dans chaque voisinage de z_0 il y ait au moins un point où la fonction est analytique.

Déf$_3$- Une série de fonctions sous forme $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n (z-z_0)^n$ porte le nom série de Laurent.

Déf$_4$- le cofficient de $\frac{1}{z-z_0}$ dans la série de Laurent de f en z_0 est appelé le résidu de f en z_0, noté $Res(f, z_0)$.

Partie 2:

$$f(z) = e^{\frac{2}{z}} + \sin 3z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n! z^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Partie 3: $P(x,y) = 2x(1-y)$

$\triangle P(x,y) = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = 0 \Rightarrow P$ est harmonique.

Il existe une fonction $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de sorte que $P + iQ$ est une fonction holomorphe, alors P et Q vérifient les conditions de Cauchy-Riemann donc

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = 2 - 2y = \frac{\partial Q}{\partial y} \Rightarrow Q(x,y) = 2y - y^2 + c(x).$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -2x = -c'(x) \Rightarrow c(x) = x^2 + \lambda / \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Finalement, on trouve $Q(x,y) = 2y - y^2 + x^2 + \lambda / \quad \lambda \in \mathbb{R}$ et la fonction demendée

$$f(z) = P(x,y) + iQ(x,y) = 2x(1-y) + i(2y - y^2 + x^2 + \lambda) \text{ tel que } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pour exprimer $f(z)$ à l'aide de la variable z, on prend $y = 0$ et on remplace x par z, on obtient

$$f(z) = 2z + iz^2 + \lambda i \text{ tel que } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2

1- Posons $f(z) = -4z^5$ et $g(z) = z^8 + z^2 - 1$ si z est appartient au cercle $C(0,1)$, c-à-dire $|z| = 1$, alors

$$|f(z)| = 4 \text{ et } |g(z)| = \left|z^8 + z^2 - 1\right| \leq \left|z^8\right| + \left|z^2\right| + |-1| = 3$$

donc $|g(z)| < |f(z)|$ sur $C(0,1)$

conlusion: $f(z) = -4z^5$ et $f(z) + g(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ ont le même nombre des zéros sur $D(0,1)$, et comme $z_0 = 0$ est une racine de $f(z) = -4z^5$ d'ordre 5, alors $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ admet 5 racines dans $D(0,1)$.

2- $\int_\gamma \frac{f'(z)dz}{f(z)} = 2\pi i(Z - P)$ où Z est le nombre de zéros de f et P est le nombre de pôles de f.

Posons $f(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$

$$\int_{|z|=1} \frac{8z^7 - 20z^4 + 2z}{z^8 - 4z^5 + z^2 - 1} dz = 2\pi i(5 - 0) = 10\pi i.$$

Exercice 3

1/ Sur l'ellipse $\gamma : z(t) = 2\cos t + 3i \sin t$ (pour $t \in [0; 2\pi]$), on a

$$\begin{aligned}\int_\gamma (x - iy)dz &= \int_0^{2\pi} (2\cos t - 3i \sin t)(-2\sin t + 3i\cos t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} (6i + 5\sin t \cos t)dt \\ &= 12\pi i + \frac{5}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2t dt = 12\pi i.\end{aligned}$$

2/ Choix 1 ***

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1+x)}dx = \frac{\pi e^{\frac{\pi i}{3}}}{\sin\frac{\pi}{3}} \sum_{z_k} Rés(\frac{1}{\sqrt[3]{z}(1+z)}, -1)$$

$\lim\limits_{z\to -1} (z - (-1)) \frac{1}{\sqrt[3]{z}(1+z)} = \frac{1}{\sqrt[3]{-1}} = e^{-\frac{\pi i}{3}}$. alors -1 est un pôle simple et

$$Rés(\frac{1}{\sqrt[3]{z}(1+z)}, -1) = e^{-\frac{\pi i}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}.$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{z}(1+x)}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

2/ Choix 2 ***

$J = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\sin x)^2}$, On pose $z = e^{ix}$, alors $\sin x = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$; $dz = izdx$. l'intégrale s'ecrite

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\sin x)^2} = \int_{C(0,1)} \frac{4izdz}{(z^2 + 4iz - 1)^2}$$

$$z^2 + 4iz - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = z_1 = (\sqrt{3} - 2)i; & |z_1| < 1 \\ z = z_2 = -(\sqrt{3} + 2)i; & |z_2| > 1 \end{cases}, \text{ donc}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\sin x)^2} = 2\pi i \sum_{|z_k|<1} Rés(f, z_k) \\ &= 2\pi i Rés(f, z_1) \text{ où } f(z) = \frac{4iz}{(z^2 + 4iz - 1)^2}.\end{aligned}$$

$\lim\limits_{z\to z_1} (z - z_1)^2 f(z) = \frac{4iz_1}{(z_1 - z_2)^2} = \frac{\sqrt{3}-2}{3}$. alors z_1 est un pôle double et

$$Rés(f, z_1) = \lim_{z\to z_1} \left((z - z_1)^2 f(z)\right)' = \frac{-2\sqrt{3}i}{9}.$$

Donc

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\sin x)^2} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

****

Université de M'sila
Département de Mathématiques
Module : Analyse complexe
$2^{ème}$année L.M.D(2017/2018)

Examen final (Durée : 90min)

===

Questions de cours: (05 pts)

1- Rappeler la définition d':
une fonction harmonique, un point singulier, une série de Laurent.

2- Que vaut le résidu (en pratique) d'une fonction f en un point singulier z_0 où
$\triangleright$ z_0 est une singularité apparente.
$\triangleright$ z_0 est un pôle d'ordre m.

Exercice 1: (04 pts) ———————————————————————————-

Quelles sont toutes les fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ dont la partie réelle est la fonction $P(x, y) = 2xy$.

Exercice 2: (04 pts) ———————————————————————————-

Trouver le nombre de racines de l'équation $z^5 + 15z + 1 = 0$ dans la couronne $\frac{3}{2} < |z| < 2$.

Exercice 3: (07 pts): ———————————————————————————-

1- Enoncer le théorème des résidus.

2- En utilisant le théorème des résidus, calculer l'intégrale réelle

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{2 + \sin x} dx.$$

== **Bon courage**

Correction d'examen final (Analyse complexe 2017-2018)

Questions de cours

Déf$_1$- f est dite harmonique si $\triangle f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$.
Déf$_2$- z_0 est un point singulier de $f \Leftrightarrow f$ n'est pas analytique à z_0, bien que dans chaque voisinage de z_0 il y ait au moins un point où la fonction est analytique.
Déf$_3$- Une série de fonctions sous forme $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n (z-z_0)^n$ porte le nom série de Laurent.
Déf$_4$- le cofficient de $\frac{1}{z-z_0}$ dans la série de Laurent de f en z_0 est appelé le résidu de f en z_0, noté $Res(f, z_0)$.
2- a- $Res(f, z_0) = 0$. b- $Res(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim\limits_{z \to z_0} [(z-z_0)^m f(z)]^{(m-1)}$

Exercice 1 soit $P(x,y) = 2xy$
$\triangle P(x,y) = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = 0 \Rightarrow P$ est harmonique. Donc Il existe une fonction $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de sorte que $P + iQ$ est une fonction holomorphe, alors P et Q vérifient les conditions de Cauchy-Riemann donc

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = 2y = \frac{\partial Q}{\partial y} \Rightarrow Q(x,y) = y^2 + c(x).$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2x = -c'(x) \Rightarrow c(x) = -x^2 + \lambda / \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Finalement, on trouve $Q(x,y) = y^2 - x^2 + \lambda / \quad \lambda \in \mathbb{R}$ et la fonction demendée

$$f(z) = P(x,y) + iQ(x,y) = 2xy + i(y^2 - x^2 + \lambda) \text{ tel que } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pour exprimer $f(z)$ à l'aide de la variable z, on prend $y = 0$ et on remplace x par z, on obtient

$$f(z) = -iz^2 + \lambda i \text{ tel que } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2
1- Sur $|z| < 2$. Posons $f(z) = z^5$ et $g(z) = 15z + 1$ si z est appartient au cercle $C(0,2)$, c-à-dire $|z| = 2$, alors

$$|f(z)| = 32 \text{ et } |g(z)| = |15z + 1| \leq |15z| + |1| = 33$$

donc $|g(z)| < |f(z)|$ sur $C(0,2)$
conlusion: $f(z) = z^5$ et $f(z) + g(z) = z^5 + 15z + 1$ ont le même nombre des zéros sur $D(0,2)$, et comme $z_0 = 0$ est une racine de $f(z) = z^5$ d'ordre 5, alors $z^5 + 15z + 1$ admet 5 racines dans $D(0,2)$.
1- Sur $|z| < \frac{3}{2}$.Posons $f(z) = 15z$ et $g(z) = z^5 + 1$ si z est appartient au cercle $C(0, \frac{3}{2})$, c-à-dire $|z| = \frac{3}{2}$, alors

$$|f(z)| = \frac{45}{2} \text{ et } |g(z)| = \left|z^5 + 1\right| \leq \frac{275}{32}$$

donc $|g(z)| < |f(z)|$ sur $C(0, \frac{3}{2})$
conlusion: $f(z) = 15z$ et $f(z) + g(z) = z^5 + 15z + 1$ ont le même nombre des zéros sur $D(0, \frac{3}{2})$, et comme $z_0 = 0$ est une racine simple de $f(z) = 15z$, alors $z^5 + 15z + 1$ admet une racines dans $D(0, \frac{3}{2})$.
et comme **conclusion générale** $z^5 + 15z + 1$ admet 4 racines dans la couronne $C(0, \frac{3}{2}, 2)$

Exercice 3

$$J=\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{2+\sin x}dx.$$

On pose $z=e^{ix}$, alors $\sin x=\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})$; $dz=izdx$. l'intégrale s'ecrite

$$J=\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{2+\sin x}dx=\int_{C(0,1)}\frac{z^2-1}{z\left(z^2+4iz-1\right)}dz$$

$$z^2+4iz-1=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} z=z_1=(\sqrt{3}-2)i;\ \ |z_1|<1 \\ z=z_2=-(\sqrt{3}+2)i;\ \ |z_2|>1\end{array}\right.\text{, donc}$$

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{2+\sin x}dx=2\pi i\sum_{|z_k|<1}Rés(f,z_k) \\ &= 2\pi i\left[Rés(f,0)+Rés(f,z_1)\right]\ \text{ où } f(z)=\frac{z^2-1}{iz\left(z^2+4iz-1\right)}.\end{aligned}$$

$\lim\limits_{z\to z_1}(z-z_1)\,f(z)=\frac{z_1^2-1}{iz_1(z_1-z_2)}=\frac{-8+4\sqrt{3}}{\left(4\sqrt{3}-6\right)i}$. alors z_1 est un pôle simple et

$$Rés(f,z_1)=-\frac{8-4\sqrt{3}}{(6-4\sqrt{3})\,i}.$$

$\lim\limits_{z\to z_1}(z-0)\,f(z)=1$. alors $z=0$ est un pôle simple et

$$Rés(f,0)=\frac{1}{i}.$$

Donc

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{2+\sin x}dx=2\pi i\left[\frac{1}{i}-\frac{8-4\sqrt{3}}{(6-4\sqrt{3})\,i}\right] \\ &= 2\pi+\frac{4\pi}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

****

Université de M'sila
Département de Mathématiques
Module : Analyse complexe
$2^{ème}$année L.M.D(2017/2018)

25 Ramadan 1439

Examen de rattrapage (Durée : 90min)

Questions de cours: (08 pts)

1- Rappeler la définition d': une fonction holomorphe, un résidu ?

2- Existe-t-il une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ bornée non constante ? justifier?

3- Comment classer les points singuliers à l'aide des séries de Laurent ?

4- Rappeler les conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires ?

5- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $\sin z = 2$

Exercice 1: (05 pts)

Quelles sont toutes les fonctions holomorphes dont la partie réelle est la fonction $P(x;y) = x^2 + 2xy - y^2$

Exercice 2: (07 pts):

1- Enoncer le théorème des résidus.

2- En utilisant le théorème des résidus, calculer l'intégrale réelle

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}$$

Bon courage et saha f'tourkom

Correction d'examen de rattrapage (Ana. complexe 2017-2018)

Questions de cours

1- Une fonction f est dite holomorphe en un point z_0 si elle est dérivable dans un disque ouvert centré en z_0..

2- non, voir le cours "Théorème de Liouville"

Theorem 1 *Soit f une fonction analytique sur $\mathbb{C}$, si f est bornée alors f est constante .*

3- Le développement de Laurent de $f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$.

Classification des singularités

• Si tous b_n sont nuls, la fonction est analytique dans $D(z_0, r)$, on dit que z_0 est une singularité apparente.

• Si les b_n sont non tous nuls; i.e s'il existe un b_m non nul tel que $b_n = 0$ pour tout $n > m$, alors z_0 est un pôle d'ordre m et

$$\forall z \in \dot{D}(z_0, r) : f(z) = \frac{b_m}{(z-z_0)^m} + \frac{b_{m-1}}{(z-z_0)^{m-1}} + ...$$

• Si $m = 1$; on dit qu'on a un pôle simple .

• S'il existe une infinité de b_m non nuls, la singularité est dite essentielle.

4- Les conditions de Cauchy-Riemann en coordonnés polaires données par

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}.$$

5- voir TD "série 1 Ex 2".

Exercice 1 Soit $P(x,y) = x^2 + 2xy - y^2$

$\triangle P(x,y) = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = 0 \Rightarrow P$ est harmonique. Donc Il existe une fonction $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de sorte que $P + iQ$ est une fonction holomorphe, alors P et Q vérifient les conditions de Cauchy-Riemann donc

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = 2x + 2y = \frac{\partial Q}{\partial y} \Rightarrow Q(x,y) = 2xy + y^2 + c(x).$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow 2x - 2y = -\left(2y + c'(x)\right) \Rightarrow c(x) = -x^2 + \lambda / \ \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Finalement, on trouve $Q(x,y) = 2xy + y^2 - x^2 + \lambda / \ \ \lambda \in \mathbb{R}$ et la fonction demendée

$$f(z) = P(x,y) + iQ(x,y) = x^2 + 2xy - y^2 + i(2xy + y^2 - x^2 + \lambda) \text{ tel que } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pour exprimer $f(z)$ à l'aide de la variable z, on prend $y = 0$ et on remplace x par z, on obtient

$$f(z) = (1-i)z^2 + \lambda i \text{ tel que } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6},$$

Considérons $f(z) = \frac{1}{1+z^6}$: est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ privé de ses pôles

$$z_0 = e^{\frac{(1+2k)\pi}{6}i}, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

z_0 z_1 et z_2 dans le demi-plan supérieur

$$\lim_{z \longrightarrow z_k} (z - z_k)\, f(z) = \frac{1}{6z_k^5} = Res(f, z_k).\ (z_k \text{ sont des pôles simples })$$

Alors

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_k)>0} Rés(f, z_k) = 2\pi i(Rés(f, z_0) + Rés(f, z_1) + Rés(f, z_2)) = \frac{2\pi}{3}.$$

****

Université de M'sila — 29 Juin 2019
Département de Mathématiques
Module : Analyse complexe
$2^{ième}$année L.M.D (2018 /2019)

Examen final (Durée : 90min)

Exercice 1: **(12 pts)**

Partie 1: (03pts) Rappeler la définition d':
1- Un point singulier.
2- Une série de Laurent.
3- Un résidu d'une fonction en un point singulier.

Partie 2: (03 pts) Trouver le développement en série de laurent, puissances de z, de la fonction $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$ dans la région $1 < |z| < 3$.

Partie 3: (06 pts) Vérifier que $P(x, y) = xy$ est une fonction harmonique. Trouver une fonction $Q(x, y)$ de manière que la fonction $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ soit holomorphe et exprimer f à l'aide de la variable z.

Exercice 2: **(04 pts=02 pts+02 pts)**

1- En utilisant la formule integrale de cauchy, calculer l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z^7} dz \text{ où } \gamma \text{ est le cercle } |z-1| = 2, \text{ sens positif}$$

2- Sur le demi -cercle $\gamma : z(t) = 2\cos t + 2i \sin t$ (pour $t \in [0; \pi]$), calculer

$$I = \int_\gamma (x^2 + y^2) dz.$$

Exercice 3: **(04 pts)**

En utilisant le théorème des résidus, calculer l'intégrale

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}$$

Bonne chance à tous

Corrigé type de l'examen final

"Analyse complexe 2018-2019"

Exercice 1

Partie 1:

Déf$_1$- z_0 est un point singulier de $f \Leftrightarrow f$ n'est pas analytique à z_0, bien que dans chaque voisinage de z_0 il y ait au moins un point où la fonction est analytique.

Déf$_2$- Une série de fonctions sous forme $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n (z-z_0)^n$ porte le nom série de Laurent.

Déf$_3$- le cofficient de $\frac{1}{z-z_0}$ dans la série de Laurent de f en z_0 est appelé le résidu de f en z_0, noté $Res(f, z_0)$.

Partie 2: On a

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-3}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-z} &= -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}} \text{ car } 1 < |z| \\
\frac{1}{z-3} &= -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{3^n} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} \text{ car } |z| < 3
\end{aligned}$$

donc

$$f(z) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} \; 1 < |z| < 3.$$

Partie 3: $P(x,y) = xy$

$\triangle P(x,y) = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = 0 \Rightarrow P$ est harmonique.

Il existe une fonction $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de sorte que $P + iQ$ est une fonction holomorphe, alors P et Q vérifient les conditions de Cauchy-Riemann donc

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = y = \frac{\partial Q}{\partial y} \Rightarrow Q(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + c(x).$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = x = -c'(x) \Rightarrow c(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \lambda / \;\; \lambda \in \mathbb{R}.$$

Finalement, on trouve $Q(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \lambda / \;\; \lambda \in \mathbb{R}$ et la fonction demendée

$$f(z) = P(x,y) + iQ(x,y) = xy + i(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \lambda) \text{ tel que } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pour exprimer $f(z)$ à l'aide de la variable z, on prend $y = 0$ et on remplace x par z, on obtient

$$f(z) = -\frac{i}{2}z^2 + \lambda i \text{ tel que } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2

1/

$$\int_{|z-1|=2}\frac{\cos z}{z^7}dz=\int_{|z-1|=2}\frac{\cos z}{(z-0)^{1+6}}dz=\frac{6!}{2\pi i}\cos^{(6)}(0)=-\frac{6!}{2\pi i}$$

2/ Sur le demi -cercle $\gamma : z(t)=2\cos t+2i\sin t$ (pour $t\in[0;\pi]$), on a

$$\begin{aligned}\int_\gamma |z|^2\,dz &= \int_0^\pi 4\left(2ie^{it}\right)dt\\ &= 8\left.e^{it}\right|_0^\pi\\ &= -16.\end{aligned}$$

Exercice 3

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^6)}=2\pi i\sum_{z_k \text{ dans le demi-plan sup.}} R\acute{e}s(\frac{1}{(1+z^6)},z_k)$$

$1+z^6=0\Leftrightarrow z_k=e^{\frac{(1+2k)\pi i}{6}}$ avec $k=0,1...,5.$

les pts singuliers dans le demi-plan supérieur sont

$$z_0=e^{\frac{\pi}{6}i},z_1=e^{\frac{\pi}{2}i}=i \text{ et } z_2=e^{\frac{5\pi}{6}i}$$

$\lim\limits_{z\to z_k}(z-z_k)f(z)=\lim\limits_{z\to z_k}\frac{z-z_k}{1+z^6}=\frac{1}{6}(z_k)^{-5}$. Alors z_k sont des pôles simples et

$$R\acute{e}s(f,z_k)=\frac{1}{6}(z_k)^{-5}.$$

$$\begin{aligned}I &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^6)}\\ &= 2\pi i(R\acute{e}s(f,z_0)+R\acute{e}s(f,z_1)+R\acute{e}s(f,z_2))\\ &= 2\pi i(\frac{1}{6}(z_0)^{-5}+\frac{1}{6}(z_1)^{-5}+\frac{1}{6}(z_2)^{-5})\\ &= \frac{\pi i}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}-i+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2})\\ &= \frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

Université de M'sila 10 Juillet 2019
Département de Mathématiques
Module : Analyse complexe
$2^{ième}$année L.M.D

Examen de rattrapage (Durée : 90min)

Exercice 1:

1: Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = -4$.

2: Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, Montrer que

$$\left(\frac{\partial |f(z)|}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial |f(z)|}{\partial y}\right)^2 = |f'(z)|^2$$

3: Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}$définit une fonction analytique f sur le disque ouvert $D(0,1)$, puis montrer que f coïncide sur $D(0,1)$ avec la détermination principale de $g(z) = Log(1+z)$.

4: Trouver le nombre de racines de l'équation $3z^2 - e^z = 0$ dans le disque $|z| < 1$.

Exercice 2:

1: Vérifier que $P(x,y) = xy$ est une fonction harmonique.

2: Trouver une fonction $Q(x,y)$ de manière que la fonction $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ soit holomorphe et exprimer f à l'aide de la variable z.

Exercice 3:

1: En utilisant la formule integrale de cauchy, calculer l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{\sin(\frac{\pi z}{2})}{(z-1)^2(z-3)}dz \text{ où } \gamma \text{ est le cercle } |z-1| = 1, \text{ sens positif}$$

2: En utilisant le théorème des résidus, calculer l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x)}{4 - 2\cos(x)}dx$$

Bonne chance à tous