Université de M'sila	**Correction d'examen** (Finale)	Faculté : Maths-informatique
1er Année Socle Commun		Année scolaire : 2021/2022
Module Analyse 2		Durée : $1h30m$

Barème	
	Exercice : 1 6pt
	① Soit la fonction $f(x)=\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1-x}$.
1.5	ⓐ Alors, le développement de $\sqrt[3]{1+x}$ au $V(0)$ à l'ordre **2** est :
	$\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+o(x^2)$.
1.5	ⓑ Le développement de $\sqrt{1-x}$ au $V(0)$ à l'ordre **2** est :
	$\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$.
	② Donc, en on déduit
1.5	$f(x)=\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1-x}=(1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+o(x^2))-(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2))$
0.5	$=\frac{5}{6}x+\frac{1}{72}x^2+o(x^2)$.
1.5 + 0.5	③ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{5}{6}x+\frac{1}{72}x^2+o(x^2)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{5}{6}+\frac{1}{72}x+o(x))=\frac{5}{6}$.

Barème	
	Exercice : 2 7pt
	Soit l'intégrale $I=\int(1-3x)e^{2x}dx$.
	① On intègre I par parties
1	Posons $\begin{cases} u(x)=1-3x \\ v'(x)=e^{2x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x)=-3 \\ v(x)=\frac{1}{2}e^{2x},\end{cases}$ donc, on a :
1	$I=\frac{1}{2}(1-3x)e^{2x}+\frac{3}{2}\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}(1-3x)e^{2x}+\frac{3}{4}e^{2x}+c$
0.5	C'est à dire, $I=\frac{1}{2}(\frac{5}{2}-3x)e^{2x}+c,\ c\in\mathbb{R}$.
	② F est une primitive de f sur $\mathbb{R} \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}: F'(x)=f(x),$ c'est à dire :
1	$\forall x\in\mathbb{R}: [(ax+b)e^{2x}+c]'=(1-3x)e^{2x}\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}: (2ax+a+2b)e^{2x}=(1-3x)e^{2x}$.
	Par comparaison les deux membres, on aura
1	Posons, $\begin{cases} 2a=-3 \\ a+2b=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{-3}{2} \\ b=\frac{1}{2}(1-a)=\frac{5}{4}.\end{cases}$
0.5	Alors, $I=\int f(x)dx=F(x)+c=\frac{1}{2}(\frac{5}{2}-3x)e^{2x}+c,\ c\in\mathbb{R}$.
	③ $J=\int_0^2 \lvert 1-3x\rvert e^{2x}dx$.
	On étudie le signe de $(1-3x)$, car, $\forall x\in\mathbb{R}:\ e^{2x}>0$, donc, on a :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$1-3x$		$+$	0	-	

0.5

0.5 Donc, $J = \int_0^{\frac{1}{3}} (1-3x)e^{2x}dx - \int_{\frac{1}{3}}^{2} (1-3x)e^{2x}dx$

0.5 $= \left[\frac{1}{2}(\frac{5}{2} - 3x)e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{3}} - \left[\frac{1}{2}(\frac{5}{2} - 3x)e^{2x}\right]_{\frac{1}{3}}^{2}.$

0.5 D'où, $J = \frac{7}{4}e^4 + \frac{3}{2}e^{\frac{2}{3}} - \frac{5}{4}.$

Barème **Exercice : 3** 6pt

Soit l'équation différentielle : $y' - y = x^2e^x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1)$

1 On résoudre l'équation homogène : $y' - y = 0.$ Alors, on a

1 $y' - y = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \ln|y| = x + c \Rightarrow |y| = e^{x+c}$

1 $\Rightarrow y = ke^x, \ k = \pm e^c \in \mathbb{R}.$

2 On cherche une solution particulière y_p par la méthode de variation de la constante.

0.5 Posons $y_p = k(x)e^x$, on a donc $y_p' = k'(x)e^x + k(x)e^x.$

1 $y_p' - y_p = x^2e^x \Leftrightarrow k'(x) = x^2 \Leftrightarrow k(x) = \int x^2dx = \frac{1}{3}x^3 + d, \ d \in \mathbb{R}.$

0.5 D'où, $y_p = (\frac{1}{3}x^3 + d)e^x, \ d \in \mathbb{R}.$

0.5 3 La solution générale est : $y_G = y_H + y_p.$ Alors, on a

1 $y_G = ke^x + (\frac{1}{3}x^3 + d)e^x = (\frac{1}{3}x^3 + \lambda)e^x, \ \lambda = k + d \in \mathbb{R}.$

0.5 $y(0) = 2 \Rightarrow \lambda = 2.$ D'où, $y = (\frac{1}{3}x^3 + 2)e^x.$