Université Mohamed Boudiaf - M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'informatique
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2020-2021

Module : **Transformations intégrales dans les espaces L^p**, Durée :1^h : 30

(Examen final : le 07-06-2021)

Exercice n°1 : (3 pts)

f et g étant deux fonctions appartenant respectivement $L^p(X)$ et $L^q(X)$ où p *et* q sont positifs, montrer que si on pose $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$ on a

$$fg \in L^r(X) \quad et \quad \|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Exercice n°2 : (8 pts)

Soient la fonction porte $\pi(x)$ et la fonction de triangle $\Delta(x)$, telles que

$$\pi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & |x| > \frac{1}{2} \end{cases}, \quad \Delta(x) = \begin{cases} 1-|x| & si \quad |x|<1 \\ 0 & si \quad |x| \geq 1 \end{cases}.$$

1) Représenter graphiquement $\pi(x)$ et $\Delta(x)$.
2) Calculer la transformée de Fourier de $\pi(x)$ et $\Delta(x)$.
3) En déduire la transformée de Fourier des fonctions suivantes :
a)$\pi(\frac{x+1}{2})$, $b)(x+1)\,\pi(x)$, c) $\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$, d) $(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x})^2$.
4) Utiliser l'identité de Parseval pour en déduire les intégrales $\int_{\mathbb{R}}(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x})^n dx$, pour $n=2,4$.

Exercice n°3 : (4pts)

1) Trouver la transformée de Fourier de $f(x) = \begin{cases} 1, & |x|<a \\ 0, & |x|>a \end{cases}$.
2) En utilisant la transformée de Fourier inverse, calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi x\xi)\sin(2\pi a\xi)}{\xi} d\xi$.
3) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$.

Exercice n°4 : (5pts)

1) Calculer la transformée de Laplace de $e^{-\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.
2) En déduire la transformée de Laplace de $\cos(ax)$, $\sin(ax)$, où $a \in \mathbb{R}$.

(**Indication :** $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$)

Bon courage.

Correction d'examen final

Exo 1 :

on a

$$\|fg\|_r^r = \int_X |fg|^r d\mu = \int_X |f|^r |g|^r d\mu \quad \text{---} (*) \qquad 1$$

on a : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{\frac{p}{r}} + \frac{1}{\frac{q}{r}} = 1$

D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$(*) \Leftrightarrow \|fg\|_r^r = \int_X |f|^r |g|^r d\mu \qquad 1$$

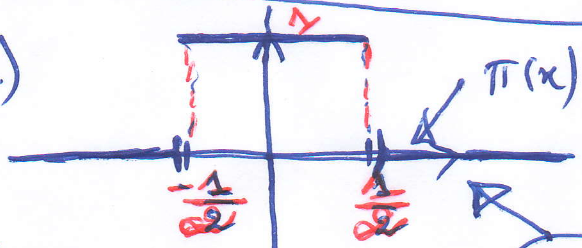
$$\leq \left(\int_X (|f|^r)^{\frac{p}{r}} d\mu\right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_X (|g|^r)^{\frac{q}{r}} d\mu\right)^{\frac{r}{q}}$$

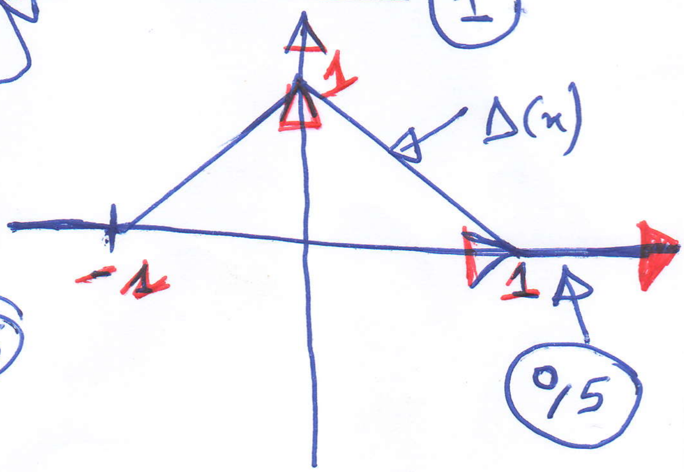
$$\leq \|f\|_p^r \cdot \|g\|_q^r$$

$$\Rightarrow \boxed{\|fg\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q} \qquad 1$$

Exo2 :

1)





$$\Delta(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x < 1 \\ 1+x, & -1 < x < 0 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

2) on a $\boxed{\hat{\pi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \cdot \pi(x)\, dx = \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}}$ 1

puisque $\Delta(x)$ est paire, alors

$$\hat{\Delta}(\xi) = 2\int_0^{+\infty} \Delta(x)\cos(2\pi x\xi)\,dx = 2\int_0^1 (1-x)\cos(2\pi x\xi)\,dx$$

l'intégrale par partie donne

$$\boxed{\hat{\Delta}(\xi) = \frac{\sin^2(\pi\xi)}{\pi^2\xi^2} = \left(\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}\right)^2}$$

1

3) a) $\mathcal{F}\left(\Pi\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)(\xi) = \mathcal{F}\left(h_{\frac{1}{2}}(\tau_{-1}\Pi)(x)\right)(\xi)$

$$= 2\,(\widehat{\tau_{-1}\Pi})(2\xi) = 2\,e^{-2\pi i(2\xi)(-1)}\cdot\hat{\Pi}(2\xi)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}\left(\Pi\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)(\xi) = e^{4\pi i\xi}\cdot\frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}}$$

0,5

b) $\mathcal{F}\left((x+1)\Pi(x)\right) = \mathcal{F}\left(x\Pi(x) + \Pi(x)\right)(\xi) = \mathcal{F}\left(x\Pi(x)\right)(\xi) + \hat{\Pi}(\xi)$

$$= \frac{-1}{2\pi i}\cdot\frac{d}{d\xi}\hat{\Pi}(\xi) + \hat{\Pi}(\xi)$$

0,75

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}\left((x+1)\Pi(x)\right)(\xi) = \frac{-1}{2\pi i}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}\right) + \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}}$$

c) on a $\mathcal{F}\left(\hat{\Pi}(x)\right)(\xi) = \Pi(-\xi)$

0,5

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)(\xi) = \Pi(\xi), \text{ car } \Pi \text{ est paire}}$

d) on a $\mathcal{F}\left(\hat{\Delta}(x)\right)(\xi) = \Delta(-\xi)$

0,75

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}\left(\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2\right)(\xi) = \Delta(\xi), \text{ car } \Delta \text{ est paire}}$

4) D'après l'identité de parseval, on a

$n=2$, $\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2 dx = \int_{\mathbb{R}} (\Pi(\xi))^2 d\xi = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1\, d\xi = [\xi]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \boxed{1}$

1

$n=4$, $\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^4 dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2\right)^2 dx$

$\overset{\text{Parseval}}{=} \int_{\mathbb{R}} (\Delta(\xi))^2 d\xi = \int_{-1}^{0} (1+\xi)^2 d\xi + \int_{0}^{1} (1-\xi)^2 d\xi$

$= \int_{-1}^{0} (1+2\xi+\xi^2) d\xi + \int_{0}^{1} (1-2\xi+\xi^2) d\xi = \boxed{\frac{2}{3}}$

1,5

EX 03 :

1) $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \cdot f(x)\, dx = \int_{-a}^{a} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \cdot dx$

$\Rightarrow \boxed{\hat{f}(\xi) = \frac{\sin(2\pi a \xi)}{\pi \xi}}$

1

2) on a $\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x \cdot \xi} \cdot \hat{f}(\xi)\, d\xi = f(x)$

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \left(\cos(2\pi x\xi) + i \sin(2\pi x \xi)\right) \hat{f}(\xi)\, d\xi = \begin{cases} 1, & |x|<a \\ \frac{1}{2}, & |x|=a \\ 0, & |x|>a \end{cases}$

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(2\pi x\xi)\sin(2\pi a\xi)}{\pi\xi} d\xi + i \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(2\pi x\xi)\sin(2\pi a\xi)}{\pi\xi} d\xi}_{0} = \begin{cases} 1, & |x|<a \\ \frac{1}{2}, & |x|=a \\ 0, & |x|>a \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(2\pi x\xi)\sin(2\pi a\xi)}{\xi} d\xi = \begin{cases} \pi, & |x|<a \\ \frac{\pi}{2}, & |x|=a \\ 0, & |x|>a \end{cases}}$

1,5

(3)

pour $x=0$ et $a=\frac{1}{2\pi}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\varphi)}{\varphi}\,d\varphi = \pi \Rightarrow 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\varphi)}{\varphi}\,d\varphi = \pi$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\varphi)}{\varphi}\,d\varphi = \frac{\pi}{2}}$$

1,5

Exo 4 :

1) on a : $\mathcal{L}(e^{-\alpha x})(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \cdot e^{-\alpha x}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-(s+\alpha)x}\,dx$

$$= \frac{-1}{s+\alpha}\left[e^{-(s+\alpha)x}\right]_0^{+\infty}$$

2

soient $s = a+ib$, $\alpha = a'+ib'$ $\Rightarrow s+\alpha = a+a'+i(b+b')$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} e^{-(s+\alpha)x} = 0$ si $Re(s)+Re(\alpha)>0$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}(e^{-\alpha x})(s) = \frac{1}{s+\alpha},\ Re(s)+Re(\alpha)>0}$$

2) $\mathcal{L}(\cos(ax))(s) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}(e^{iax})(s) + \mathcal{L}(e^{-iax})(s)\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ia} + \frac{1}{s+ia}\right),\ Re(s)>0$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}(\cos(ax))(s) = \frac{s}{s^2+a^2},\ Re(s)>0}$$

1,5

$\mathcal{L}(\sin(ax))(s) = \frac{1}{2i}\left(\mathcal{L}(e^{iax})(s) - \mathcal{L}(e^{-iax})(s)\right)$

1,5

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}(\sin(ax))(s) = \frac{a}{s^2+a^2},\ Re(s)>0}$$

(4)