Chapter 3

Différences finies pour EDPs

3.1 Introduction à la méthode des différences finies

3.2 Schéma d'ordre supérieur

3.3 Discrétisation de l'équation de la chaleur 1D

3.4 Schéma d'Euler explicite

3.5 Schéma d'Euler implicite

3.6 Schéma Crank-Nicolson

En 1947, la mathématicienne Phyllis Nicolson (1917-1968) et le physicien John Crank (1916-2006) ont développé la méthode de Crank-Nicolson qui sert a résoudre l'équation de la chaleur (plus précisément, système d'EDPs). Cette méthode utilise les différences finies pour approcher une solution du problème, elle est numériquement stable. Son efficacité et sa simplicité ont fait un outil courant dans les simulations numériques, pour résoudre des problèmes en mécanique quantique, mécanique des fluides, électromagnétisme ...etc.

3.6.1 Schéma de Crank-Nicolson pour le problème de la chaleur

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = v^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ x \in]0,1[,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0,\ \ t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x),\ x \in [0,1]. \end{cases} \tag{3.1}$$

Le schéma de Crank-Nicolson est donné par

$$\begin{cases} \left(\dfrac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k}\right) = \dfrac{v^2}{2}\left(\dfrac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j + u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2}\right),\ \ 1 \leq i \leq n,\ j = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_0^j = u_{n+1}^j = 0,\ j = 0, 1, \ldots. \\ u(x,0) = f(x_i) = f(ih) = f_i,\ 0 \leq i \leq n+1. \end{cases} \tag{3.2}$$

En posant $\lambda = \dfrac{v^2 k}{h^2}$, on trouve

$$2(u_i^{j+1} - u_i^j) = \lambda\left(u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j + u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}\right)$$

$$\Longrightarrow -\lambda u_{i-1}^{j+1} + (2+2\lambda)u_i^{j+1} - \lambda u_{i+1}^{j+1} = \lambda u_{i-1}^j + (2+2\lambda)u_i^j + \lambda u_{i+1}^j.$$

Alors la forme matricielle est écrite comme suit
pour $i = 1 \longrightarrow -\cancelto{0}{\lambda u_0^{j+1}} + (2+2\lambda)u_1^{j+1} - \lambda u_2^{j+1} = \cancelto{0}{\lambda u_0^j} + (2-2\lambda)u_1^j + \lambda u_2^j,$
pour $i = 2 \longrightarrow -\lambda u_1^{j+1} + (2+2\lambda)u_2^{j+1} - \lambda u_3^{j+1} = \lambda u_1^j + (2-2\lambda)u_2^j + \lambda u_3^j,$
.
.
.
pour $i = n \longrightarrow -\lambda u_{n-1}^{j+1} + (2+2\lambda)u_n^{j+1} - \cancelto{0}{\lambda u_{n+1}^{j+1}} = \lambda u_{n-1}^j + (2-2\lambda)u_n^j + \cancelto{0}{\lambda u_{n+1}^j}.$
D'où le système matriciel est donné par

$$\begin{pmatrix} 2+2\lambda & -\lambda & \cdots & 0 \\ -\lambda & 2+2\lambda & -\lambda & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\lambda & 2+2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{j+1} \\ u_2^{j+1} \\ \vdots \\ u_n^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2\lambda & \lambda & \cdots & 0 \\ \lambda & 2-2\lambda & \lambda & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & 2-2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^j \\ u_2^j \\ \vdots \\ u_n^j \end{pmatrix}$$

ou encore on écrit sous la forme $CW^{(j+1)} = DW^{(j)}$, où

$$C = \begin{pmatrix} 2+2\lambda & -\lambda & \cdots & 0 \\ -\lambda & 2+2\lambda & -\lambda & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\lambda & 2+2\lambda \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2-2\lambda & \lambda & \cdots & 0 \\ \lambda & 2-2\lambda & \lambda & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & 2-2\lambda \end{pmatrix}$$ et $W^{(j)} = \left(u_1^j, u_2^j, \cdots, u_n^j\right)^t$.

Exemple 4 *Soit le problème*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ x \in]0,2[, \ 0 < t < \dfrac{1}{4}, \\ u(0,t) = u(2,t) = 0, \ \ 0 \le t \le \dfrac{1}{4}, \\ u(x,0) = \sin(x\dfrac{\pi}{2}), \ x \in [0,2]. \end{cases} \tag{3.3}$$

En utilisant le schéma de Crank-Nicolson, calculer la solution approchée pour $h = \dfrac{1}{4}$ et $k = \dfrac{1}{4}$

Solution 5 *De h et k, il clair que $n = 3$, $\lambda = 1$. Puis d'après les conditions aux limites de type Dirichlet homogène on a $u_0^0 = u_0^1 = u_4^0 = u_4^1 = 0$.*
On sait que le système matriciel pour le schéma de Crank-Nicolson s'écrit sous la forme

$$CW^{(1)} = DW^{(0)},$$

où

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ W^{(0)} = \begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ u_3^0 \end{pmatrix}, \ W^{(1)} = \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \end{pmatrix}$$

Et de la condition initiale on a

$$W^{(0)} = \begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ u_3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{3\pi}{4}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 4u_1^1 - u_2^1 = 1 \\ -u_1^1 + 4u_2^1 - u_3^1 = \sqrt{2} \\ -u_2^1 + 4u_3^1 = 1 \end{cases}$$

par la soustraction de la première équation et la troisième équation dans le système, on obtient $u_1^1 = u_3^1$. *Donc*

$$\begin{cases} 4u_1^1 - u_2^1 = 1 \\ -2u_1^1 + 4u_2^1 = \sqrt{2} \end{cases} \Longrightarrow u_2^1 = \frac{2\sqrt{2}+1}{7}$$

et

$$u_1^1 = u_3^1 = \frac{4+\sqrt{2}}{14}.$$

3.6.2 Généralité d'un schéma pour l'équation de la chaleur

Il s'agit d'une généralisation des schémas précédents avec $0 \leq \theta \leq 1$. Ce schéma s'écrit sous la forme suivante

$$\left(\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k}\right) = v^2\left(\theta\frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} + (1-\theta)\frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}\right), \quad 1 \leq i \leq n, \ j = 1, 2, ... \tag{3.4}$$

Posons $\lambda = \dfrac{v^2k}{h^2}$, on obtient

$$u_i^{j+1} - u_i^j = \lambda\left[\theta\left(u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}\right) + (1-\theta)\left(u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j\right)\right].$$

Alors le schéma sous forme matricielle est donné par

$$(I + \theta\lambda A)\, W^{(j+1)} = (I - (1-\theta)\lambda A)\, W^{(j)},$$

où

$$W^{(j)} = (u_1^j, u_2^j, \cdots, u_n^j)^t, \ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cas particuliers :

- Si $\theta = 0 \longrightarrow$ Euler explicite.
- Si $\theta = 1 \longrightarrow$ Euler implicite.
- Si $\theta = \frac{1}{2} \longrightarrow$ Crank-Nicolson.

Exercice 6 *On considère le problème suivant*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 10u + 11e^t + 10x, \ x \in]0,1[, \ t > 0, \\ u(0,t) = e^t, \ u(1,t) = e^t + 1, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = 1 + x, \ x \in [0,1]. \end{cases} \tag{3.5}$$

Où $u = u(x,t)$.

1. *Donner le schéma explicite pour* $h = 0.5$ *et* $k = 0.1$.
2. *Trouver la solution approchée du schéma pour* $x = 0.5$ *et* $t = 0.2$.
3. *Donner le schéma implicite pour* $h = 0.5$ *et* $k = 0.1$.
4. *Déterminer la solution approchée du schéma pour* $x = 0.5$ *et* $t = 0.2$.

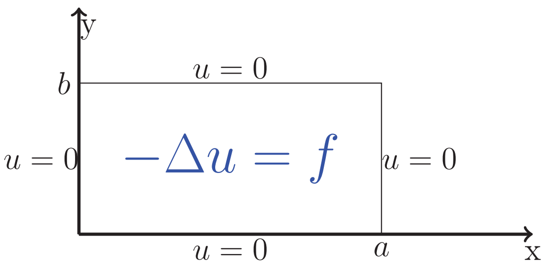
Soit $u(x,t) = e^t + x$ *une solution exacte de notre problème. Comparer les deux méthodes*

3.7 Discrétisation de l'équation de Laplace 2D: cas stationnaire

Considérons le problème de Poisson avec conditions aux limites de type Dirichlet homogène sur le pavé $\Omega = [0,a] \times [0,b] \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ sur } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.6}$$

où $u = u(x,y)$ et f est une fonction régulière donnée dans Ω.

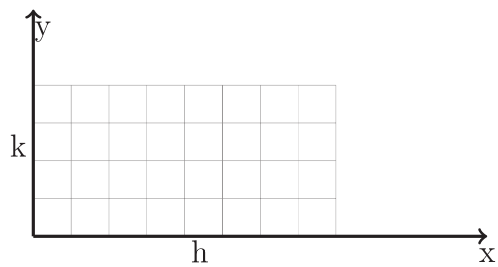


Le domaine Ω

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. On définit le pas dans les deux directions comme suit :

$$h = \frac{a}{n+1},\ x_i = ih,\ i = 0, 1, \cdots, n+1,$$

$$k = \frac{b}{m+1},\ y_j = jk,\ j = 0, 1, \cdots, m+1.$$



Le maillage de Ω

On écrit le schéma aux différences finies pour les dérivées partielles du second ordre par

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_i^{j-1} - 2u_i^j + u_i^{j+1}}{k^2}.$$

Et les conditions aux bords de type de Dirichlet homogène

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 = u_i^0,\ u(x,b) = 0 = u_i^{m+1},\ \text{pour} i = 0, 1, \cdots, n+1, \\ u(0,y) = 0 = u_0^j,\ u(a,y) = 0 = u_{n+1}^j,\ \text{pour} j = 0, 1, \cdots, m+1. \end{cases}$$

Alors le schéma de différences finies pour le problème (3.6) est donné par

$$\begin{cases} \dfrac{-u_{i-1}^j + 2u_i^j - u_{i+1}^j}{h^2} - \dfrac{u_i^{j-1} - 2u_i^j + u_i^{j+1}}{k^2} = f_i,\ 1 \leq i \leq n \,\text{et}\, 1 \leq j \leq m, \\ u_i^0 = u_i^m + 1 = 0,\ 1 \leq i \leq n, \\ u_0^j = u_n + 1^j = 0,\ 1 \leq j \leq m. \end{cases} \tag{3.7}$$

D'où le système matriciel correspondant à (3.7) s'écrit sous la forme suivante

$$AU = F,$$

où A est une matrice tridiagonale par blocs de taille $n \times m$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} B & C & \cdots & 0 \\ C & B & C & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & C \\ 0 & \cdots & C & B \end{pmatrix}$$

avec B et C sont deux matrices carrées dans le corps $\mathbb{R}$ représentons comme suit

$$B = \begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} + \frac{2}{k^2} & \frac{-1}{h^2} & \cdots & 0 \\ \frac{-1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + \frac{2}{k^2} & \frac{-1}{h^2} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{-1}{h^2} \\ 0 & \cdots & \frac{-1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + \frac{2}{k^2} \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} \frac{-1}{k^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{-1}{k^2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{-1}{k^2} \end{pmatrix}.$$

Et

$$U = (U_1, U_2, \cdots, U_j, \cdots, U_n)^t,\ F = (F_1, F_2, \cdots, F_j, \cdots, F_n)^t,$$

pour $1 \leq j \leq m$ on a

$$U_j = (u_1^j, u_2^j, \cdots, u_n^j)^t,\ F_j = (f_1^j, f_2^j, \cdots, f_n^j)^t.$$

Exemple 7 *Dans cet exemple, on prend* $a = b = 1$ *et* $n = m = 3$. *Le schéma de différences finies* (3.7) *est devient*

$$\begin{cases} 4u_i^j - u_{i-1}^j - u_{i+1}^j - u_i^{j-1} - u_i^{j+1} = h^2 f_i^j,\ 1 \leq i, j \leq 3, \\ u_i^0 = u_i^n + 1 = 0,\ 0 \leq i \leq 4, \\ u_0^j = u_n + 1^j = 0,\ 0 \leq j \leq 4. \end{cases} \tag{3.8}$$

Ainsi on écrit le système matriciel pour $1 \leq i, j \leq 3$.
<u>*Fixons* $i = 1$ *:*</u>

$$\begin{aligned} pour\, j = 1 &\longrightarrow 4u_1^1 - \cancelto{0}{u_0^1} - u_2^1 - \cancelto{0}{u_1^0} - u_1^2 = h^2 f_1^1, \\ pour\, j = 2 &\longrightarrow 4u_1^2 - \cancelto{0}{u_0^2} - u_2^2 - u_1^1 - u_1^3 = h^2 f_1^2, \\ pour\, j = 3 &\longrightarrow 4u_1^3 - \cancelto{0}{u_0^3} - u_2^3 - -u_1^2 - \cancelto{0}{u_1^4} = h^2 f_1^1. \end{aligned}$$

On fixe $i = 2$:

$$
\begin{aligned}
pour\, j = 1 &\longrightarrow 4u_2^1 - u_1^1 - u_3^1 \cancelto{0}{u_2^0} - u_2^2 = h^2 f_2^1,\\
pour\, j = 2 &\longrightarrow 4u_2^2 - u_1^2 - u_3^2 - u_2^1 - u_2^3 = h^2 f_2^2,\\
pour\, j = 3 &\longrightarrow 4u_2^3 - u_2 - u_1^3 - u_3^3 - u_2^2 - \cancelto{0}{u_2^4} = h^2 f_2^3.
\end{aligned}
$$

Pour $i = 3$:

$$
\begin{aligned}
pour\, j = 1 &\longrightarrow 4u_3^1 - u_2^1 - u_4^1 - \cancelto{0}{u_3^0} - u_3^2 = h^2 f_3^1,\\
pour\, j = 2 &\longrightarrow 4u_3^2 - u_2^2 - u_4^2 - u_3^1 - u_3^3 = h^2 f_3^2,\\
pour\, j = 3 &\longrightarrow 4u_3^3 - u_2^3 - \cancelto{0}{u_4^3} - u_3^2 - \cancelto{0}{u_3^4} = h^2 f_3^3.
\end{aligned}
$$

Alors le système matriciel s'écrit sous la forme suivante

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
\hline
-1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1\\
\hline
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4
\end{array}\right)
\begin{pmatrix} u_1^1\\ u_1^2\\ u_1^3\\ u_2^1\\ u_2^2\\ u_2^3\\ u_3^1\\ u_3^2\\ u_3^3 \end{pmatrix}
= h^2
\begin{pmatrix} f_1^1\\ f_1^2\\ f_1^3\\ f_2^1\\ f_2^2\\ f_2^3\\ f_3^1\\ f_3^2\\ f_3^3 \end{pmatrix}
\Longleftrightarrow AU = F.
$$

Où

$$
A = \begin{pmatrix} B & C & 0\\ C & B & C\\ 0 & C & B \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0\\ -1 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}\ \text{et } C = -I \text{ avec } I \text{ la matrice identité de } \mathbb{R}^3.
$$

Propriété de la matrice A :

- A est une matrice symétrique.
- A est tridiagonale par blocs.
- A à diagonale dominante stricte (i.e $|a_{ii}| > \sum_{i \neq j_{i=1}}^{n} |a_{ij}|$).

Alors la matrice A est inversible.

Exemple 8 *Soit $\Omega = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$. On considère le problème suivant*

$$
\begin{cases}
u_{xx} + u_{yy} = x + y + 1, \ (x,y) \in]0,1[^2,\\
u(x,0) = u(x,1) = 0, \ x \in [0,1],\\
u(0,y) = u(1,y) = 0, \ y \in [0,1].
\end{cases}
\tag{3.9}
$$

où $u = u(x,y)$.
Question:
Calculer la solution approchée pour $h = k = \dfrac{1}{3}$.

Solution 9 *Le schéma aux différences finies est donné par*

$$\begin{cases} -4u_i^j + u_{i-1}^j + u_{i+1}^j + u_i^{j-1} + u_i^{j+1} = \dfrac{1}{27}(i+j+3),\ i,j = 1,2, \\ u_i^0 = u_i^3 = 0,\ 0 \leq i \leq 3, \\ u_0^j = u_3^j = 0,\ 0 \leq j \leq 3. \end{cases} \tag{3.10}$$

Donc on écrit le système matriciel comme suit
Fixons $i = 1$:

$$pour\, j = 1 \longrightarrow -4u_1^1 + \cancelto{0}{u_0^1} + u_2^1 + \cancelto{0}{u_1^0} + u_1^2 = \frac{5}{27},$$

$$pour\, j = 2 \longrightarrow -4u_1^2 + \cancelto{0}{u_0^2} + u_2^2 + u_1^1 + \cancelto{0}{u_1^3} = \frac{6}{27},$$

Pour $i = 2$:

$$pour\, j = 1 \longrightarrow -4u_2^1 + u_1^1 + \cancelto{0}{u_3^1} + \cancelto{0}{u_2^0} + u_2^2 = \frac{6}{27},$$

$$pour\, j = 2 \longrightarrow -4u_2^2 + u_1^2 + \cancelto{0}{u_3^2} + u_2^1 + \cancelto{0}{u_2^3} = \frac{7}{27},$$

Alors

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_1^2 \\ u_2^1 \\ u_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{27} \\ \frac{6}{27} \\ \frac{6}{27} \\ \frac{7}{27}. \end{pmatrix}$$

D'où la solution approchée est

$$\left(u_1^1,\ u_1^2,\ u_2^1,\ u_2^2\right)^t = \left(\frac{-11}{108}, \frac{-13}{108}, \frac{-13}{108}, \frac{-11}{108}\right)^t.$$

Exercice 10 *Considérons sur le pavé $\Omega = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ le problème de Laplace suivant*

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0,\ (x,y) \in \Omega, \\ u(x,0) = 2x,\ u(x,1) = 2x - 1,\ x \in [0,1], \\ u(0,y) = -y,\ u(1,y) = 2 - y,\ y \in [0,1]. \end{cases} \tag{3.11}$$

où $u = u(x,y)$.

1. *Tracer le domaine Ω et $u(x,y)$ sur les frontières de Ω.*
2. *Déterminer a, b de sort que $u(x,y) = ax + by$ est une solution exacte de notre problème.*
3. *Calculer la solution approchée pour $n = 3$ et $m = 1$.*
4. *Comparer la solution approchée avec la solution exacte.*

Université Mohamed Boudiaf -M'sila-

Faculté de mathématiques et de l'informatique **$3^{\text{ème}}$ année licence**
Département de mathématiques **2019/2020**

Module: Méthode numérique
Série d'exercices N°1

NB: Les exercices suivis par une étoile seront traités par l'étudiant.

Exercice 1.

Soient a, b et λ trois nombres réels et f une fonction continue sur $[0,1]$.
Considérons le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -u'' + \lambda u = f, & \text{sur }]0,1[, \\ u(0) = a, \ u(1) = b, \end{cases}$$

et le problème de Neumann

$$(*) \begin{cases} -u'' + \lambda u = f, & \text{sur }]0,1[, \\ u'(0) = a, \ u'(1) = b. \end{cases}$$

(On pose $\delta = \sqrt{|\lambda|}$)
Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur δ et f pour que le problème de Dirichlet et le problème de Neumann admettent une unique solution u dans $C^2([0,1])$.

Exercice 2.

On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

1. Si f est une fonction continue donnée sur $[0,1]$, montrer par deux manières différentes que le problème admet une solution unique dans $C^2([0,1])$ donnée par la formule :

   $$\forall x \in [0,1] : \quad u(x) = \int_0^1 G(x,s) f(s) ds,$$

   où G s'appelle la fonction de Green du problème qui définie par :

   $$G(x,s) = \begin{cases} s(1-x) \text{ si } & 0 \leq s \leq x, \\ x(1-s) \text{ si } & x \leq s \leq 1. \end{cases}$$

2. Ecrire le shéma des différences finies.

3. Montrer que le système algébrique admet une solution unique.

Université Mohamed Boudiaf -M'sila-

Faculté de mathématiques et de l'informatique **Département de mathématiques**

$3^{\text{ème}}$ année licence
2019/2020

Module: Méthode numérique
Série d'exercices N°2: Différences finies pour EDOs

NB: Les exercices suivis par une étoile seront traités par l'étudiant.

Exercice 1.
Considérons le problème mixtes Dirichlet-Neumann

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), \quad 0 < x < L, \\ u(0) = 2, \ u'(L) = 3. \end{cases} \tag{1}$$

1. Écrire deux schémas des différences finies pour $h = \frac{L}{n}$ et $x_i = ih$, $i = 0, 1, ..., n$. (En utilisant l'approximation à gauche et l'approximation centré pour l'approche de $u'(L)$)
2. Ecrire les deux schémas sous forme matricielle.
3. Montrer que les deux systèmes admettent une solution unique.

Exercice 2.
On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in]0, 1[, \\ u(0) = \alpha, \ u(1) = \beta. \end{cases} \tag{2}$$

Les fonctions f, p et q sont continues et données sur $[0, 1]$. De plus, on suppose que $q(x) > 0, \ \forall x \in [0, 1]$.

1. Écrire le schéma des différences finies pour $h = \frac{1}{n+1}$ et $x_i = ih$, $i = 0, 1, ..., n + 1$. (On utilise la notation indicielle pour les fonctions f, p et q)
2. Ecrire le problème discret sous forme matricielle.
3. On suppose que $h < \dfrac{2}{L}$ où $L = \sup\limits_{x \in [0,1]} |p(x)|$.
   Montrer que le système admet une solution unique.

Exercice 3. (Examen 2019)
On considère le problème suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + \dfrac{1}{1+x} u'(x) = \cos(\pi x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

1. Ecrire le schéma des différences finies pour $x_i = ih$ où $h = \frac{1}{n+1}$.
   (**Indication :** Utiliser le schéma centré pour la discrétisation de terme $u'(x)$).

2. Ecrire le système matriciel correspond à ce schéma.

3. *Application :* Calculer la solution approchée pour $n = 2$.

Exercice 4. (*)
Soit le problème suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + xu(x) = f(x), \quad x \in]0,1[, \\ u(0) + u'(0) = 1, \; u(1) = 1. \end{cases} \tag{3}$$

1. Écrire le schéma des différences finies pour $h = \frac{1}{4}$. (Pour approcher $u'(0)$ en utilisant approximation à droite)

2. Montrer que le système matriciel admet une unique solution, puis calculer cette solution.

Exercice 5. (*) (Examen de rattrapage 2019)
On considère le problème suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + 2u(x) = x, \quad 0 < x < 1, \\ u'(1) + u(1) = 0, \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

1. Ecrire le schéma des différences finies pour $x_i = ih$ où $h = \frac{1}{n+1}$.
(**Indication :** Utiliser le schéma décentré à droite pour la discrétisation de terme $u'(1)$).

2. Ecrire le système matriciel correspond à ce schéma.

3. Montrer que le système matriciel admet une unique solution.

4. *Application :* Calculer la solution approchée pour $n = 2$.

Université Mohamed Boudiaf -M'sila-

Faculté de mathématiques et de l'informatique **$3^{\text{ème}}$ année licence**
Département de mathématiques **2019/2020**

Module: Méthode numérique
Série d'exercices N°3: Différences finies pour EDPs

Exercice 1.

On définit le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} u_t + u_x - u_{xx} = 0,\ 0 < x < 1,\ 0 < t < 1, \\ u(x,0) = x,\ 0 \leq x \leq 1, \\ u(0,t) = u_x(1,t) = 0,\ 0 < t < 1, \end{cases} \tag{1}$$

où $u = u(x,t)$.

1. Ecrire le schéma explicite et implicite pour : $x_i = ih$, $t_j = jk$ où $h = \frac{1}{n+1}$ et $k = \frac{1}{m+1}$. (**Indication :** Utiliser le schéma décentré à gauche pour la discrétisation de u_x).
2. Ecrire le système matriciel pour les deux schémas.
3. Calculer la solution approchée pour les deux schémas en prenant trois points intérieurs en espace et $k = \frac{1}{2}$.

Exercice 2. (Examen 2019)

On définit le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - u_x = 1,\ 0 < x < 1\ t > 0, \\ u(x,0) = \cos(\pi x),\ 0 \leq x \leq 1, \\ u(0,t) = 1, u(1,t) = -1,\ t \geq 0, \end{cases} \tag{2}$$

où $u = u(x,t)$.

1. Ecrire les schémas implicite et Crank-Nicolson pour : $x_i = ih$, $t_j = jk$ où $h = k = \frac{1}{n+1}$.
2. Ecrire le système matriciel pour le schéma de Crank-Nicolson.
3. Calculer la solution approchée pour les deux schémas en $t_1 = \frac{1}{3}$.

(**Indication :** Utiliser le schéma centré pour la discrétisation de u_x).

Exercice 3.

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2,\quad x \in]0,1[,\ t \in]0, \frac{1}{2}[, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0,\quad t \in [0, \frac{1}{2}], \\ u(x,0) = \sin(\pi x) + x(1-x),\ x \in [0,1]. \end{cases} \tag{3}$$

Où $u = u(x,t)$.

1. Montrer que la solution exacte est donnée par $u(x,t) = e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x) + x(1-x)$.
2. Ecrire le shéma explicite, implicite et Crank-Nicolson pour : $x_i = ih$, $t_j = jk$ où $h = \frac{1}{n+1}$ et $k = \frac{1}{m+1}$.
3. Ecrire le système matriciel pour les trois schémas où $h = \frac{1}{5}$ et $k = \frac{1}{100}$.
4. Comparer la solution approchée pour les trois schémas avec la solution exacte et $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq t \leq 0.03$.

Exercice 4. (Examen 2019)

Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$, on définit le problème de Laplace avec des conditions de Dirichlet non homogènes suivant

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x,y) \in]0,1[\times]0,1[, \\ u(x,0) = 2x,\ u(x,1) = 2x-1, & \forall x \in [0,1], \\ u(0,y) = -y,\ u(1,y) = 2-y; & \forall y \in [0,1], \end{cases} \tag{4}$$

où $u = u(x,y)$.

1. Représenter graphiquement les conditions de Dirichlet de ce problème sur le bord du domaine Ω.
2. Déterminer a et b telle que $u(x,y) = ax + by$ est une solution exacte du problème (4).
3. Fixons $n = 3$ et $m = 1$, pour $x_i = ih$, $y_j = jk$ où $h = \frac{1}{n+1}$ et $k = \frac{1}{m+1}$.
   - Tracer le maillage de Ω, puis calculer la solution approchée.
   - Comparer la solution approchée avec la solution exacte.

Université Mohamed Boudiaf -M'sila-

Faculté de mathématiques et de l'informatique **2019/2020**
Département de mathématiques $3^{\text{ème}}$ **année licence**
Méthode numérique pour EDOs-EDPs

Corrigé du série n°2

Exercice 2
Soit le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x), & x \in]0,1[, \\ u(0) = \alpha, \ u(1) = \beta. \end{cases} \tag{1}$$

Où f, p et q sont des fonctions continues et données sur $[0,1]$. De plus, on suppose que $q(x) > 0, \ \forall x \in [0,1]$.

1. En utilisant le schéma aux différences finies centré pour approximer $u'(x)$. On obtient le système matriciel sous la forme suivante

$$\begin{pmatrix} 2+h^2q_1 & -1+\frac{h}{2}p_1 & \cdots & 0 \\ -1-\frac{h}{2}p_2 & 2+h^2q_2 & -1+\frac{h}{2}p_2 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1-\frac{h}{2}p_n & 2+h^2q_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2f_1 + (1+\frac{h}{2}p_1)\alpha \\ h^2f_2 \\ \vdots \\ h^2f_n + (1-\frac{h}{2}p_n)\beta \end{pmatrix}$$

$$AU = F. \tag{2}$$

2. <u>**Montrons que le système admet une unique solution :**</u>
Pour $i = 1$, on a

$$\begin{aligned} \mid -1 + \frac{h}{2}p_1 \mid & \leq 1 + \frac{h}{2} \mid p_1 \mid \\ & \leq 1 + \frac{h}{2} \sup_{x\in[0,1]} \mid p_i(x) \mid = 1 + \frac{h}{2}L \\ & < 1 + \frac{1}{2}\frac{2}{L}L = 2. \end{aligned}$$

Et d'autre part on a $2 + h^2q_1 > 2$, alors en déduit que

$$\mid 2 + h^2q_1 \mid > \mid -1 + \frac{h}{2}p_1 \mid .$$

De même manière on montre que pour $i = n$ l'inégalité suivante

$$\mid 2 + h^2q_n \mid > \mid -1 - \frac{h}{2}p_n \mid .$$

Pour $2 \leq i \leq n-1$ on doit montrer que $\mid 2 + h^2q_i \mid > \sum_{i=2}^{n-1} \mid -1 - \frac{h}{2}p_i \mid + \mid -1 + \frac{h}{2}p_i \mid$.

• Si $-1 - \frac{h}{2}p_i > 0$ et $-1 + \frac{h}{2}p_i > 0$, alors $-1 - \frac{h}{2}p_i - 1 + \frac{h}{2}p_i = -2$ contradiction (car la valeur absolue est positive).

• Si $-1-\frac{h}{2}p_i < 0$ et $-1+\frac{h}{2}p_i < 0$, alors $1+\frac{h}{2}p_i+1-\frac{h}{2}p_i = 2$.

$$|2+h^2 q_i| > | -1-\frac{h}{2}p_i \mid + \mid -1+\frac{h}{2}p_i |, \quad \text{pour } i = 2, \cdots, n-1. \tag{3}$$

• Si $-1-\frac{h}{2}p_i > 0$ et $-1+\frac{h}{2}p_i < 0$, alors

$$\begin{aligned} -1-\frac{h}{2}p_i+1-\frac{h}{2}p_i &= -hp_i, \text{ où } p_i < 0 \\ &= h \mid -p_i \mid \\ &\leq h \sup_{x\in[0,1]} |p_i(x)| = h\,L \\ &< \frac{2}{L}\,L = 2. \end{aligned}$$

D'où l'inégalité (3) est satisfaite.
• Si $-1-\frac{h}{2}p_i < 0$ et $-1+\frac{h}{2}p_i > 0$, alors

$$\begin{aligned} 1+\frac{h}{2}p_i-1+\frac{h}{2}p_i &= hp_i \\ &\leq h \sup_{x\in[0,1]} |p_i(x)| = h\,L \\ &< \frac{2}{L}\,L = 2. \end{aligned}$$

Alors l'inégalité (3) est vérifiée.
En on déduire que la matrice A est à diagonale dominante stricte, alors elle est inversible.
D'où le système (2) admet une unique solution.

Exercice 3. (Examen 2019)
Soit le problème suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + \dfrac{1}{1+x}u'(x) = \cos(\pi x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

On a $h = \dfrac{1}{n+1}$ et $x_i = i\,h$; $i = 0, 1, \cdots, n+1$.

1. Schéma aux différences finies:

On sait que $u''(x_i) \simeq \dfrac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{h^2}$ et $u'(x_i) \simeq \dfrac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}$.
Alors

$$\begin{cases} -\dfrac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{h^2} + \dfrac{1}{1+ih}\,\dfrac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h} = \cos(\pi i h), \ 1 \leq i \leq n, \\ u_0 = u_{n+1} = 0. \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -\left(1+\dfrac{h}{2(1+ih)}\right)u_{i-1} + 2u_i + \left(\dfrac{h}{2(1+ih)}-1\right)u_{i+1} = h^2\,\cos(\pi i h), \\ u_0 = u_{n+1} = 0. \end{cases}$$

2. Le système matriciel est:

pour $i = 1 \longrightarrow -\left(1 + \dfrac{h}{2(1+h)}\right) \cancelto{0}{u_0} + 2u_1 + \left(\dfrac{h}{2(1+h)} - 1\right) u_2 = h^2 \cos(\pi h),$
pour $i = 2 \longrightarrow -\left(1 + \dfrac{h}{2(1+2h)}\right) u_1 + 2u_2 + \left(\dfrac{h}{2(1+2h)} - 1\right) u_3 = h^2 \cos(2\pi h),$
.
.
.
pour $i = n \longrightarrow -\left(1 + \dfrac{h}{2(1+nh)}\right) u_{n-1} + 2u_n + \left(\dfrac{h}{2(1+nh)} - 1\right) \cancelto{0}{u_{n+1}} = h^2 \cos(n\pi h).$
D'où la forme matricielle est donnée par

$$\begin{pmatrix} 2 & \dfrac{h}{2(1+h)} - 1 & \cdots & 0 \\ -\left(1 + \dfrac{h}{2(1+2h)}\right) & 2 & \dfrac{h}{2(1+2h)} - 1 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\left(1 + \dfrac{h}{2(1+(n-1)h)}\right) & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} \cos(\pi h) \\ \cos(2\pi h) \\ \vdots \\ \cos(n\pi h) \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow AU = F,$$

où $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

3. Application $n = 2$:

On a $h = \dfrac{1}{3}$ et $x_i = ih = \dfrac{i}{3}$, $i = 1, 2.$

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{-7}{8} \\ \frac{-11}{10} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 2u_1 - \dfrac{7}{8}u_2 = \dfrac{1}{18} \\ \dfrac{-11}{10}u_1 + 2u_2 = -\dfrac{1}{18} \end{cases}$$

Donc la solution approchée de notre système dans le cas $n = 2$ est

$$(u_1, u_2)^t = \left(\frac{5}{243}, \frac{-4}{243}\right)^t.$$

Exercice 4.
Soit le problème suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + xu(x) = 0, \ \ x \in]0, 1[, \\ u(0) + u'(0) = 1, \ u(1) = 1. \end{cases} \tag{4}$$

1. **Schéma aux différences finies pour $h = \dfrac{1}{4}$:**

Comme $h = \dfrac{1}{4}$, alors $n = 3$. On a $u''(x_i) \simeq \dfrac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}$ et $u'(x_i) \simeq \dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$.
Alors

$$\begin{cases} -16\,(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + \dfrac{1}{4} i\, u_i = 0, \ 1 \leq i \leq 3, \\ u_0 + 4u_1 - 4u_0 = 1, \ u_4 = 1. \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -64u_{i-1} + (128 + i)\, u_i - 64u_{i+1} = 0, \\ u_0 = \dfrac{4u_1 - 1}{3}, \ u_4 = 1. \end{cases}$$

2. **Montrons que le système matriciel admet une unique solution :**

On écrit le problème discret sous forme matricielle comme suit
pour $i = 1 \longrightarrow -64u_0 + 129u_1 - 64u_2 = 0$,
pour $i = 1 \longrightarrow -64u_1 + 130u_2 - 64u_3 = 0$,
pour $i = 1 \longrightarrow -64u_2 + 131u_3 - 64u_4 = 0$.
Donc
pour $i = 1 \longrightarrow \dfrac{131}{3}u_1 - 64u_2 = \dfrac{-64}{3}$,
pour $i = 1 \longrightarrow -64u_1 + 130u_2 - 64u_3 = 0$,
pour $i = 1 \longrightarrow -64u_2 + 131u_3 = 64$.
D'où le système matriciel est

$$\begin{pmatrix} \frac{131}{3} & -64 & 0 \\ -64 & 130 & -64 \\ 0 & -64 & 131 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-64}{3} \\ 0 \\ 64 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{131}{192} & -1 & 0 \\ -1 & \frac{130}{64} & -1 \\ 0 & -1 & \frac{131}{64} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow AU = F.$$

Comme la matrice A est tridiagonale symétrique à diagonale dominante stricte, alors elle est inversible.
D'où le système admet une unique solution.

3. **Déterminons la solution approchée :**

Il y a plusieurs méthodes pour résoudre un système linéaire $AU = F$(i.e calculer la solution approchée u) par exemple méthode de Cramer, Gauss, Gauss-Seidel, l'inverse d'une matrice, ...etc.

Exercice 5. (*) (Examen de rattrapage 2019)
On considère le problème suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + 2u(x) = x, \quad 0 < x < 1, \\ u'(1) + u(1) = 0, \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

1. **Schéma de différences finies :**

Le schéma aux différences finies correspondant ce problème est

$$\begin{cases} -u_{i-1} + 2\left(h^2 + 1\right) u_i - u_{i+1} = ih^3, \; i = 1, \cdots, n, \\ u_0 = 1, \; u_{n+1} = \dfrac{1}{1+h}\, u_n. \end{cases}$$

2. **Système matriciel**
On a
pour $i = 1 \longrightarrow -u_0 + 2(h^2+1)u_1 - u_2 = h^3 \Longrightarrow 2(h^2+1)u_1 - u_2 = h^3 + 1$,
pour $i = 1 \longrightarrow -u_0 + 2(h^2+1)u_1 - u_2 = h^3 \Longrightarrow 2(h^2+1)u_1 - u_2 = h^3 + 1$,
.
.
.
$i = n \longrightarrow -u_{n-1} + 2(h^2+1)u_n - u_{n+1} = nh^3 \Longrightarrow -u_{n-1} + \left(2(h^2+1) - \dfrac{1}{h+1}\right) u_n = nh^3.$

Donc la forme matricielle est donnée par

$$\begin{pmatrix} 2(h^2+1) & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 2(h^2+1) & -1 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & -1 & 2(h^2+1) - \dfrac{1}{h+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} h^3+1 \\ 2h^3 \\ \vdots \\ nh^3 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow AU = F.$$

3. **Montrons que le système admet une unique solution :**

   Comme A est une matrice tridiagonale symétrique à diagonale dominante stricte, alors elle est inversible.
   D'où le système admet une unique solution.

4. **Application $n = 2$:**

   On a $n = 2$, alors $h = \dfrac{1}{3}$.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{20}{9} & -1 \\ -1 & \dfrac{53}{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{28}{27} \\ \dfrac{2}{27} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} u_1 \simeq 0.7, \\ u_2 \simeq 0.53. \end{cases}$$

N'hésitez pas à me contacter pour me faire part de vos questions et vos remarques : nasreddine.amroune@univ-msila.dz

Université Mohamed Boudiaf -M'sila-

Faculté de mathématiques et de l'informatique **2019/2020**
Département de mathématiques **$3^{\text{ème}}$ année licence**
Méthode numérique pour EDOs-EDPs

Corrigé du série n°3

Exercice 1

Soit le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} u_t + u_x - u_{xx} = 0,\ 0 < x < 1,\ 0 < t < 1, \\ u(x,0) = x,\ 0 \leq x \leq 1, \\ u(0,t) = u_x(1,t) = 0,\ 0 < t < 1, \end{cases} \tag{1}$$

où $u = u(x,t)$.

1. on a $x_i = ih$ et $t_j = jk$ où $h = \dfrac{1}{n+1}$ et $k = \dfrac{1}{m+1}$.
   • **Schéma explicite :**
   On remplace u_t, u_x et u_{xx} par leurs approximations
   $$u_t \simeq \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k},\ u_x \simeq \frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{k} \text{ et } u_{xx} \simeq \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2}.$$
   Alors on obtient le schéma aux différences finies pour le problème (1) comme suit
   $$\begin{cases} u_i^{j+1} = \frac{k(h+1)}{h^2}\, u_{i-1}^j + \frac{h^2-kh-2k}{h^2}\, u_i^j + \frac{k}{h^2}\, u_{i+1}^j,\ \ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m, \\ u_i^0 = ih,\ 0 \leq i \leq n+1, \\ u_0^j = 0,\ u_{n+1}^j = u_n^j,\ 0 \leq j \leq m+1. \end{cases} \tag{2}$$
   • **Schéma implicite :**
   De même manière on trouve le schéma implicite pour le problème (1) sous la forme suivante
   $$\begin{cases} u_i^{j-1} = -\frac{k(h+1)}{h^2}\, u_{i-1}^j + \frac{h^2+kh+2k}{h^2}\, u_i^j - \frac{k}{h^2}\, u_{i+1}^j,\ \ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m, \\ u_i^0 = ih,\ 0 \leq i \leq n+1, \\ u_0^j = 0,\ u_{n+1}^j = u_n^j,\ 0 \leq j \leq m+1. \end{cases} \tag{3}$$

2. Dans cette question en injectant les valeurs de i et j dans les deux problèmes discrets (2) et (3) pour l'obtention des systèmes matriciels.
   • **Schéma explicite :**
   On fixe $j = 0$ et en substitue les valeurs de i, on obtient
   pour $i = 1 \longrightarrow u_1^1 = \frac{k(h+1)}{h^2}\, \cancelto{0}{u_0^0} + \frac{h^2-kh-2k}{h^2}\, u_1^0 + \frac{k}{h^2}\, u_2^0,$
   pour $i = 2 \longrightarrow u_2^1 = \frac{k(h+1)}{h^2}\, u_1^0 + \frac{h^2-kh-2k}{h^2}\, u_2^0 + \frac{k}{h^2}\, u_3^0,$
   .
   .
   .
   pour $i = n \longrightarrow u_n^1 = \frac{k(h+1)}{h^2}\, u_{n-1}^0 + \frac{h^2-kh-2k}{h^2}\, u_n^0 + \frac{k}{h^2}\, \cancelto{u_n^0}{u_{n+1}^0}.$

D'où le système matriciel correspondant le problème discret (2) est donné par

$$\begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ \vdots \\ u_n^1 \end{pmatrix} = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} h^2-kh-2k & k & \cdots & 0 \\ k(h+1) & h^2-kh-2k & k & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & k(h+1) & h^2-kh-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ \vdots \\ u_n^0 \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow \quad W^{(1)} = AW^{(0)},$$

où

$$A = \begin{pmatrix} h^2-kh-2k & k & \cdots & 0 \\ k(h+1) & h^2-kh-2k & k & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & k(h+1) & h^2-kh-k \end{pmatrix},$$

$$W^{(0)} = \left(u_1^0, u_2^0, \cdots, u_n^0\right)^t \text{ et } W^{(1)} = \left(u_1^1, u_2^1, \cdots, u_n^1\right)^t.$$

On peut montrer par récurrence que pour tout $0 \leq j \leq m+1$

$$W^{(j+1)} = AW^{(j)}, \text{ où } W^{(j)} = \left(u_1^j, u_2^j, \cdots, u_n^j\right)^t.$$

• **Schéma implicite :**

On fixe $j=1$ et en substitue les valeurs de i, on obtient

pour $i=1 \longrightarrow u_1^0 = -\frac{k(h+1)}{h^2}\cancelto{0}{u_0^1} + \frac{h^2+kh+2k}{h^2}u_1^1 - \frac{k}{h^2}u_2^1,$

pour $i=2 \longrightarrow u_2^0 = -\frac{k(h+1)}{h^2}u_1^1 + \frac{h^2+kh+2k}{h^2}u_2^1 - \frac{k}{h^2}u_3^1,$

.

.

.

pour $i=n \longrightarrow u_n^0 = -\frac{k(h+1)}{h^2}u_{n-1}^1 + \frac{h^2+kh+2k}{h^2}u_n^1 - \frac{k}{h^2}\cancelto{u_n^0}{u_{n+1}^1}.$

D'où le système matriciel s'écrit comme suit

$$\begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ \vdots \\ u_n^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} h^2+kh+2k & -k & \cdots & 0 \\ -k(h+1) & h^2+kh+2k & -k & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -k(h+1) & h^2+kh+k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ \vdots \\ u_n^1 \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow \quad W^{(0)} = AW^{(1)},$$

où

$$A = \begin{pmatrix} h^2+kh+2k & -k & \cdots & 0 \\ -k(h+1) & h^2+kh+2k & -k & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -k(h+1) & h^2+kh+k \end{pmatrix},$$

$$W^{(0)} = \left(u_1^0, u_2^0, \cdots, u_n^0\right)^t \text{ et } W^{(1)} = \left(u_1^1, u_2^1, \cdots, u_n^1\right)^t.$$

On peut montrer par récurrence que pour tout $0 \leq j \leq m+1$

$$W^{(j)} = AW^{(j+1)}, \text{ où } W^{(j)} = \left(u_1^j, u_2^j, \cdots, u_n^j\right)^t.$$

3. Il y a plusieurs méthodes pour calculer la solution approchée dans le cas où $h = \dfrac{1}{4}$ et $k = \dfrac{1}{2}$ (i.e $n = 3$ et $m = 1$).

   • **Schéma explicite :**

   On utilise un calcul direct pour déterminer la solution approchée $W^{(1)}$, en effet

$$W^{(1)} = \begin{pmatrix} -17 & 8 & 0 \\ 10 & -17 & 8 \\ 0 & 10 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} \\ 0 \\ \frac{-7}{4} \end{pmatrix}.$$

   • **Schéma implicite :**

   Le système matriciel est devient

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -8 & 0 \\ -10 & 19 & -8 \\ 0 & -10 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \end{pmatrix}.$$

   Donc la solution approchée $W^{(1)}$ est calculer depuis l'inverse de la matrice ou la résolution du système linéaire ou d'autre méthode comme Cramer, Gauss ...etc.

$$W^{(1)} = \left(\frac{497}{6284}, \frac{246}{1571}, \frac{1323}{6284} \right)^t.$$

Exercice 2. (Examen 2019)

Soit le problème suivant

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - u_x = 1, \ 0 < x < 1 \ t > 0, \\ u(x,0) = \cos(\pi x), \ 0 \leq x \leq 1, \\ u(0,t) = 1, u(1,t) = -1, \ t \geq 0, \end{cases} \tag{4}$$

où $u = u(x,t)$.

1. Les schémas pour $h = k = \frac{1}{n+1}$.

   • Schéma implicite : On a

$$u_t \simeq \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{h}, \ u_x \simeq \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h} \text{ et } u_{xx} \simeq \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2}.$$

   Alors

$$\frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{h} - \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} - \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h} = 1.$$

   D'où le schéma implicite du problème (4) est donné par

$$\begin{cases} \left(\frac{h}{2} - 1\right) u_{i-1}^j + (2+h)\, u_i^j - \left(\frac{h}{2} + 1\right) u_{i+1}^j = h\, u_i^{j-1} + h^2, \ \ 1 \leq i \leq n, \ j = 1, 2, \cdots, \\ u_i^0 = \cos(\pi i h), \ 0 \leq i \leq n+1, \\ u_0^j = 1, \ u_{n+1}^j = -1, \ j \geq 0. \end{cases} \tag{5}$$

   • Schéma de Crank-Nicolson :

   On écrit le schéma de Crank-Nicolson pour ce problème par

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{h}-\frac{1}{2}\left[\frac{u_{i-1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i+1}^{j+1}}{h^2}+\frac{u_{i-1}^{j}-2u_i^{j}+u_{i+1}^{j}}{h^2}\right]-\frac{u_{i+1}^j-u_{i-1}^j}{2h}=1.$$

Alors

$$\begin{cases}-u_{i-1}^{j+1}+2(h+1)\,u_i^{j+1}-u_{i+1}^{j+1}=(1-h)\,u_{i-1}^j+2(h-1)\,u_i^j+(h+1)u_{i+1}^j+2h^2, & 1\leq i\leq n,\ j\geq 0,\\ u_i^0=\cos(\pi i h),\ 0\leq i\leq n+1, & \\ u_0^j=1,\ u_{n+1}^j=-1,\ j\geq 0. & \end{cases} \tag{6}$$

2. **Le système matriciel pour le schéma de Crank-Nicolson :**

pour $i=1\longrightarrow -\cancelto{-1}{u_0^{j+1}}+2(h+1)\,u_1^{j+1}-u_2^{j+1}=(1-h)\,\cancelto{-1}{u_0^j}+2(h-1)\,u_1^j+(h+1)u_2^j+2h^2,$
pour $i=2\longrightarrow -u_1^{j+1}+2(h+1)\,u_2^{j+1}-u_3^{j+1}=(1-h)\,u_1^j+2(h-1)\,u_2^j+(h+1)u_3^j+2h^2,$

.

.

.

pour $i=n\longrightarrow -u_{n-1}^{j+1}+2(h+1)\,u_n^{j+1}-\cancelto{-1}{u_{n+1}^{j+1}}=(1-h)\,u_{n-1}^j+2(h-1)\,u_n^j+(h+1)\cancelto{-1}{u_{n+1}^j}+2h^2.$
Donc le système matriciel est donné par

$$\begin{pmatrix}2(h+1) & -1 & \cdots & 0\\ -1 & 2(h+1) & -1 & \cdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & -1 & 2(h+1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1^{j+1}\\ u_2^{j+1}\\ \vdots\\ u_n^{j+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(h-1) & 1+h & \cdots & 0\\ 1-h & 2(h-1) & 1+h & \cdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1-h & 2(h-1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1^j\\ u_2^j\\ \vdots\\ u_n^j\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2h^2-\\ h^2\\ \vdots\\ 2h^2-\end{pmatrix}$$

ou encore on écrit sous la forme $CW^{(j+1)}=DW^{(j)}+H$, où

$$C=\begin{pmatrix}2(h+1) & -1 & \cdots & 0\\ -1 & 2(h+1) & -1 & \cdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & -1 & 2(h+1)\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}2(h-1) & 1+h & \cdots & 0\\ 1-h & 2(h-1) & 1+h & \cdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1-h & 2(h-1)\end{pmatrix},$$

$W^{(j)}=\left(u_1^j,u_2^j,\cdots,u_n^j\right)^t$ et $H=(2h^2-h+2,h^2,\cdots,2h^2-h-2)^t$.

3. **Calculons la solution approchée en $t_1=\frac{1}{3}$:**

On a $t_1=k=h=\dfrac{1}{n+1}\quad\Longrightarrow\quad n=2.$

• Schéma implicite :

On fixe $j=1$ et on varié sur les valeurs de i

pour $i=1\longrightarrow (\dfrac{h}{2}-1)u_0^1+(h+2)\,u_1^1-(\dfrac{h}{2}+1)u_2^1=h^2+hu_1^0,$

pour $i=2\longrightarrow (\dfrac{h}{2}-1)u_1^1+(h+2)\,u_2^1-(\dfrac{h}{2}+1)u_3^1=h^2+hu_2^0.$

De la condition initiale on sait que $u_1^0=\cos(\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{1}{2}$, $u_2^0=\cos(\dfrac{2\pi}{3})=-\dfrac{1}{2}$ et des conditions aux limites de type Dirichlet non homogène on a $u_0^1=1,\ u_3^1=-1.$
Alors le système matriciel devient

$$\begin{cases}\dfrac{7}{3}\,u_1^1-\dfrac{7}{6}\,u_2^1=\dfrac{10}{9},\\ -\dfrac{5}{6}\,u_1^1-\dfrac{7}{3}\,u_2^1=\dfrac{-11}{9},\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}u_1^1=\dfrac{6}{23}\simeq 0.26,\\ u_2^1=\dfrac{-208}{483}\simeq -0.43.\end{cases}$$

D'où la solution approchée par le schéma implicite est $W^{(1)}=(0.26,\ -0.43)^t.$

• Schéma Crank-Nicolson :
En injectant la valeur de h et les valeurs de la condition initiale u_1^0 et u_2^0 dans le système matriciel correspondant ce schéma, on obtient

$$\begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -1 \\ -1 & \frac{8}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{17}{9} \\ \frac{-19}{9} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} u_1^1 = \frac{2}{33} \simeq 0.06, \\ u_2^1 = -\frac{13}{33} \simeq -0.4. \end{cases}$$

D'où la solution approchée par le schéma de Crank-Nicolson est donnée par

$$W^{(1)} = (0.06,\ -0.4)^t\,.$$

Exercice 3.

Soit le problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad x \in]0,1[,\ t \in]0, \frac{1}{2}[, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \in [0, \frac{1}{2}], \\ u(x,0) = \sin(\pi x) + x(1-x),\ x \in [0,1]. \end{cases} \tag{7}$$

Où $u = u(x,t)$.

1. **Montrons la solution exacte :**
   On doit montrer que $u(x,t) = e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x) + x(1-x)$ est une solution exacte, il suffit que u est vérifiée le problème (7).
   On a
   $$\frac{\partial\, u}{\partial\, x}(x,t) = \pi e^{-\pi^2 t}\, \cos(\pi\, x) + 1 - 2x,$$
   alors
   $$\frac{\partial^2\, u}{\partial\, x^2}(x,t) = -\pi^2 e^{-\pi^2 t}\, \sin(\pi\, x) - 2.$$
   Et on a aussi
   $$\frac{\partial\, u}{\partial\, t}(x,t) = -\pi^2 e^{-\pi^2 t}\, \sin(\pi\, x).$$
   En injectant ses valeurs de dérivées partielles dans l'équation du problème (7), on déduit que u vérifiée l'équation aux dérivées partielles
   $$-\pi^2 e^{-\pi^2 t}\, \sin(\pi\, x) + \pi^2 e^{-\pi^2 t}\, \sin(\pi\, x) + 2 = 2.$$
   Maintenant, elle reste a vérifiée la condition initiale et les conditions aux limites. Il est clair que $u(0,t) = u(1,t) = 0$ et avec un calcul simple on trouve $u(x,0) = \sin(\pi x) + x(1-x)$. D'où u est une solution exacte de notre problème.

2. **Les schémas pour le problème** (7)**:**

   • Schéma explicite :
   On écrit le schéma d'Euler explicite correspondant le problème (7) comme suit

$$\begin{cases} u_i^{j+1} = \frac{k}{h^2}\, u_{i-1}^j + \left(1 - \frac{2k}{h^2}\right)\, u_i^j + \frac{k}{h^2}\, u_{i+1}^j + 2k, \quad 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m, \\ u_i^0 = \sin(\pi\, i\, h) + i\, h(1 - i\, h),\ 0 \le i \le n+1, \\ u_0^j = u_{n+1}^j = 0,\ 0 \le j \le m+1. \end{cases} \tag{8}$$

- Schéma implicite :
On donne le schéma aux différences finies implicite correspondant le problème (7) sous la forme suivante

$$\begin{cases} -\frac{k}{h^2}\, u_{i-1}^j + \left(1+\frac{2k}{h^2}\right) u_i^j - \frac{k}{h^2}\, u_{i+1}^j = u_i^{j-1} + 2k, \;\; 1 \le i \le n, \; 1 \le j \le m, \\ u_i^0 = \sin(\pi\, i\, h) + i\, h(1 - i\, h), \; 0 \le i \le n+1, \\ u_0^j = u_{n+1}^j = 0, \; 0 \le j \le m+1. \end{cases} \tag{9}$$

- Schéma Crank-Nicolson :
Le schéma de Crank-Nicolson est donné par

$$\begin{cases} -u_{i-1}^{j+1} + 2\left(1+\frac{h^2}{k}\right) u_i^{j+1} - u_{i+1}^{j+1} = u_{i-1}^j + 2\left(\frac{h^2}{k} - 1\right) u_i^j + u_{i+1}^{j+1} + 4h^2, \;\; 1 \le i \le n, \; 1 \le j \le m \\ u_i^0 = \sin(\pi\, i\, h) + i\, h(1 - i\, h), \; 0 \le i \le n+1, \\ u_0^j = u_{n+1}^j = 0, \; 0 \le j \le m+1. \end{cases} \tag{10}$$

3. **Le système matriciel pour les trois schémas:**

   -

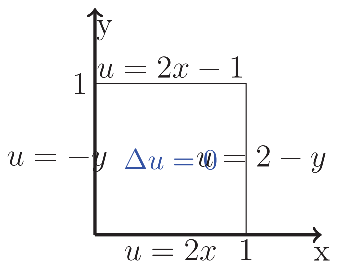
Exercice 4. (Examen 2019)

Soit le problème stationnaire suivant

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \;\; (x,y) \in]0,1[\times]0,1[, \\ u(x,0) = 2x, \; u(x,1) = 2x - 1, \;\; \forall x \in [0,1], \\ u(0,y) = -y, \; u(1,y) = 2 - y; \; \forall y \in [0,1], \end{cases} \tag{11}$$

où $u = u(x,y)$.

1. **Traçons le domaine Ω :**



Le domaine Ω

2. **Déterminons a et b :**
On sait que $u(x,y) = ax + by$ est une solution exacte, alors

$$\begin{cases} u(x,0) = ax = 2x, \\ u(x,1) = ax + b = 2x - 1, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 2, \\ b = -1. \end{cases}$$

Ou bien

$$\begin{cases} u(0,y) = by = -y, \\ u(1,y) = a + by = 2 - y, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 2, \\ b = -1. \end{cases}$$

D'où la solution exacte du problème stationnaire (11) est $u(x,y) = 2x - 1$.

3. **On fixe $n = 3$ et $m = 1$:**
   - Le maillage :

   On a $h = \frac{1}{4}$ et $k = \frac{1}{2}$, on traçons le maillage comme suit
   - La solution approchée :

   Le schéma de différences finies correspond à ce problème est donné par

$$\begin{cases} -10u_i^j + 4\left(u_{i-1}^j + u_{i+1}^j\right) + u_i^{j-1} + u_i^{j+1} = 0,\ 1 \le i \le 3;\ j = 1, \\ u_i^0 = \frac{i}{2},\ u_i^2 = \frac{i}{2} - 1,\ 0 \le i \le 4, \\ u_0^j = -\frac{j}{2}, u_4^j = 2 - \frac{j}{2},\ 0 \le j \le 2. \end{cases} \tag{12}$$

On fixe $j = 1$ et on a

pour $i = 1 \longrightarrow -10u_1^1 + 4\,(\underbrace{\cancel{u_0^1}}_{-\frac{1}{2}} + u_2^1) + \underbrace{\cancel{u_1^0}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\cancel{u_1^2}}_{-\frac{1}{2}} = 0,$

pour $i = 2 \longrightarrow -10u_2^1 + 4\,(u_1^1 + u_3^1) + \underbrace{\cancel{u_2^0}}_{1} + \underbrace{\cancel{u_2^2}}_{0} = 0,$

pour $i = 3 \longrightarrow -10u_3^1 + 4\,(u_2^1 + \underbrace{\cancel{u_4^1}}_{\frac{3}{2}}) + \underbrace{\cancel{u_3^0}}_{\frac{3}{2}} + \underbrace{\cancel{u_3^2}}_{\frac{1}{2}} = 0.$

Donc

$$\begin{cases} -10u_1^1 + 4u_2^1 = 2, \\ -10u_2^1 + 4u_1^1 + 4u_3^1 = -1, \\ -10u_3^1 + 4u_2^1 = -8. \end{cases}$$

la résolution du système linéaire ou dessus donne la solution approchée du problème (11) qui donnée par

$$\left(u_1^1, u_2^1, u_3^1\right)^t = \left(0, \frac{1}{2}, 1\right)^t.$$

- La comparaison entre les deux solutions :

On a

$$u(x_i, y_j) = 2x_i - y_j = 2ih - jk = \frac{1}{2}\,(i - j)\,.$$

D'où

(x_i, y_1)	(x_1, y_1)	(x_2, y_1)	(x_3, y_1)
solution approchée	0	0.5	1
solution exacte	0	0.5	1

N'hésitez pas à me contacter pour me faire part de vos questions et vos remarques : nasreddine.amroune@univ-msila.dz