الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF –M'SILA-

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

Cours et exercices de

Analyse complexe

Par:

HERAIZ Rabah

Deuxième année Licence Mathématiques (L.M.D)

Table des matières

Chapitre 1

L'holomorphie et l'analycité

1.1 Rappel

1.1.1 Généralités sur les nombres complexes

Définition 1.1 *Un nombre complexe z s'écrit sous la forme dite algébrique $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels, et i est appelé l'unité imaginaire, a la propriété $i^2 = -1$.*
Le nombre x est appelée la partie réelle de z ; on note $x = Re(z)$.
Le nombre y est appelée la partie imaginaire de z, on note $y = Im(z)$.
L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

On a

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Remarque 1.2 $(\mathbb{C}, +, \times)$ *est un corps commutatif.*

Définition 1.3 *Le module d'un nombre complexe $z = x + iy$ est définit par*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Définition 1.4 *Le conjugué d'un nombre complexe $z = x + iy$ est définit par*

$$\overline{z} = x - iy.$$

On peut exprimer les nombres complexes en termes des coordonnées polaires r et θ

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

dans ce cas

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et θ est l'argument de z noté $\arg(z)$.
L'argument principal noté $Arg(z)$ sera compris entre $-\pi$ et π

$$-\pi < Arg(z) \leq \pi$$

1.1.2 Forme exponentielle d'un nombre complexe

Si on applique la formule d'Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

alors on peut réprésenter un nombre complexe de module r et de argument θ ainsi par

$$z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) = re^{i\theta}.$$

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a les proprietés :
1- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
2- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
3- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

1.1.3 Puissances, Racines, Formule de Moivre

On a

$$z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta},$$

En particulier posons $r = 1$, on obtient

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \text{ ou } \left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

Cette formule est de Moivre.
Un nombre complexe w est appelé racine $n^{ième}$ de z si

$$w^n = z \text{ ou bien } w = z^{\frac{1}{n}}$$

si $w = \rho\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$ et $z = r\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right)$. Donc

$$w^n = z \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\theta = \alpha + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = r^{\frac{1}{n}} \\ \theta = \frac{\alpha + 2\pi k}{n} \end{cases} \quad k = 0, 1, ...n-1$$

Exemple 1.5

$$z^4 = -1 \Leftrightarrow z_k = \left(1e^{i(\pi+2\pi k)}\right)^{\frac{1}{4}}$$

les 4 racines sont

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}, z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}, z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}}, z_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

1.1.4 Topologie dans le plan complexe

- On appelle disque ouvert de centre z_0 et de rayon $r > 0$, l'ensemble

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

- On définit le disque fermé de centre z_0 et de rayon r

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}.$$

- On définit le cercle de centre z_0 et de rayon r

$$C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

- On appelle voisinage d'un point z_0 un disque ouvert quelconque de centre z_0.
- Un sous ensemble U est un ouvert si chaque $z \in U$ possède un voisinage entièrement inclus dans U.
- Le complémentaire par rapport à $\mathbb{C}$ d'un sous ensemble ouvert est dit fermé.

Définition 1.6 *Un sous ensemble U de $\mathbb{C}$ est connexe (par arcs) si deux points quelconques de U peuvent être rejoints par une arc inclu dans U.*
U est connexe $\Leftrightarrow$ il ne peut pas s'ecrire comme réunion disjointe de deux ouverts (fermés) non vides.

Définition 1.7 *Un domaine dans le plan complexe est un ensemble connexe ouvert.*

1.2 Fonctions complexes

Si à chaque point z d'un ensemble de nombres complexes on fait correspondre une ou plusieurs valeurs w, nous disons que w est fonction de z. Pour bien préciser la fonction nous devons connaître le domaine de définition des z, le champ de la fonction c'est-à-dire l'ensemble des valeurs w, et enfin la règle de correspondance. Il n'est pas nécessaire que w soit un complexe, il peut être réel.

On écrit

$$w = f(z).$$

ou encore

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Exemple 1.8 $f(z) = z^2, f(z) = \exp(z)$........

1.2.1 Fonctions uniformes

Définition 1.9 *Soit f une fonction complexe de la variable complexe z. On dit que f est une fonction uniforme si chaque valeur de la variable z, la fonction $f(z)$ peut prendre une seule valeur $w = f(z)$, sinon la fonction f est dite multi-forme.*

Exemple 1.10 *1- $f(z) = z^2$ est une fonction uniforme, car pour $z = z_0$, $f(z_0)$ prend la valeur unique z_0^2*
2- $f(z) = \sqrt{z}$ est une fonction multi-forme, car à chaque valeur z_0 on a deux valeurs possibles de $f(z_0)$ sont $\left(\pm\sqrt{z_0}\right)$

1.2.2 Quelles que fonctions usuelles

(a). Fonctions polynômiales : Toute fonction sous forme

$$\begin{array}{rccl} P_n : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \to & P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n \end{array}$$

est une fonction polynômiale.
($P_n(z) = 0$ admet exactement n racines complexes dans $\mathbb{C}$).
(b). Fonctions rationnelles : Toute fonction sous forme $\dfrac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ définie une fonction rationnelle (avec $P_n(z)$ et $Q_n(z)$ sont 2 polynômes).
(c). Fonction exponentielle : II faut définir e^z de telle sorte que les propriétés que nous trouvons chez les réels soient préservées, alors on peut définir la fonction exponentielle comme

somme du rayon de convergence infini

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

(si $z = x + iy$, donc $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$) et on a les propriétés :

- $e^0 = 1$
- $e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$
- $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \times e^{z_2}$
- $|e^z| = e^x$
- La fonction exponentielle complexe n'est pas bijective.

(c). Fonction logarithme : À l'instar du cas réel nous concevons la fonction logarithmique comme l'inverse de l'exponentielle.

$f(z) = \log(z) = \log(x + iy)$ sous forme polaire $z = re^{i\theta}$, alors

$$f(z) = \log(z) = \log r + \log e^{i\theta}$$

et comme $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2\pi k)}$, alors $f(z) = \log(z)$ est une fonction multi-forme qui s'appelent déterminations,

$$f(z) = \log(z) = \ln r + i(\theta + 2\pi k)/\ k \in \mathbb{Z}$$

en particulier, lorsque $k = 0$, la quantité $\ln r + i\theta$ s'appelle la détermination principale de $\log(z)$ et on note par

$$Log(z) = \ln r + i\theta$$

avec θ est argument principale de z. $(-\pi < \theta \leq \pi)$.

Exemple 1.11 *1-* $\log(1 + i) = \ln \sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2\pi k)/\ k \in \mathbb{Z}$

2- $Log(1 + i) = \ln \sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4})$

3- $Log(1 - i)^2 \neq 2Log(1 - i)$

(c). Fonctions sinus et cosinus : Les fonctions sinus et cosinus sont définies par les séries entières

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{2n!}, \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

et on peut aussi écrire

$$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z) \Rightarrow \begin{cases} \cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \\ \sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \end{cases}$$

Attention : Les fonctions sinus et cosinus ne sont pas bornéés sur $\mathbb{C}$ (voir TD).

Dans la suite la notation **fonction** représente **fonction uniforme.**

1.2.3 Fonctions continues

L'infini en l'analyse complexe

$$z \to \infty \Leftrightarrow \left(\frac{1}{z} \to 0 \text{ ou } |z| \to +\infty\right)$$

et

$$\left.\begin{array}{c} z \to \infty \\ w \to a \end{array}\right\} \Rightarrow z + w \to \infty$$

et

$$\left.\begin{array}{c} z \to \infty \\ w \to a \end{array}\right\} \Rightarrow zw \to \infty \ \ (a \neq 0)$$

Limites

Définition 1.12 *On dit que le nombre complexe ℓ est une limite de f au point z_0 si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - \ell| < \varepsilon$$

On écrit $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \ell.$

Continuité

Définition 1.13 *f est une fonction complexe (uniforme) définie au voisinage d'un z_0, la fonction f est dite continue en z_0 si*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Prolongement par continuité

Si la fonction f admet une limite ℓ en z_0, mais f n'est pas définie en z_0, donc on peut associer à f une fonction ψ telle que

$$\psi(z) = \left\{\begin{array}{c} f(z), z \neq z_0 \\ \ell, z = z_0 \end{array}\right.$$

c-à-dire ψ soit une fonction continue et dans ce cas la fonction f est prolongeable par continuité en z_0 et son prolongement soit ψ.

1.3 Dérivation complexe

Soit f est une fonction complexe définie dans un domaine (ouvert connexe) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ contenant z_0

$$f \text{ est dérivable au point } z_0 \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lambda_0$$

où λ_0 : constante complexe finie qui l'on note $f'(z_0)$.

Exemple 1.14 *1- $f(z) = z^2$ au point $z_0 \in \mathbb{C}$*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = 2z_0$$

2- $f(z) = x^2 + y^2$ au point $z_0 = 0$

$$f'(0) = \lim_{z \to z_0} \frac{x^2 + y^2 - 0}{x + iy} = \lim_{\rho \to 0} \rho(\cos\theta - i \sin\theta) = 0$$

1.3.1 Fonctions Holomorphes

Définition 1.15 *Si la dérivée de f existe en tout point z d'un domaine D, alors f est dite holomorphe dans D. Une fonction f est dite holomorphe en un point z_0 si elle est dérivable dans un disque ouvert centré en z_0.*

Règle de dérivation

Les proprietés de dérivation restes valables comme dans $\mathbb{R}$ (somme, multiplication par un scalaire, produit, fraction, composition......

1.4 Conditions de Cauchy-Riemann

1/ **En coordonnés cartésiennes :**

Théorème 1.16 *Si $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ est holomorphe dans un domaine $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, alors les quatres dérivées partielles $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}$ existent et satisfont les conditions de Cauchy-Riemann en tous points de Ω, et on a :*

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Démonstration. Si on pose $z = x + iy$ et $z_0 = x_0 + iy_0$, alors $z - z_0 = x - x_0 + i(y - y_0)$ $f(z) = f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ et $f(z_0) = f(x_0 + iy_0) = P(x_0, y_0) + iQ(x_0, y_0)$ puiusque $f'(z_0)$ existe au point $z_0 = x_0 + iy_0$, donc le rapport $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \to f'(z_0)$ quel que soit la manière pour $z \to z_0$.

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{(P(x, y) - P(x_0, y_0)) + i(Q(x, y) - Q(x_0, y_0))}{(x - x_0) + i\,(y - y_0)} \end{aligned}$$

1- Suivant l'axe des x, c'est à dire $y = y_0$ et on aura

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{(P(x, y_0) - P(x_0, y_0)) + i(Q(x, y_0) - Q(x_0, y_0))}{(x - x_0)} \\ &= \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

2- Suivant l'axe des y, c'est à dire $x = x_0$ on trouve

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{(P(x_0, y) - P(x_0, y_0)) + i(Q(x_0, y) - Q(x_0, y_0))}{i\,(y - y_0)} \\ &= \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

En comparant les 2 résultats, on obtient

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0), \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0).$$

2/ **En coordonnés polaires :** Soit $f(re^{i\theta}) = U(r, \theta) + iV(r, \theta)$. Les conditions de Cauchy-Riemann en coordonnés polaires données par

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}.$$

Et en ce cas

$$f'(re^{i\theta}) = e^{-i\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(U(r, \theta) + iV(r, \theta)\right).$$

■

Remarque 1.17 *1- On obtient la dérivée de f en prenant simplement*

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \\ &= \frac{\partial Q}{\partial y} - i\frac{\partial P}{\partial y} = -i\frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

2- Les conditions de Cauchy-Riemann sont nécéssaires pour la dérivabilité mais pas suffisantes il faut de plus que les dérivées partielles des parties réelles et imaginaires soient continues dans le domaine Ω. Comme on peut le voir avec l'exercice suivant :

Exercice 1.18

$$f(z)=\begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}+i\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & si\ z\neq 0 \\ 0, & si\ z=0 \end{cases}$$

$*\ \frac{\partial P}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{P(x,0)-P(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3/x^2}{x}=1,\ *\ \frac{\partial P}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{P(0,y)-P(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{-y^3/y^2}{y}=-1$

$*\ \frac{\partial Q}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{Q(x,0)-Q(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3/x^2}{x}=1,\ *\ \frac{\partial Q}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{Q(0,y)-Q(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y^3/y^2}{y}=1.$

Alors f satisfait au conditions de Cauchy-Riemann en $z=0$ mais

$$f'(0)=\lim_{z=x+iy\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{(x^3-y^3)+i(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)(x+iy)}$$

Suivant l'axe des x, on trouve

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+ix^3}{x^3}=1+i$$

Suivant l'axe des $y=x$, on trouve

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{2ix^3}{2x^2(x+ix)}=\frac{1}{2}(1+i).$$

Donc $f'(0)$ n'existe pas car la limite n'est pas unique.

Proposition 1.19 *Si f est holomorphe alors $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$.*

Démonstration. $\left.\begin{array}{l} z=x+iy \\ \overline{z}=x-iy \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{1}{2}(z+\overline{z}) \\ y=\frac{1}{2i}(z-\overline{z}) \end{cases}$ alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y} \\ &= \frac{1}{2}(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y})+\frac{i}{2}(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x})=0\end{aligned}$$

■

1.4.1 Fonctions Harmoniques

Définition 1.20 *Soit f une fonction définie sur un domaine $D\subseteq\mathbb{R}^2$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de classe $\mathcal{C}^2$.*

f est dite harmonique si les dérivées partielles de deuxième ordre vérifient la relation

$$\triangle f(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0$$

L'opérateur $\triangle f$ est appelé opérateur de Laplace.

Exemple 1.21 $f(x,y) = x^2 - y^2$ *est une fonction harmonique* $\mathbb{R}^2$.

Proposition 1.22 *Soit* $f = P + iQ$ *une fonction holomorphe avec* $P, Q \in \mathcal{C}^2$, *alors que ses parties réelle et imaginaire sont harmoniques.*

Démonstration. Soit $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ une fonction holomorphe, alors P et Q vérifient les conditions de Cauchy-Riemann donc

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial Q}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial Q}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial y}(-\frac{\partial P}{\partial y}) = -\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$$

ce qui montre que $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow P$ est harmonique.
De même pour Q. ■

Exemple 1.23 *Trouver une fonction* $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de sorte que* $P + iQ$ *est une fonction holomorphe telle que* $P(x,y) = x^2 - y^2$.
$P+iQ$ *est une fonction holomorphe, alors* P *et* Q *vérifient les conditions de Cauchy-Riemann donc*

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial y} \Rightarrow Q(x,y) = 2xy + c(x).$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -2y = -2y - c'(x) \Rightarrow c(x) = \lambda / \ \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Finalement, on trouve $Q(x,y) = 2xy + \lambda / \ \ \lambda \in \mathbb{R}$ *et la fonction demendée* $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y) = x^2 - y^2 + i(2xy + \lambda)$ *tel que* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pour exprimer $f(z)$ à l'aide de la variable z, on prend $y = 0$ et on remplace x par z, on obtient

$$f(z) = z^2 + \lambda i \text{ tel que } \lambda \in \mathbb{R}.$$

2/ **Laplacien en coordonnés polaires :** En coordonnées polaires l'équation de Laplace deviendera

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} = 0$$

1.5 Fonctions analytiques

1.5.1 Fonctions définies par une série

Théorème 1.24 *Soit* f *une fonction définie par* $f(z) = \sum\limits_{n=0} a_n z^n$ ($|z| < R$ *tel que* R *est le rayon de covergence) alors* f *est holomorphe dans le disque* $D(0,R)$ *et* $f'(z) = \sum\limits_{n=1} n a_n z^{n-1}$, $|z| < R$.

Démonstration. (Voir Ana 3). ■

<u>Résultat :</u> a_n donnés par $a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$. (Formule de Taylor pour les coefficients d'une série entière) et dans ce cas

$$f(z) = \sum_{n=0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Définition 1.25 *Soit $f : U \to \mathbb{C}$ et $z_0 \in U$. f est dite analytique en z_0, s'il existe un réel $R > 0$ et une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence supérieur ou égal à R tel que*
1- le disque $D(z_0, R)$ est inclu dans U
2- $\forall z \in D(z_0, R) : f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$
f est dite analytique sur U, s'elle est analytique en tout point de U.

Exemple 1.26 *1- $f(z) = e^z$ est analytique sur $\mathbb{C}$, car*

$$\forall z_0 \in \mathbb{C} : f(z) = e^z = e^{z_0} \times e^{z - z_0} = e^{z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{n!}$$

2- $f(z) = \frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$, car

$$\forall z_0 \in \mathbb{C}^* : f(z) = \frac{1}{z - z_0 + z_0} = \frac{1}{z_0} \frac{1}{(1 + \frac{z - z_0}{z_0})} = \frac{1}{z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z_0^n} (z - z_0)^n \text{ avec } |z - z_0| < |z_0|.$$

Remarque 1.27 *Les opérations élémentaires restes valables comme les fonctions holomorphes.*

Corollaire 1.28 *Si f est analytique sur U, alors f' est aussi analytique sur U.*

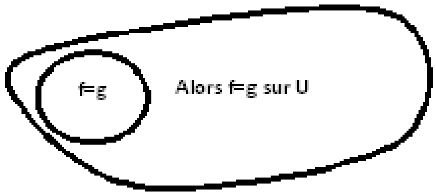
1.5.2 Principe du prolengement analytique

Lemme 1.29 *Soit U un domaine (ouvert connexe), $z_0 \in U$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction analytique en z_0, les 3 assertions suivantes sont equivalentes*
1- $\forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(z_0) = 0$
2- $\exists R > 0 : \forall z \in D(z_0, R) : f(z) = 0$
3- $f \equiv 0$, sur U.

Théorème 1.30 *Soit U un domaine (ouvert connexe), si f et g sont analytiques sur U et s'existe un $z_0 \in U$ et $R > 0$ telle que $\forall z \in D(z_0, R) : f(z) = g(z)$, alors*

$$f \equiv g, \text{ sur } U.$$

c-à-dire



Exemple 1.31 *1- Montrer que la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}$ *définit une fonction analytique* f *sur le disque ouvert* $D(0,1)$

2- Montrer que f *coïncide sur* $D(0,1)$ *avec la détermination principale de* $g(z) = Log(1+z)$.

Correction :

1- $\ell = \lim_n \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right|^{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow R = 1$, le rayon de cv de la série est 1, aussi cette série est convergence dans $D(0,1)$ et elle définit une fonction analytique sur $D(0,1)$.

2- un calcul (simple) des dérivée d'ordre n de f et g on trouve $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) = (n-1)!(-1)^{n-1}$. Ce qui assure d'après le principe du prolongement analytique que f et g coincident sur $D(0,1)$.

1.5.3 Principe des zéros isolés

Définition 1.32 *Soit* $A \subseteq \mathbb{C}$. *Le point* a *est dit isolé dans* A, *s'il existe* $R > 0$ *tel que*

$$D(a,R) \cap A = \{a\}.$$

Exemple 1.33 *Les points de* $\mathbb{N}$ *sont isolés dans* $\mathbb{N}$. *car*

$$D(n, \frac{1}{2}) \cap \mathbb{N} = \{n\}.$$

Théorème 1.34 *Soit* Ω *un ouvert connexe (domaine) et* f *une fonction analytique sur* Ω *qui n'est pas identiquement nulle, alors les zéros de* f *dans* Ω *sont isolés.*

1.5.4 Ordre d'un zéro d'une fonction analytique

Théorème 1.35 *Soit* Ω *un ouvert connexe (domaine) et* f *une fonction analytique sur* Ω *et* $z_0 \in \Omega$. *Les deux assertions sont équivalentes*

1- $\exists k \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $f(z_0) = f'(z_0) = ... = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ *et* $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

2- il existe une fonction analytique g *sur* Ω *telle que*

$$g(z_0) \neq 0 \text{ et } \forall z \in \Omega : f(z) = (z-z_0)^k g(z).$$

Définition 1.36 *On dit que $z_0 \in \Omega$ est un zéro d'ordre k de la fonction f si l'une des assertions équivalentes du lemme précédent est vraie.*

Exemple 1.37 *1- $f(z) = e^{z^2} - 1$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2 \neq 0$, alors $z = 0$ est un zéro d'orde 2 (double) de f*
2- $f(z) = \sin z^3 - z^3$, au voisinage de $z = 0$: $f(z) = -\frac{1}{3!}z^9 + \frac{1}{5!}z^{15} + ...$ donc si on comparer avec le developpement de Taylor, on trouve $f(0) = f'(0) = ... = f^{(8)}(0) = 0$ et $\frac{f^{(9)}(0)}{9!} = -\frac{1}{3!} \neq 0$, alors $z = 0$ est un zéro d'ordre 9.

Chapitre 2

Intégration et formules de Cauchy

2.1 Chemins de $\mathbb{C}$

Définition 2.1 *Un chemin est une application continue γ d'un intervalle $[a;b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.*
$\gamma(a)$: *est origine du chemin* γ
$\gamma(b)$: *est extrémité du chemin* γ
un chemin est dit fermé si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

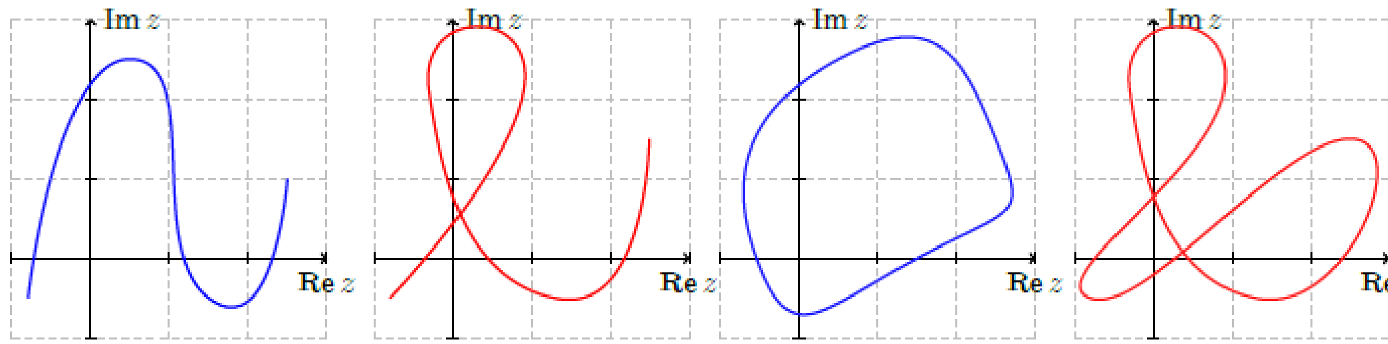
Exemple 2.2 *1- **Les ségments** : Pour relier un point z_1 à un point z_2 on définit*

$$\gamma : t \to tz_2 + (1-t)z_1 \text{ avec } t \in [0;1]$$

*1- **Les arcs de cercles** : Pour relier un point $Re^{i\theta_1}$ au point $Re^{i\theta_2}$ on définit*

$$\gamma : t \to Re^{i(t\theta_2 + (1-t)\theta_1)} \text{ avec } t \in [0;1]$$

Définition 2.3 *1. Si les points initial et final d'un chemin coïncident, il est appelé chemin fermé ou lacet.*
2. On dit qu'un chemin est simple si ne se recoupe pas lui-même i.e. il n'a pas de points doubles.
3. Toute courbe fermée et simple, est appelée courbe de Jordan.



Chemin non fermé et simple | Chemin non fermé et non simple | Chemin fermé et simple | Chemin fermé et non simple

2.2 Orientation d'un chemin fermé

Le sens positif de γ est tel qu'un observateur se déplaçant sur γ dans ce sens voi toujour la région R à sa gauche.

2.3 Intégration le long d'un chemin

Soit γ un chemin d'origine a et d' extrémité b et soit f une fonction définie en tout point de ce chemin.

Soient $\{z_0, z_1, .., z_n\}$ une subdivision de γ avec $z_0 = a$ et $z_n = b$ et soit de plus $\xi_1, \xi_2, .., \xi_n$ tels que $\forall i \in \overline{1,n} : \xi_i \in]z_{i-1}; z_i[$. On définie la suite

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) |z_k - z_{k-1}| .$$

Définition 2.4 *Si quand $n \to +\infty$ de manière a ce que $|z_k - z_{k-1}| \to 0 : \forall k \in \overline{1,n}$. La somme I_n tend vers une limite indépendente du choix des z_k et des ξ_k . Alors cette limite est appelée intégrale de f le long de γ est notée*

$$\int_\gamma f(z)dz$$

Remarque 2.5 *Si γ est fermé*

$$\int_\gamma f(z)dz = \oint_\gamma f(z)dz$$

Théorème 2.6 *Soit γ un chemin. $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ avec $c \leq t \leq d$ une paramétrisation de la courbe γ donc $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$, alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_c^d f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Exemple 2.7 *1- $\gamma = C((0,0),1)$ est un chemin fermé*

$$\gamma : t \to e^{it} \text{ avec } t \in [0; 2\pi].$$

Calculer $\int_\gamma f(z)dz$ où $f(z) = \frac{1}{z}$.

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} f(e^{it})\left(e^{it}\right)' dt = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = 2\pi i.$$

Remarque 2.8 *Si $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$, alors*

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)dz &= \int_\gamma (P(x,y) + iQ(x,y))(dx + idy) \\ &= \int_\gamma (P(x,y)dx - Q(x,y)dy) + i\int_\gamma (Q(x,y)dx + P(x,y)dy). \end{aligned}$$

Donc l'intégrale complexe est une combinaison de deux intégrales curvilignes réelles.

Rappel : (**Formule de Green-stokes**) Formes differentielles en détail **voir Ana 4**

Si P et Q sont deux fonctions de U de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, à dérivées partielles continues sur U et si γ est un chemin fermé (orienté dans le sens positif) de U d'intérieur R entièrement continu dans U, on a

$$\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

Exercice 2.9 *Soit f une fonction analytique ($f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$) sur une courbe fermée γ limitant un domaine D. En utilisant la formule de Green calculer $\int_\gamma f(z)dz$.*

Proprietés :

1- $\int_\gamma (\alpha f(z) + \beta g(z))dz = \alpha \int_\gamma f(z)dz + \beta \int_\gamma g(z)dz$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

2- Si $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ (et $\gamma_1 \cap \gamma_2$ est un ensemble fini). Alors

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

2- Si AB une courbe quelconque et E un point de AB, alors

$$\int_{AB} f(z)dz = \int_{AE} f(z)dz + \int_{EB} f(z)dz$$

2- Si $\overline{\gamma}$ dénote la courbe γ parcouru en sens opposé, alors

$$\int_{\overline{\gamma}} f(z)dz = -\int_{\gamma} f(z)dz.$$

2.3.1 Longueur d'une courbe

Soit C une courbe paramétrée par un chemin

$$\begin{array}{rccc} z: & [a,b] & \to & \mathbb{C} \\ & t & \to & z(t) \end{array}$$

tel que $z\prime(t) = x\prime(t) + iy\prime(t)$ existe et continue.

La longueur L_C de la courbe C est définie comme étant

$$L_C = \int_a^b |z\prime(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{(x\prime(t))^2 + (y\prime(t))^2} dt$$

2.4 Formules de Cauchy

Théorème 2.10 *Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et C un chemin fermé contenu ainsi que son intérieur dans D, alors*

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

Démonstration. (L'exercice précédent) ∎

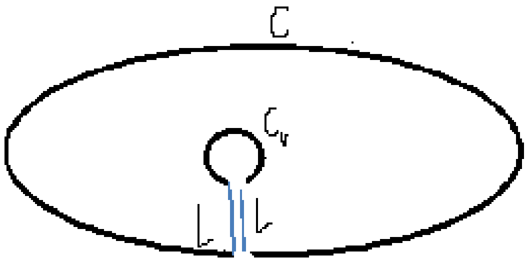
Théorème 2.11 (Cauchy) *Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et C un chemin fermé contenu ainsi que son intérieur dans D, alors pour tout z dans l'intérieur de C*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

le chemin C étant parcouru dans le sens positif.

Démonstration. Posons $g(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\xi)}{\xi - z}$, c'est une fonction holomorphe sur $D - \{z\}$

$$\gamma = C \cup L \cup C_r \cup L$$



Le premier théorème de Cauchy implique

$$0 = \int_C g(\xi)d\xi + \int_L g(\xi)d\xi - \int_{C_r} g(\xi)d\xi - \int_L g(\xi)d\xi$$

donc

$$\int_C g(\xi)d\xi = \int_{C_r} g(\xi)d\xi \text{ où } C_r = \{\xi/ \ \xi - z = re^{i\theta}, \ \ -\pi < \theta \leq \pi\}$$

ce qui donne

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(z + re^{i\theta})rie^{i\theta}}{re^{i\theta}}d\theta$$

le premier terme est indépendent de r et le deuxième est fct de r, alors

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \frac{1}{2\pi}\lim_{r\to 0}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(z + re^{i\theta})rie^{i\theta}}{re^{i\theta}}d\theta = f(z).$$

■

Théorème 2.12 (Cauchy) *Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, alors sa dérinée $f' : D \to \mathbb{C}$ est holomorphe, de plus si C un chemin fermé contenu ainsi que son intérieur dans D, alors pour tout z dans l'intérieur de C*

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}d\xi$$

le chemin C étant parcouru dans le sens positif.

Démonstration. Soient $z \in D, r > 0$ tel que $D(z, 3r) \subset D$ et $|h| < r$

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{1}{2\pi hi}\left[\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z - h}d\xi - \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi\right] \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z - h)(\xi - z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{2r}} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z - h)(\xi - z)} \end{aligned}$$

$$f'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{2r}} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z - h)(\xi - z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{2r}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}d\xi.$$

■

Remarque 2.13 *Par réccurence sur n, on trouve*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{1+n}} dz$$

Démonstration. (Exercice) ■

Exemple 2.14 *En utilisant la formule integrale de cauchy, calculer les intégrales suivantes :*
1- $\int_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z\exp(\frac{1}{z+2})} dz = \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z-0} dz$ *où* $f(z) = \frac{\cos(z)}{\exp(\frac{1}{z+2})}$
on a f est une fonction holomrphe dans l'intérieur de $|z| = 1$, et $|z| = 1$ est une courbe fermée orientée dans le sens (+) et plus $z = 0$ est à l'intérieur de $|z| = 1$, donc d'après le théorème 42, on a

$$\int_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z\exp(\frac{1}{z+2})} dz = \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z-0} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i e^{-\frac{1}{2}}$$

2- $\int_{|z|=5} \frac{dz}{z^2+16} = -\frac{1}{8i} \int_{|z|=5} \frac{dz}{z+4i} + \frac{1}{8i} \int_{|z|=5} \frac{dz}{z-4i}$
$\int_{|z|=5} \frac{dz}{z+4i}$ *on a $f(z) = 1$ est une fonction holomrphe dans l'intérieur de $|z| = 5$, et $|z| = 5$ est une courbe fermée orientée dans le sens (+) et plus $z = -4i$ est à l'intérieur de $|z| = 5$, donc d'après le théorème 42, on a*

$$\int_{|z|=5} \frac{dz}{z+4i} = 2\pi i f(-4i) = 2\pi i$$

m̂ aidé conçernant le deuxième terme, on trouve

$$\int_{|z|=5} \frac{dz}{z-4i} = 2\pi i f(4i) = 2\pi i$$

Conclusion

$$\int_{|z|=5} \frac{dz}{z^2+16} = 0.$$

3- $\int_{|z-1|=1} \frac{\sin(\frac{\pi z}{2})}{(z-1)^2(z-3)} dz = \int_{|z-1|=1} \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz$ *où* $f(z) = \frac{\sin(\frac{\pi z}{2})}{(z-3)}$
on a f est une fonction holomrphe dans l'intérieur de $|z-1| = 1$, et $|z-1| = 1$ est une courbe fermée orientée dans le sens (+) et plus $z = 1$ est à l'intérieur de $|z-1| = 1$, donc d'après le théorème 43, on a

$$\int_{|z-1|=1} \frac{\sin(\frac{\pi z}{2})}{(z-1)^2(z-3)} dz = \int_{|z-1|=1} \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz = 2\pi i f'(1) = ...$$

4- $\int_{|z-2|=1} \frac{e^{z^2}}{z^2-6} dz$

on a $z^2-6=0 \Leftrightarrow z=\pm\sqrt{6}$ *(* $\sqrt{6}$ *à l'intérieur de* $|z-2|=1$ *mais* $-\sqrt{6}$ *à l'extérieur de* $|z-2|=1$*), donc*

$$\int_{|z-2|=1} \frac{e^{z^2}}{z^2-6}dz = \int_{|z-2|=1} \frac{e^{z^2}/(z+\sqrt{6})}{z-\sqrt{6}}dz = 2\pi i \left(\frac{e^{z^2}}{(z+\sqrt{6})}\right)_{z=\sqrt{6}} = \frac{\pi i e^6}{\sqrt{6}}$$

Théorème 2.15 *Une fonction* f *est holomorphe dans un domaine simplement connexe* D *admet une primitive holomorphe* F *:*

$$F(z) = F(z_0) + \int_{z_0}^{z} f(z)dz$$

avec $z_0 \in D$ *et* $F(z_0)$ *sont arbitraires.*

Théorème 2.16 *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{C}$ *et* f *une fonction continue sur* U*, alors*

$$f \text{ poussède une primitive dans } U \Leftrightarrow \int_C f(z)dz = 0, \text{ pour tout } C \text{ fermé.}$$

2.5 Théorème de Liouville

Théorème 2.17 *Soit* f *une fonction analytique sur* $\mathbb{C}$, *si f est bornée (c-à-dire* $\exists M \in \mathbb{R}^*$ *:* $|f(z)| \leq M$*) alors* f *est constante .*

Démonstration. f une fonction analytique, $z_0 \in \mathbb{C}$ et soit C un cercle de centre z_0 et de rayon R, alors $f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz \Rightarrow |f'(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz\right| \leq \frac{M}{2\pi R^2}\int_C |dz| = \frac{2\pi RM}{2\pi R^2} = \frac{M}{R}$.
si en faisant tendre $R \to \infty$, alors on trouve

$$|f'(z_0)| = 0 \Rightarrow f \text{ est constante.}$$

■

Théorème 2.18 *Soient* $D \subseteq \mathbb{C}$ *un domaine contenant le disque* $\overline{D}(z_0, r)$*, et* $f; D \to \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe, alors*

$$f(z) = \sum_{n=0} a_n(z-z_0)^n, \text{ avec } |z-z_0| < r$$

où $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,2r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz.$

Conclusion 2.19 *Sur un ouvert connexe : f est holomorphe* $\Leftrightarrow$ *f est analytique.*

2.6 Principe de maximun

Proposition 2.20 *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur U. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) Pour tout disque $D(a,r)$ contenu dans U, on a :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})dt$$

(ii) Pour tout disque $D(a,r)$ contenu dans U, on a :

$$f(a) = \frac{1}{\pi r^2}\int\int_{D\prime(a,r)} f(x+iy)dxdy.$$

Si elles sont vérifiées, on dit que f possède la propriété de moyenne dans U.

Proposition 2.21 *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f est une fonction holomorphe sur U. Alors f possède la propriété de moyenne dans U.*

Démonstration. Si $D(a,r) \subset U$, il existe $R > r$ tel que $D(a,R) \subset U$. Si C est le cercle $C(a,r)$ parcouru dans le sens direct, en appliquant la formule de Cauchy à $D(a,R)$, il vient :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})dt.$$

D'où l'assertion. ■

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction sur U. on dit que f a un maximum relatif en $a \in U$ s'il existe un voisinage V de a dans U tel que :$|f(z)| \leq |f(a)|$ pour tout $z \in V$.
On dit que f vérifie le principe du maximum dans U si elle est constante au voisinage de tout point $a \in U$ en lequel elle a un maximum relatif.
Supposons que f vérifie le principe du maximum dans U, et que U soit connexe. Il est immédiat que l'ensemble des points de U en lesquels f a un maximum relatif est ouvert et fermé dans U. Par suite, si f a un maximum relatif en un point de U, alors f est constante.

Théorème 2.22 *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur U vérifiant la propriété de moyenne dans U. Alors f vérifie le principe du maximum dans U.*

2.7 Théorème de Rouché

Théorème 2.23 (Rouché) *Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un domaine Ω, le disque fermé de centre a et de rayon r étant inclus dans Ω, et $|g(z)| < |f(z)|$ sur le cercle de centre a et de rayon r, alors f et $f+g$ ont le meme nombre de zéros sur le disque ouvert de centre a et de rayon r (en comptant leurs multiplicités).*

Exemple 2.24 ***1-*** *Calculer le nombre des zéros de $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$ dans $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Posons $f(z) = -4z^5$ et $g(z) = z^8 + z^2 - 1$ si z est appartient au cercle $C(0,1)$, c-à-dire $|z| = 1$, alors*

$$|f(z)| = 4 \text{ et } |g(z)| = \left|z^8 + z^2 - 1\right| \leq \left|z^8\right| + \left|z^2\right| + |-1| = 3$$

donc $|g(z)| < |f(z)|$ sur $C(0,1)$
conlusion : $f(z) = -4z^5$ et $f(z) + g(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ ont le meme nombre des zéros sur $D(0,1)$, et comme $z_0 = 0$ est une racine de $f(z) = -4z^5$ d'ordre 5, alors $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ admet 5 racines dans $D(0,1)$.
2- *Calculer le nombre des zéros de $z^4 - 5z + 1 = 0$ dans $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{4}\}$.*
Posons $f(z) = -5z$ et $g(z) = z^4 + 1$ si z est appartient au cercle $C(0, \frac{1}{4})$, c-à-dire $|z| = \frac{1}{4}$, alors

$$|f(z)| = \frac{5}{4} \text{ et } |g(z)| = \left|z^4 + 1\right| \leq \left|z^4\right| + |1| = \frac{1}{4^4} + 1$$

donc $|g(z)| < |f(z)|$ sur $C(0, \frac{1}{4})$
conlusion : $f(z) = -5z$ et $f(z) + g(z) = z^4 - 5z + 1$ ont le meme nombre des zéros sur $D(0, \frac{1}{4})$, et comme $z_0 = 0$ est une racine simple de $f(z) = -5z$, alors $z^4 - 5z + 1$ admet une racine dans $D(0, \frac{1}{4})$.
3- *Calculer le nombre des zéros de $3z^n - e^z = 0$ dans $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.*
Posons $f(z) = 3z^n$ et $g(z) = -e^z$ si z est appartient au cercle $C(0,1)$, c-à-dire $|z| = 1$, alors

$$|f(z)| = 3 \text{ et } |g(z)| = e^{\mathrm{Re}(z)} \leq e < 3 = |f(z)|$$

donc $|g(z)| < |f(z)|$ sur $C(0,1)$
conlusion : $f(z) = 3z^n$ et $f(z) + g(z) = 3z^n - e^z$ ont le meme nombre des zéros sur $D(0,1)$, et comme $z_0 = 0$ est une racine de $f(z) = 3z^n$ d'ordre n, alors $3z^n - e^z = 0$ admet n racines dans $D(0,1)$.

2.8 Exercices

Exercice 1 : 1°/ Calculer $\sin(i)$, $\cos(i)$, $\log(i)$, $\log(-1)$, $Log(i)$, $Log(-1)$

2°/ Calculer $Log(i-1)^2$, $2Log(i-1)$? conclure ?

3°/ Résoudre les équations :

a/ $\sin(z) = 2$, b/ $exp(z) = -1$, c/ $exp(z) = i$, d/ $z^5 - 1 = i$.

Exercice 2 : On considère la fct f définie par :

$$f(z) = f(r(\cos\theta + i\sin\theta)) = \begin{cases} \sin\theta \quad \text{si } r > 0 \\ 0 \quad \text{si } r = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est continue partout sauf au point 0.

Exercice 3 : Vérifier les conditions de Cauchy-Riemann pour les fcts :

1/ $f(z) = z^3$, 2/ $f(z) = \sin(z)$, 3/ $f(z) = \dfrac{1}{z}$, 4/ $f(x+iy) = x^2 + y^2$

5/ $f(x+iy) = x^2 + 2ixy$ 6/ $f(x+iy) = x^2 + y^2 - 2ixy$ 7/ $f(x+iy) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$

Exercice 4 : Trouver l'ouvert U (s'il existe) de sorte que f satisfait aux conditions de Cauchy-Riemann. sur U

1/ $f(z) = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$, 2/ $f(x+iy) = \dfrac{x+iy}{(x^2+y^2)^2}$ 3/ $f(x+iy) = x^2 + y^2 + 2ixy$ 4/ $f(x+iy) = \dfrac{x^3 + xy^2 + x + i(y^3 + x^2y - y)}{x^2+y^2}$

Exercice 5 : Soit f une fonction définie par :

$$f(z) = f(x+iy) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} + i\,\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \quad \text{si } z \neq 0 \\ 0, \ \text{si} \ \ z = 0 \end{cases}$$

1- Montrer que f satisfait aux conditions de Cauchy-Riemann en $z = 0$.

2- f est-elle dérivable en 0 ?conclure ?

Exercice 6 : Montrer que les fonctions $f(z) = zRe(z)$ et $g(z) = zIm(z)$ ont une dérivée à $z = 0$ mais ne sont pas analytiques à ce point.

Exercice 7 : Soit $P(x;y) = x^3 - 3\lambda xy^2 + 2x + 1$. Donnez une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que P soit la partie réelle d'une fonction f holomorphe sur $\mathbb{C}$. Déterminez alors f.

Exercice 8 : Montrer que la fonction définie par

$$f(z) = f(x+iy) = \begin{cases} \frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4} + i\,\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \quad \text{si } z \neq 0 \\ 0, \ \text{si} \ \ z = 0 \end{cases}$$

n'a pas de dérivée à $z = 0$ mais qu'elle est continue à ce point.

Exercice 9 : Déterminer les relations qui doivent exister entre les constantes a, b, c, d, e pour que la fonction $u(x, y) = ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4$ soit harmonique et trouver une fonction analytique $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ correspondante.

Exercice 10 : Le théorème des accroisements finis est -il valable pour les fcts holomorphes ?

Exercice 11 : Pour chacune des fonctions $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes, Trouver (si elle existe) une fonction $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tq : $P + iQ$ soit holomorphe

1/ $P(x, y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$ et $f(0) = i$ 2/ $P(x, y) = x^2 + y^2$ et $f(0) = 0$

3/ $P(x, y) = x^2 - y^2 + xy$ et $f(0) = 0$ 4/ $P(x, y) = 2e^x \sin(y)$ et $f(0) = 2i$

5/ $P(x, y) = arctg(\frac{y}{x})$ 6/ $P(r, \theta) = r^3 \cos(3\theta)$

Exercice 12 : Trouver l'erreur dans les 2 propositions

a) $-1 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \times (-1)} \Rightarrow -1 = 1$

b) $e^{2\pi i} = 1 \Rightarrow e = (e^{2\pi i})^{\frac{1}{2\pi i}} = (1)^{\frac{1}{2\pi i}} = 1 \Rightarrow e = 1$

Exercice 13 : Soit U le disque unité ouvert.

Existe-t-il une fonction holomorphe dans U vérifant : $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{\ln(n)}$

Exercice 14 : Déterminer l'ordre de tous les zéros des fcts suivantes

1- $f(z) = 1 - \cos(z)$, 2- $f(z) = z\sin(z)$, 3 - $f(z) = (1 - e^z)\sin z$, 4- $f(z) = z^3 \sin(z^3)$

Exercice 15 : Calculer les intégrales suivantes

1- $\int_C ydz$, où C la composition des segments de 0 à i et de i à $i + 2$

2- $\int_C \sin(2z)dz$, où C est le segments de $i + 1$ à $-i$

3- $\int\limits_{\gamma} (y - x - 3x^2 i)dz$ où γ la composition des segments de 0 à i et de i à $i + 1$

Exercice 16 :En utilisant la formule integrale de cauchy, calculer les intégrales suivantes :

1- $\int_{|z|=2} \frac{\cos(z)}{z^2+4z+3}dz$, 2- $\int_{|z-1|=1} \frac{\sin(\pi z)}{(z^2-1)^2}dz$, 3- $\int_{|z|=1} \frac{\tan(z)}{z\exp(\frac{1}{z+2})}dz$, 4- $\int_{|z|=5} \frac{dz}{z^2+16}$, 5- $\int_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z^3}dz$, 6- $\int_{|z-1|=1} \frac{\sin(\frac{\pi z}{2})}{(z-1)^2(z-3)}dz$,7- $\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^2-3z+2}$, 8- $\int_{C_k} \frac{e^{z^2}}{z^2-6}dz$

Où C_k les courbes suivantes : $C_1 : |z - 2| = 1, C_2 : |z - 2| = 3, C_3 : |z - 2| = 5$

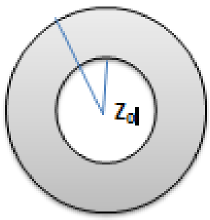
Exercice 17 : Trouver le nombre de racines de l'équation $z^{11} - 5z^3 + 3z + 60 = 0$ dans le disque $1 < |z| < 3$.

Chapitre 3

Résidus et ses applications au calcul d'intégrales

Définition 3.1 *On définit la couronne ouverte de centre z_0 et de rayon R_1 et R_2 par*

$$C(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}.$$



Remarque 3.2 *Si $R_1 = 0$, on note $C(z_0, 0, R_2) = \dot{D}(z_0, R_2)$ qui on appelle disque pointé.*

3.1 Points singuliers et points ordinaires

Définition 3.3 *Un point z_0 est un point singulier de $f \Leftrightarrow f$ n'est pas analytique à z_0, bien que dans chaque voisinage de z_0 il y ait au moins un point où la fonction est analytique.*

Définition 3.4 *S'il existe un disque ouvert pointé (ie. privé en z_0) de centre z_0 et de rayon r dans lequel f est analytique, alors on dit que z_0 est un point singulier isolé.*

Définition 3.5 *Un point z_0 est un point ordinaire de $f \Leftrightarrow f$ est analytique en z_0, et analytique dans un voisinage de z_0.*

Exemple 3.6 *1-* $f(z) = \frac{1}{z-2}$, *le point* $z_0 = 2$ *est un point singulier isolé de* f *et les points de* $\mathbb{C} - \{2\}$ *sont ordinaires de* f.

2- $f(z) = \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$, *le point* $z_0 = 0$ *est un point singulier non isolé de* f

3- Le point $z_0 = 1$ *est un point singulier isolé de* $\sin(\frac{1}{z-1})$ *mais ordinaire de* e^z.

Dans **tout ce qui suit**, on suppose des **points singulies isolés.**

3.2 Séries de Laurent

Définition 3.7 *Une série de fonctions sous forme* $\sum_{-\infty}^{+\infty}\lambda_n(z - z_0)^n$ *porte le nom série de Laurent.*

Théorème 3.8 (Laurent) *Soient* $D \subseteq \mathbb{C}$ *un domaine contenant la couronne* $C(z_0, R_1, R_2)$ *et* $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe. Alors*

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{-\infty}^{+\infty}\lambda_n(z - z_0)^n, \;\; R_1 < |z - z_0| < R_2 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z - z_0)^n. \end{aligned}$$

où $\lambda_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{1+n}}d\xi$ *et* C_ρ *: le cercle de centre* z_0 *et de rayon* ρ*, avec* $R_1 < \rho < R_2$ *parcouru dans le sens positif.*

Exemple 3.9 *Soit* $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{z-2}$. *Le développement de Laurent de* f

1- dans le disque $|z| < 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= \sum_{n=0}^{+\infty}z^n, \;\; \textit{avec } |z| < 1 \\ \frac{1}{z-2} &= -\frac{1}{2}\times\frac{1}{1 - z/2} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{z}{2})^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad \textit{avec } \left|\frac{z}{2}\right| = \frac{|z|}{2} < \frac{1}{2} < 1, \end{aligned}$$

donc

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}z^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty}(1 - \frac{1}{2^{n+1}})z^n, \;\; \textit{avec } |z| < 1.$$

2- dans la couronne $1 < |z| < 2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= -\frac{1}{z}\times\frac{1}{1 - 1/z} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}}, \;\; \textit{car } \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} < 1 \\ \frac{1}{z-2} &= -\frac{1}{2}\times\frac{1}{1 - z/2} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{z}{2})^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad \textit{avec } \left|\frac{z}{2}\right| = \frac{|z|}{2} < 1, \end{aligned}$$

donc

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}, \ \textit{avec } 1 < |z| < 2.$$

3- dans la couronne $|z| > 2$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-z} &= -\frac{1}{z} \times \frac{1}{1-1/z} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^{n+1}}, \ \textit{car } \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} < \frac{1}{2} < 1 \\
\frac{1}{z-2} &= \frac{1}{z} \times \frac{1}{1-2/z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{2}{z})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}, \ \textit{avec } \left|\frac{2}{z}\right| < 1,
\end{aligned}$$

donc

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1+2^n)}{z^{n+1}}, \ \textit{avec } |z| > 2.$$

3.3 Classification des singularités

• Si tous b_n sont nuls, la fonction est analytique dans $D(z_0, r)$, on dit que z_0 est une singularité apparente.

• Si les b_n sont non tous nuls ; i.e s'il existe un b_m non nul tel que $b_n = 0$ pour tout $n > m$, alors z_0 est un pôle d'ordre m et

$$\forall z \in \dot{D}(z_0, r) : f(z) = \frac{b_m}{(z-z_0)^m} + \frac{b_{m-1}}{(z-z_0)^{m-1}} + ...$$

• Si $m = 1$; on dit qu'on a un pôle simple .

• S'il existe une infinité de b_m non nuls, la singularité est dite essentielle.

Exemple 3.10 *1-* $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, $z_0 = 0$ *est une singularité de* f

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}$$

les b_n *sont tous nuls, alors* $z_0 = 0$ *est une singularité apparente.*

2- $f(z) = \frac{1}{z-2}$, $z_0 = 2$ *est une singularité de* f, $z_0 = 0$ *est un pôle simple.*

3- $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$ *est une singularité de* f

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$$

donc il existe une infinité de b_m *non nuls, alors* $z_0 = 0$ *est une singularité essentielle.*

3.4 Résidu en un point singulier isolé

Définition 3.11 *Soit z_0 un point singulier isolé de f . Soit $\dot{D}(z_0, r)$ un disque pointé ne contenant pas des points singuliers de f*

$$\forall z \in \dot{D}(z_0, r) : f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

le cofficient b_1 est appelé résidu de f en z_0 et est noté $Res(f, z_0)$. On a donc

$$Res(f, z_0) = b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)dz,$$

où C est un contour orienté positivement inclu dans $\dot{D}(z_0, r)$ et on tourant de z_0.

3.5 Calcul pratique des résidus

1- Si z_0 est une singularité apparente de f, alors $Res(f, z_0) = 0$

Exemple 3.12

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + ...$$

$Res(f, 0) = b_1 = 0$ *(b_1 est le cofficient de $\frac{1}{z}$)*

2- Si z_0 est un pôle simple, on a $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = b_1$, d'ou

$$Res(f, z_0) = b_1 = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Exemple 3.13 $f(z) = \frac{\cos z}{z-1}$, *$z_0 = 1$ est une singularité de f*

$$\lim_{z \to 1} (z - 1) f(z) = \cos 1 = b_1$$

alors $z_0 = 1$ est un pôle simple et $Res(f, 1) = b_1 = \cos 1$.

3- Si z_0 est un pôle d'ordre m,

$$f(z) = \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \frac{b_{m-1}}{(z - z_0)^{m-1}} + ... + \frac{b_1}{z - z_0} + ...$$

on a $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = b_m$, et $Res(f, z_0) = b_1 = \frac{1}{(m-1)!} \lim\limits_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$.

Exemple 3.14 $f(z)=\frac{e^z}{(z-1)^3}$, *$z_0=1$ est une singularité de f*

$$\lim_{z\to z_0}(z-1)^3 f(z)=e\neq 0$$

alors $z_0=1$ est un pôle d'ordre 3 et $Res(f,1)=b_1=\frac{1}{2!}\lim\limits_{z\to z_0}\left[(z-1)^3 f(z)\right]''=\frac{e}{2}$.
ou bien le développement de Laurent de $\frac{e^z}{(z-1)^3}$ en $z_0=1$ est

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e}{(z-1)^3}e^{z-1}=\frac{e}{(z-1)^3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(z-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e}{n!}(z-1)^{n-3}=\frac{e}{(z-1)^3}+\frac{e}{(z-1)^2}+\frac{e}{2(z-1)}+..... \end{aligned}$$

donc $b_1=\frac{e}{2}$.

Exercice 3.15 *Trouver le résidu $Res\,(f,z_0)$ de la fonction f en pt z_0 où*
1- $f\,(z)=\dfrac{1}{z(z+2)^3}$, $z_0=0,-2$
2- $f\,(z)=e^{\frac{1}{z}}$, $z_0=0$,
3- $f\,(z)=\dfrac{\sin(z)}{1-2\cos(z)}$, $z_0=\dfrac{\pi}{3}$
Solution :
1- $f\,(z)=\dfrac{1}{z(z+2)^3}$, *$z_0=0$ et $z_1=-2$ sont deux singularités de f.*
$\lim\limits_{z\to 0}(z-0)^1 f(z)=\frac{1}{8}$, *donc $z_0=0$ est un pôle simple et $Res(f,0)=\frac{1}{8}$.*
$\lim\limits_{z\to -2}(z+2)^3 f(z)=\frac{-1}{2}$, *donc $z_1=-2$ est un pôle triple et*

$$Res(f,-2)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to z_0}\left[(z+2)^3 f(z)\right]''=\frac{-1}{8}.$$

2- $f\,(z)=e^{\frac{1}{z}}$, *$z_0=0$ est une singularité de f.*

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!z^n},$$

donc il existe une infinité de b_n (b_n : les coefficients de $\frac{1}{(z-z_0)^n}$). Alors $z_0=0$ est une singularité essentielle et $Res(f,0)=b_1=1$.
3- $f\,(z)=\dfrac{\sin(z)}{1-2\cos(z)}$, *$z_0=\dfrac{\pi}{3}$ est une singularité de f.*

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{3}}(z-\frac{\pi}{3})^1 f(z)=\frac{1}{2},$$

donc $z_0=\dfrac{\pi}{3}$ est un pôle simple et $Res(f,\dfrac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$.

Théorème 3.16 (Théome des résidus) *Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine et $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans D à l'exception de singularités isolées. Soit C un chemin fermé contenu ainsi que son intérieur dans D, ne passant par aucune des singularités de f et en contenant un nombre fini $z_1, z_2, ...z_n$ dans son intérieur. Alors*

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Rés(f, z_k).$$

Le chemin C : étant parcouru dans le sens positif.

Démonstration. Soit C_k : le cercle de centre z_k et de rayon r_k.

$$\int_C f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)dz = 0.$$

Or $\int_{C_k} f(z)dz = -2\pi i Rés(f, z_k)$, d'ou le résultat. ■

Exemple 3.17 $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}$, *$z_0 = 1$ et $z_1 = -3$ sont deux pts singuliers de f*
On a
$\lim\limits_{z\to 1} (z-1) f(z) = \frac{e}{16}$, *alors $z_0 = 1$ est un pôle simple et $Rés(f, 1) = \frac{e}{16}$.*
$\lim\limits_{z\to -3} (z+3)^2 f(z) = \frac{e^{-3}}{-4}$, *alors $z_1 = -3$ est un pôle double et*

$$Rés(f, 1) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to -3} \left[(z+3)^2 f(z)\right]' = \frac{-5e^{-3}}{16}.$$

1/ $\int_\gamma \frac{e^z dz}{(z-1)(z+3)^2} =?$ *où* $\gamma = \left\{z \in \mathbb{C}/ \quad |z| = \frac{3}{2}\right\}$
La 1ère méthode. *On a $z_0 = 1$ est à l'intérieur de γ et $z_1 = -3$ est à l'extérieur de γ.*
$\int_\gamma \frac{e^z dz}{(z-1)(z+3)^2} = \int_\gamma \frac{e^z/(z+3)^2 dz}{(z-1)}$, *et comme la fonction $g(z) = \frac{e^z}{(z+3)^2}$ est holomorphe dans l'intérieur de γ et γ est un chemin fermé orienté dans le sens (+), donc d'après le thm de cauchy*

$$\int_\gamma \frac{e^z dz}{(z-1)(z+3)^2} = \int_\gamma \frac{e^z/(z+3)^2 dz}{z-1} = 2\pi i g(z) = \frac{e\pi i}{8}.$$

La 2ème méthode, *les conditions du théorème des résidus sont vérifient, alors*

$$\int_\gamma \frac{e^z dz}{(z-1)(z+3)^2} = 2\pi i \sum_{z_k \text{ est à l'intérieur de } \gamma} Rés(f, z_k) = 2\pi i Rés(f, 1) = \frac{e\pi i}{8}.$$

2/ $\int_\gamma \frac{e^z dz}{(z-1)(z+3)^2} =?$ *où* $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/ \quad |z| = 10\}$
La 1ère méthode. *On a $z_0 = 1$ et $z_1 = -3$ sont à l'intérieur de γ.*

$\int_\Gamma \frac{e^z dz}{(z-1)(z+3)^2} = 0 = \int_\gamma \frac{e^z/(z+3)^2 dz}{(z-1)} - \int_{C_0} \frac{e^z/(z+3)^2 dz}{(z-1)} - \int_{C_1} \frac{e^z/(z+3)^2 dz}{(z-1)}$
donc

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{e^z/(z+3)^2 dz}{(z-1)} &= \int_{C_0} \frac{e^z/(z+3)^2 dz}{z-1} + \int_{C_1} \frac{e^z/(z-1)\, dz}{(z+3)^2} \\ &= 2\pi i \left(\frac{e^z}{(z+3)^2}\right)_{z=1} + 2\pi i \left(\frac{e^z}{z-1}\right)'_{z=3} = \frac{\pi}{8}(e - 5e^{-3})i.\end{aligned}$$

La 2ème méthode, *γ est un chemin fermé orienté dans le sens (+), $z_0 = 1$ et $z_1 = -3$ sont à l'intérieur de γ, et plus les conditions du théorème des résidus sont vérifient, alors*

$$\int_\gamma \frac{e^z dz}{(z-1)(z+3)^2} = 2\pi i c = 2\pi i\, (Rés(f,1) + Rés(f,-3)) = Rés(f,1) = \frac{\pi}{8}(e - 5e^{-3})i.$$

Théorème 3.18 (Pincipe de l'argument) *Soit f une fonction holomorphe à ntérieur d'un chemin fermé C sauf en P pôles et si elle a Z zéros, alors*

$$Z - P = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

le chemin C étant parcouru dans le sens positif.

Exemple 3.19 *Calculer $\int_{|z|=8} \frac{e^z}{e^z-1} dz$.*
On a $e^z - 1$ admet 3 racines et 0 pôles à l'intérieur de $|z| = 8$, alors

$$\int_{|z|=8} \frac{e^z}{e^z-1} dz = 2\pi i\, (Z - P) = 2\pi i\, (3 - 0) = 6\pi i$$

3.5.1 Résidu de f au l'infini

Soit f est une fonction analytique dans l'ouvert $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$, si on pose $\omega = \dfrac{1}{z}$. On a

$$f(z)dz = -\frac{1}{\omega^2} f(\frac{1}{\omega}) d\varpi$$

Définition 3.20 *on appelle résidu de f à l'infini, et on note $Res(f, \infty)$ le résidu de $-\frac{1}{\omega^2} f(\frac{1}{\omega})$ au point $\omega = 0$.*

Si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{z^n} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est le développement de Laurent de f dans l'ouvert $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$.
Alors

$$Res(f, \infty) = -b_1 \quad \left(b_1 \text{ est le coefficient de } \frac{1}{z}\right)$$

donc $\int_\gamma f(z)dz = -2\pi i Res(f, \infty)$ où f est une fct analytique dans l'ouvert $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$ et γ un cercle fermé de centre 0 et de rayon ρ $(\rho > r)$ orienté dans le sens positif

Théorème 3.21 $Res(f, \infty) + \sum Rés(f, z_k) = 0$.

Exemple 3.22 $f(z) = \frac{z}{z+2}$; $z = -2$ *est un pt singulier de* f

Méthode 1 : $\lim\limits_{z \to -2} (z+2) f(z) = -2$. *alors* $z_0 = -2$ *est un pôle simple et* α

$$Rés(f, -2) = -2 \Rightarrow Res(f, \infty) = -Rés(f, -2) = 2.$$

Méthode 2 : $Res(f, \infty) = Res(-\frac{1}{\omega^2} f(\frac{1}{\omega}), 0) = Res(\frac{-1}{\omega^2 + 2\omega^3}, 0)$. *posons* $g(\omega) = \frac{-1}{\omega^2+2\omega^3}$

$\lim\limits_{\omega \to 0} (\omega - 0)^2 g(\omega) = -1$. *alors* $\omega_0 = 0$ *est un pôle double et*

$$Rés(g, 0) = \frac{1}{1!} \lim_{\omega \to 0} \left[(\omega - 0)^2 g(\omega) \right]' = 2.$$

Exercice 3.23 *Calculer* $Res(f, \infty)$ *où*

1- $f(z) = \frac{1}{z^2+2}$,

2- $f(z) = \frac{e^z}{z}$,

3- $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$.

Proposition 3.24 ***(Lemmes de Jordan)***

1- Soit f *une fonction continue dans* $\mathbb{C}$ *vérifiant* $\lim\limits_{|z| \to +\infty} z f(z) = 0$, *nous avons alors*

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0$$

où $\gamma_r(t) = re^{it}$ *est défini sur* $[\alpha_1, \alpha_2]$ *avec* $\alpha_i \in [0, 2\pi]$ *et* $r \in \mathbb{R}_+^*$.

2- Soit f *une fonction continue dans* $\mathbb{C}$ *vérifiant* $\lim\limits_{z \to 0} z f(z) = 0$, *nous avons alors*

$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0$$

où $\gamma_r(t) = re^{it}$ *est défini sur* $[\alpha_1, \alpha_2]$ *avec* $\alpha_i \in [0, 2\pi]$ *et* $r \in \mathbb{R}_+^*$.

3.6 Calculs d'intégrales

Le théorème des résidus a de nombreuses applications au calcul d'intégrales (même réelles). Le plus simple est de donner quelques familles d'exemples.

3.6.1 Premier type. Fonctions rationnelles.

Considérons f une fonction rationnelle réelle sans pôle réel dont on souhaite calculer l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

La condition suffisante de convergence de cette intégrale impropre est donnée par $\lim\limits_{|z|\to+\infty} zf(z) = 0$, supposons cette condition vérifiées. Nous allons intégrer f sur un demi-cercle C_R de rayon R fixé, choisi de telle sorte que f soit holomorphe au voisinage de $Im(\gamma_R)$.

$$\gamma_R = C_R \cup [-R, R]$$

:/Users/NTC/AppData/Local/Temp/graphics/OMCJ1902$_{5.pdf}$

Dans ce cas

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{-R}^{+R} f(z)dz + \int_{C_R} f(z)dz$$

D'après le lemme de Jordan "cas 1" on a

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0. \text{ Ce qui donne } I = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{+R} f(z)dz,$$

d'après le théorème des résidus,

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Rés(f, z_k).$$

où z_k sont des points singuliers dans l'intérieur du demi-disque délimité par γ_r. Alors

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum Rés(f, z_k)$$

où la somme est prise sur l'ensemble des pôles de f dans le demi-plan supérieur complexe ($Im\,(z_k) > 0$).

Exemple 3.25 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$, *Considérons* $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ *: est une fonction holomorphe sur* $\mathbb{C}$ *privé de ses pôles*

$$z_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}, z_2 = e^{\frac{3i\pi}{4}}, z_1 = e^{\frac{5i\pi}{4}}, z_1 = e^{\frac{7i\pi}{4}}$$

z_1 *et* z_2 *dans le demi-plan supérieur*

$$\lim_{z\to z_k} (z - z_k)\, f(z) = \frac{1}{4z_k^3} = Res(f, z_k).\ (z_k \text{ sont des pôles simples })$$

Alors

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_k)>0} Rés(f, z_k) = 2\pi i(Rés(f, z_1) + Rés(f, z_2)) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Exemple 3.26 *En utilisant le théorème des résidus, calculer la valeur de*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

Soit $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2}$
$z_0 = i$ *et* $z_0 = -i$ *sont des pts singuliers de* f.

$z_0 = i$ *et* $z_0 = -i$ *sont des pôles doubles car :*

$$\lim_{z\to i}(z-i)^2 f(z) = -\frac{1}{4} \;\; et \;\; \lim_{z\to -i}(z+i)^2 f(z) = -\frac{1}{4}$$

$$Res(f,i) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\left[(z-i)^2 f(z)\right]' = \frac{1}{4i}, \quad Res(f,-i) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\left[(z+i)^2 f(z)\right]' = \frac{i}{4}$$

En utilisant le théorème des résidus, calculer la valeur de

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = 2\pi i \sum_{im(z_k)>0} Res(f,z_k) = 2\pi i Res(f,i) = \frac{\pi}{2}$$

3.6.2 Deuxième type. Fonctions trigonométriques.

Il s'agit de calculer des intégrales de la forme

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx,$$

où R est une fonction rationnelle sans pôles sur le cercle unité (R ne s'annule pas sur $x^2+y^2=1$), en ce cas l'intégrale est définie.

On pose $z = e^{ix}$, alors $\cos x = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$; $\sin x = \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})$; $dz = izdx$, l'intégrale s'ecrite

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx = \int_{C(0,1)} R(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}))\frac{dz}{iz}$$

Posons $h(z) = \frac{1}{iz}R(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}))$. Alors

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx = 2\pi i \sum_{|z_k|<1} Rés(h,z_k).$$

Exemple 3.27 $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\sin x}$, $2+\sin x$ *: ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}$.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\sin x} = \int_{C(0,1)} \frac{2dz}{z^2+4iz-1}$$

$$z^2+4iz-1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = z_1 = (\sqrt{3}-2)i; \;\; |z_1| < 1 \\ z = z_2 = -(\sqrt{3}+2)i; \;\; |z_2| > 1 \end{cases}, \; donc$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\sin x} = 2\pi i Rés(f,z_1) \;\; où \;\; f(z) = \frac{2}{z^2+4iz-1}.$$

$\lim\limits_{z \to z_1} (z - z_1) f(z) = \frac{2}{2z_1+4i} = \frac{1}{\sqrt{3}i}$. *alors* z_1 *est un pôle simple et* $Rés(f, z_1) = \frac{1}{\sqrt{3}i}$. *Donc*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \sin x} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Exemple 3.28 $I = \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dx}{5 + \cos x}$

Posons $e^{ix} = z$. *Alors :* $I = \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dx}{5 + \cos x} = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 10z + 1}$.

Soit

$$g(z) = \frac{1}{z^2 + 10z + 1}.$$

les $\begin{cases} z_1 = -5 + 2\sqrt{6} \ [\quad |z_1| < 1 \ ] \\ z_2 = -5 - 2\sqrt{6} \ [\quad |z_2| > 1 \ ] \end{cases}$ *sont des pôles simples de* g *et*

$$res(g,\ z_1) = \lim_{z \to z_1} (z - z_1) g(z) = \frac{1}{4\sqrt{6}},\ \text{Donc}$$

$$I = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dx}{5 + \cos x} = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 10z + 1} = \frac{2}{i} \times 2\pi i \times \sum_{|z_k|<1} res(g,\ z_k) = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$$

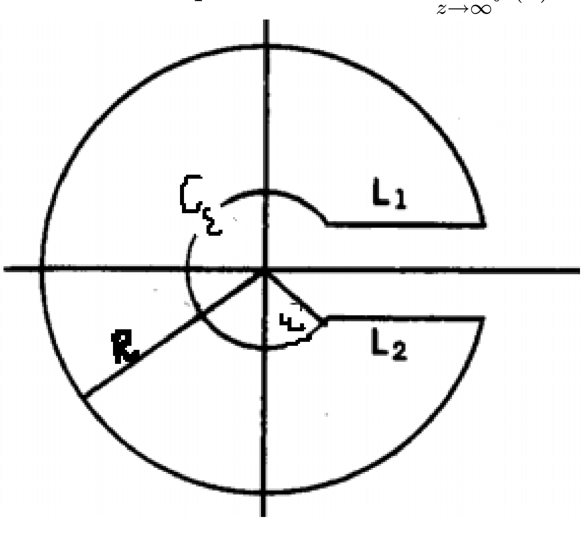
3.6.3 $3^{ième}$ type. Avec une détermintion d'une racine $\alpha^{ième}$

Nous considérons une intégrale de la forme

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} dx, \text{ avec } 0 < \alpha < 1$$

et f une fonction rationnelle ne contenant aucun pôle sur le demi-axe réel positif.

Notons qu'une telle intégrale est toujours convergente en 0, mais que la convergence en la borne infinie impose la condition $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = 0$, nous supposerons vérifiée.



En considérant la fonction $g(z) = \frac{f(z)}{z^\alpha}$ holomorphe sur l'ouvert $\mathbb{C}\backslash \{z \in \mathbb{C}/Re(z) \geq 0\}$. Choisissons donc la détermination de l'argument entre 0 et 2π, et intégrons la fonction g le long du chemin $C_{\varepsilon,R}$ (la figure) les chemins L_1^- et L_2^+ sont contenus sur les droites d'angles polaires 0, ainsi

$$\int_{C_{\varepsilon,R}} g(z)dz = \int_{C_R} g(z)dz + \int_{C_\varepsilon} g(z)dz + \int_{L_1^-} g(z)dz + \int_{L_2^+} g(z)dz$$

lorsque z parcourt le chemin L_1^-, la détermination de l'argument choisie implique $z^\alpha = |z|^\alpha e^{2\pi i\alpha}$, et donc en tenant compte de l'orientation

$$\int_{C_{\varepsilon,R}} g(z)dz = \int_{C_R} g(z)dz + \int_{C_\varepsilon} g(z)dz + (1 - e^{-2\pi i\alpha}) \int_\varepsilon^R g(x)dx$$

$$\left.\begin{array}{r} zg(z) \to 0 \text{ si } z \to 0 \\ zg(z) \to 0 \text{ si } |z| \to +\infty \end{array}\right\} \text{donc d'après le lemme de Jordan} \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{r\to\infty} \int_{C_R} g(z)dz = 0 \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} g(z)dz = 0 \end{array}\right.$$

L'intégrale I se calcule par passage à la limite et utilisation du théorème des résidus

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{f(z)}{z^\alpha} dz = \frac{2\pi i}{(1 - e^{-2\pi i\alpha})} \sum_{z_k} Rés(\frac{f(z)}{z^\alpha}, z_k) = \frac{\pi e^{\pi i\alpha}}{\sin \pi\alpha} \sum_{z_k} Rés(\frac{f(z)}{z^\alpha}, z_k)$$

où la somme est prise sur l'ensemble fini des pôles de la fonction rationnelle f qui se situent dans le plan complexe.

Exemple 3.29 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} dx$ *avec* $0 < \alpha < 1$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} dx = \frac{\pi e^{\pi i\alpha}}{\sin \pi\alpha} \sum_{z_k} Rés(\frac{1}{z^\alpha(1+z)}, -1)$$

$\lim\limits_{z\to -1} (z - (-1)) \frac{1}{z^\alpha(1+z)} = (-1)^\alpha = e^{-\pi i\alpha}$. *alors* -1 *est un pôle simple et* $Rés(\frac{1}{z^\alpha(1+z)}, -1) = e^{-\pi i\alpha}$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} dx = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$

Exemple 3.30 $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x^2+1)^2} = \frac{2\pi i}{1-e^{-\pi i}} \sum Res(g, z_k) = \frac{\pi e^{\frac{\pi}{2} i}}{\sin \frac{\pi}{2}} \sum Res(g, z_k)$ *où* $g(z) = \dfrac{1}{\sqrt{z}\,(z^2+1)^2}$

► $z_0 = i$ *et* $z_0 = -i$ *sont des pôles doubles de* g *car :*

$$\lim_{z\to i} (z-i)^2 g(z) = -\frac{1}{4} e^{-\frac{\pi i}{4}} \text{ et } \lim_{z\to -i} (z+i)^2 g(z) = -\frac{1}{4} e^{-\frac{3\pi i}{4}}$$

et

$$\begin{aligned} Res(g;i) &= \frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\left[(z-i)^2g(z)\right]' = \frac{1}{8}e^{-\frac{3\pi i}{4}} + \frac{1}{4i}e^{-\frac{\pi i}{4}} \\ Res(g,-i) &= \frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\left[(z+i)^2g(z)\right]' = \frac{1}{8}e^{-\frac{\pi i}{4}} - \frac{1}{4i}e^{-\frac{3\pi i}{4}} \end{aligned}$$

Alors :

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}\,(x^2+1)^2} = \pi i\left[Res(g;i)+Res(g,-i)\right] = -\pi i\left[\frac{3\sqrt{2}}{8}i\right] = \frac{3\sqrt{2}}{8}\pi$$

3.6.4 $4^{ième}$ type. Application aux transformées de Fourier

Définition 3.31 *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction continue absolument intégrable. Sa transformée de Fourier est la fonction $\hat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ définie par*

$$\hat{f}(x) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-i\xi y}dy.$$

Cas 1 : f une fonction rationnelle réelle sans pôle réel

Soient f une fonction rationnelle intégrable sur $\mathbb{R}$ et z_k ses pôles. Alors

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \begin{cases} 2\pi i \sum\limits_{\mathrm{Im}(z_k)>0} Rés(R(z)e^{-iz\xi}, z_k), \text{ si } \xi \le 0 \\ -2\pi i \sum\limits_{\mathrm{Im}(z_k)<0} Rés(R(z)e^{-iz\xi}, z_k), \text{ si } \xi \ge 0 \end{cases}$$

Exemple 3.32 $\mathcal{F}(\frac{1}{1+x^2})(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\xi x}}{1+x^2}dy = ?$

$z_0 = i$ et $z_1 = -i$ sont deux pôles simples de $\frac{e^{-iz\xi}}{1+z^2}$ et $Rés(\frac{e^{-iz\xi}}{1+z^2}, i) = -\frac{e^{\xi}}{2i}$, $Rés(\frac{e^{-iz\xi}}{1+z^2}, -i) = \frac{e^{-\xi}}{2i}$

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \begin{cases} 2\pi i Rés(\frac{e^{-iz\xi}}{1+z^2}, i), \ \ si\ \xi \le 0 \\ -2\pi i Rés(\frac{e^{-iz\xi}}{1+z^2}, -i), \ \ si\ \xi \ge 0 \end{cases} = \pi e^{|\xi|}$$

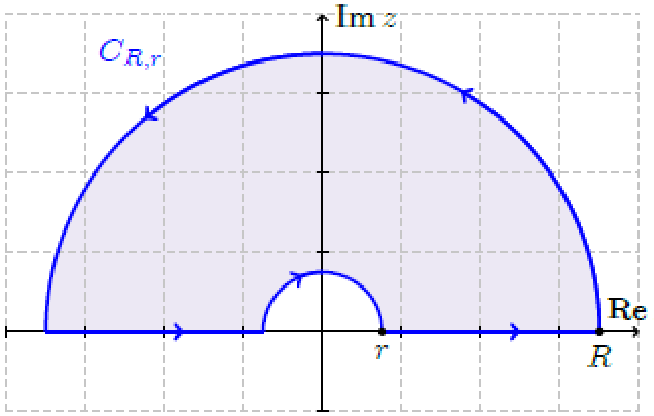
Cas 2 : f une fonction rationnelle réelle avec pôles réels

Exemple 3.33 $\mathcal{F}(\frac{1}{x})(1) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ix}}{x}dx = ?$

$z_0 = 0$ est un pôle simple de $\frac{e^{-iz}}{z}$ et $Rés(\frac{e^{-iz}}{z}, 0) = 1$,

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_{r,R}} f(z)dz = 0$$

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)dz = \int_{-\pi}^{0}\lim_{r\to 0}\frac{e^{-ire^{it}}}{re^{it}}.ire^{it} = i\pi,$$



$$\lim_{R\to+\infty, r\to 0}\left(\int_{-R}^{-r}+\int_{r}^{+R}\right)\frac{e^{-iz}}{z}dz+\lim_{r\to+\infty}\int_{C_{r,R}} f(z)dz+\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)dz=0$$

alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ix}}{x}dz=i\pi$$

ce qui donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\pi$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dz=0.$$

3.7 Exercices

Exercice 1 : Trouver les singularités et leurs types

1- $f(z)=\dfrac{1-\cos(z)}{z^2}$, 2- $f(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)^3}$, 3- $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}$,

4- $f(z)=e^{\frac{-1}{(z-1)^2}}$, 5- $f(z)=\dfrac{\sin(z)}{z}$, 6- $f(z)=\dfrac{z(z-1)}{\sin(\pi z)}$,

Exercice 2 : Trouver les séries de laurent de la fonction f en pt z_0 où

1- $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$, $z_0=1$, 2- $f(z)=z\cos(\frac{1}{z})$, $z_0=0$,

3- $f(z)=\dfrac{\sin(z)}{z-\pi}$, $z_0=\pi$, 4- $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$, $z_0=-1$

5- $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$, $z_0=0$, 6- $f(z)=\dfrac{1-\cos(z)}{z}$, $z_0=0$,

7- $f(z)=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{\sin(z)}$, $z_0=0$

Exercice 3 : On considère la fonction

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}.$$

Trouver son developpement en série de laurent :

1- dans le disque $|z| < 1$

2- dans la couronne $1 < |z| < 2$

3- dans la couronne $|z| > 2$

Exercice 4 : Trouver le résidus $Res\,(f, z_0)$ de la fonction f en pt z_0 où

1- $f(z) = \dfrac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$, $z_0 = 2, i, -1$, 2- $f(z) = \dfrac{1}{z(z+2)^3}$, $z_0 = 0, -2$

3- $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$, 4- $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{1-2\cos(z)}$, $z_0 = \dfrac{\pi}{3}$

5- $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z^4}$, $z_0 = 0$

Exercice 5 : On pose

$$f(z) = \frac{1}{z\sin(z)}$$

1- Trouver l'ordre des zéros de $z\sin(z)$

2- Calculer le résidu aux points singuliers de f

3- Calculer la valeur de

$$I = \int_{|z-2|=4} f(z)dz$$

Exercice 6 : évaluer

1- $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}dz$ avec $\gamma : |z| = \frac{3}{2}$, $\gamma : |z| = 10$

2- $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z^4-1}dz$ avec $\gamma : |z-i| = \frac{1}{2}$

3- $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z-\pi}dz$ avec $\gamma : |z-1| = 3$, $\gamma : |z-1| = 2$

4- $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z(z+1)}dz$ avec $\gamma : |z-1| = \frac{3}{2}$, $\gamma : |z-1| = 3$

Exercice 7 : Que vaut, en fct de $R > 0$. $\displaystyle\int_{|z|=R} \frac{dz}{2z^2-5z+2}$.on précisera les valeurs exclues de R.

Exercice 8 : Calculer les integrales suivantes (en utilusant Thm. des résidus)

1- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$, 2- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$, 3- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-2ix-2}$,

4- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1}$, 5- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$, 6- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(x)}{x^4+1}dx$,

7- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2+2x+10}dx$, 8- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+x+1}dx$, 9- $\mathcal{F}\left(\frac{1}{x^4+1}\right)(\xi) =?$

10- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2+\sin(x)}$, 11- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{5+\cos(x)}$, 12- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x)dx}{4-2\cos(x)}$,

13- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}$, avec $\alpha \in]0,1[$, 14- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}dx}{(1+x^2)^2}$, avec $\alpha \in]0,4[$

Bibliographie

[1] M. Audin, Analyse complexe, Université Louis Pasteur, 2009.

[2] N. Assaad, Mathématiques générales Analyse complexe, ISAE, 1998.

[3] P. Dolbeault, Analyse complexe, Masson, Paris, 1990.

[4] R. Gélinas et M. Lambert, Eléments d'analyse complexe, Presses de l'Université du Québec (1994).

[5] A. Giroux, Analyse complexe, Université de Montréal, Juin 2004.

[6] C. Imbert, Analyse Complexe, Université Paris-Dauphine, 2009-2010.

[7] T. LAADJ, Notes de Cours du module Analyse Complexe, USTHB, 2014.

[8] E. Plaut, Analyse Complexe, 2006-2007.

[9] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Dunod, Paris, 1998