الجمهوريـة الجزائريـة الديمقراطيـة الشعبيـة

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université Mohamed Boudiaf-M'sila
Faculté des sciences
Département de Physique

جامـــعـــة محمد بوضياف - المسيلة
كلية العلـــــــــــــــــوم
قسم الفيزيـــــــــــــــاء

1985

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Notes de Cours du module

Fonction de La Variable Complexe

(Math 4)

Bounab Sabrina

Deuxième Année Licence Physique

Année Universitaire 2018/2019

Table des matières

CHAPITRE1 : Fonctions Holomorphes

1.1 Le plan Complexe ₵

✓ On peut définir un nombre complexe z par la donnée de deux coordonnées réels:

$$\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{iy} \ \text{où}\ \boldsymbol{i} = \sqrt{-1} \quad , \qquad \boldsymbol{i}^2 = -\mathbf{1} \ avec\ x, y \in \mathbb{R}^2$$

On appelle x la partie réelle de z et on note $x = Re(z)$, tandis que y est la partie imaginaire de z et on note $y = Im(z)$.

✓ Tout nombre complexe possède un conjugue noté $\bar{z}$: $\bar{z} = x - iy$.

Propriétés :

Soit $z\ et\ z'$deux nombres complexes, alors on a :

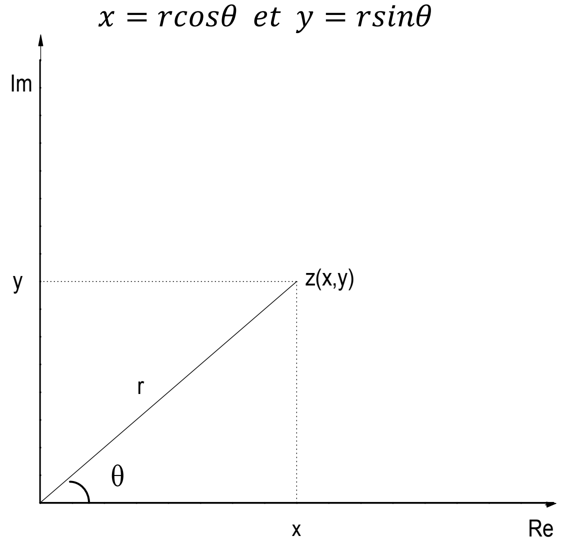
- $z + z' = (x + x') + i(y + y')$
- $z + \bar{z} = 2\, Re(z)$
- $z - \bar{z} = i2\, Im(z)$
- $z.z' = xx' - yy' + i(x'y + xy')$
- $z.\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$
- $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{z'\bar{z}}{z\,\bar{z}} = \dfrac{z'\bar{z}}{|z|^2}$

Forme polaire des nombres complexes

Un nombre complexe peut être aussi représenté dans un plan de type cartésien ou l'axe horizontal mesure la *valeur* de x (l'axe des réels), et l'axe vertical mesure la *valeur* de y (l'axe des imaginaires).

On remarque qu'on peut remplacer le couple (x, y) par le couple (r, θ) d'où :

$$x = rcos\theta \ \ et \ \ y = rsin\theta$$



Avec $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$, et θ est appelé l'argument ou l'amplitude de z.

Donc on peut récrire z sous la forme : $z = r(cos\theta + isin\theta) = re^{i\theta} = |z|e^{iarg\, z}$

Cette dernière représentation est appelée la notation polaire, elle permet de calculer facilement toute puissance, positive, négative ou fractionnelle d'un nombre complexe, ce qui conduit d'écrire les propriétés suivantes :

- $z.z' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
- $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{r'}{r}e^{i(\theta'-\theta)}$
- $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$
- $z^n = r^n e^{in\theta}$

1.2 Fonction d'une variable Complexe

1.2.1 Définition: On appelle fonction d'une variable complexe, une application de $\boldsymbol{C}$ dans $\boldsymbol{C}$

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto f(z)$$

Etant donné qu'on peut écrire le nombre complexe z comme $z = x + iy$, par conséquent on peut écrire aussi la fonction $f(z)$(qui est également un nombre complexe) comme :

$f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$, où $\mathcal{R}ef(z) = P(x,y)$ et $Imf(z) = Q(x,y)$.

On est donc ramené à une application de $\mathfrak{R}^2$ dans $\mathfrak{R}^2$, et ceci en posant $\varphi(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$.

Exemple1 :

La fonction $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy \implies P(x,y) = x^2 - y^2\, et\; Q(x,y) = 2xy$

1.2.2 Limite **:** Soit $f(z)$ une fonction complexe à une variable complexe; on dit que $f(z)$ admet une limite

l en $z_0 = x_0 + iy_0$ si et seulement si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : tel\ que\ |z - z_0| < \eta \implies |f(z) - l| < \varepsilon$$
$$Et\ on\ note\ \lim_{z\to z_0} f(z) = l$$

Posons alors $l = a + ib$ où a et b sont deux réels, alors :

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = l \Leftrightarrow \left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} P(x,y) = a\ \ et\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} Q(x,y) = b\right)$$

On a aussi:

•$\lim_{z\to\infty} f(z) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists A > 0\ tel\ que\ |z| > A \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon$

• $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \eta > 0\ tel\ que\ |z - z_0| < \eta \Rightarrow |f(z)| < A$

• $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \beta > 0 \; tel\; que\; |z| > \beta \Rightarrow |f(z)| < A$

1.2.3 Continuité

On dit que la fonction $f(z)$ est continue en z_0, si elle admet une limite en z_0 et que cette limite vaut $f(z_0)$.

Propriétés :

• si $f(z)\; et\; g(z)$ sont continues en z_0 alors, $f + g, f.g, f \circ g\; et\; \frac{f}{g}\; (g(z_0) \neq 0)$ le sont aussi.

• $f(z)$ continue en $z_0 \Leftrightarrow P(x,y)\; et\; Q(x,y)$sont aussi continues en (x_0, y_0).

1.3 Fonctions Holomorphes

1.3.1 Définition

Soit D une région dans le plan complexe et soit $f(z)$ une fonction de D dans $\mathbb{C}$ On dit que $f(z)$ est holomorphe en z_0 si $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe, et dans ce cas *elle sera notée* $f'(z_0)$.

f est holomorphe en $z_0 \Leftrightarrow f$ est dérivable en z_0.

La fonction est dite holomorphe dans D si elle est dérivable en chaque point z de D.

Propriétés :

- $(f + g)' = f' + g'$
- $(f.g)' = f'.g + f.g'$
- $(f \circ g)' = (f' \circ g).g'$

1.3.2 Conditions de Cauchy-Riemann

La fonction $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ est différentiable dans un domaine D du champ complexe $\mathbb{C}$, si et seulement si, les fonctions $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ sont différentiables en tout point de D, et si leurs dérivées vérifient ***les conditions de Cauchy-Riemann*** :

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{array}} \qquad (1)$$

1.3.3 Théorème : La dérivée $f'(z)$ donc en un point z quelconque est donnée par:

$$\boxed{\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \\ &= \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \end{aligned}}$$

Exemples :

- 1. $f(z) = z^2$

$\forall z \in \mathbb{C}: f(z) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$ d'où: $\begin{cases} P(x,y) = (x^2 - y^2) \\ Q(x,y) = 2xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ et\ aussi \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y = -\frac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$

Donc on a les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées, par conséquent f est dérivable, et

$f'(z) = 2x + 2iy = 2(x + iy) = 2z$

$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C} : f'(z) = 2z$

- 2. $f(z) = \frac{1}{z}$

$\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}: f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$ d'où: $\begin{cases} P(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \\ et \\ Q(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ et\ aussi \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$

Donc on a les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées, par conséquent f est dérivable, et

$f'(z) = \frac{y^2-x^2+i2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2-y^2-i2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{(\bar{z})^2}{(z\bar{z})^2} = -\frac{1}{z^2}$

$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C} - \{0\} : f'(z) = -\frac{1}{z^2}$

1.3.4 *Propriétés*

I. Remarquons qu'on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial(P+iQ)}{\partial x} + i\frac{\partial(P+iQ)}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0$$

Une forme condensée des conditions de Cauchy-Riemann est:

$$\boxed{\forall (x,y) \in \Omega \subset \mathcal{R}^2: \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0} \quad (2)$$

II. On a aussi: $df(z) = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$

Comme : $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}$ (3)

Et que $\begin{cases} x = \frac{z+\bar{z}}{2} \\ y = \frac{z-\bar{z}}{2i} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \\ \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{-1}{2i} \end{cases}$

En substituant ces dernières relations dans(3) et en utilisant(2), on a: $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

Finalement, f dérivable $\Rightarrow df(z) = \frac{\partial f}{\partial z}dz = f'(z)dz$

Donc, si f est dérivable, $f(z)$ ne doit pas contenir de termes en z(aussi ni $\mathcal{R}ez = \frac{z+\bar{z}}{2}$, ni $Imfz = \frac{z-\bar{z}}{2i}$,ni $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$). Alors on peut écrire les conditions de Cauchy-Riemann sous la forme :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0}$$

Exemple :

Soit la fonction $f(z)$ définie par : $f(z) = \frac{1}{z} - z^2.Imz$

On a alors : $f(z) = \frac{1}{z} - z^2.\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) = \frac{1}{z} - \frac{z^3}{2i} + \frac{z^2\bar{z}}{2i} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{z^2}{2i} \neq 0$

D'où la fonction $f(z)$ n'est pas dérivable.

1.4 Fonctions Harmoniques

Si les dérivées partielles secondes de P et Q par rapport à x et à y$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \ et \ \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}\right)$ existent et sont continues dans $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, alors on peut tirer des conditions de Cauchy- Riemann (1) :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \quad et \ \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0 \qquad (4)$$

Par conséquent, les parties réelles et imaginaires d'une fonction holomorphe vérifient l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \quad , \qquad ou\ \Delta\,\Psi = 0 \ \text{ avec } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

L'opérateur Δ est appelé le Laplacien.

Des fonctions telles que $P\ (x, y)\ et\ Q\ (x\ , y)$ qui vérifient l'équation de Laplace dans $\mathbb{R}$ sont appelée fonctions harmoniques et sont dites harmoniques dans $\mathbb{R}$.

Théorème : soit P une fonction harmonique de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, alors il existe une fonction f harmonique de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $Re(f) = P$ ou bien $(Im(f) = P)$.

Exemple : Trouver une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $Re(f) = P(x, y) = cosxchy$

Solution : le domaine de définition de P est $\mathbb{R}^2$, vérifiant que P est harmonique :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -sinxchy \Longrightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -cosxchy \tag{1}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = cosxshy \Longrightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \ cosxchy \tag{2}$$

Par addition de (1) et (2) on obtient $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$ ce qui montre que P est harmonique, c'est-à-dire qu'il existe une fonction f holomorphe telle que $= P + iQ$, les conditions de Cauchy- Riemann s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} = -sinxchy & (1) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} = cosxshy & (2) \end{cases}$$

De l'équation (1) on tire $Q(x, y) = \int -sinxchy\ \partial y \Longrightarrow Q(x, y) = -sinxshy + g(x)$

$$\Longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = -cosxshy + g'(x)$$

Et de l'équation (2) $\frac{\partial Q}{\partial x} = -cosxshy \Longrightarrow g'(x) = 0$ alors $g(x) = C^{te}$

D'où $Q(x, y) = -sinxshy + C$

Finalement on trouve :

$$f = cosxchy - isinxshy + \text{ic}$$

CHAPITRE 2 : Fonctions Elémentaires

2.1Fonctions homographiques

Fonctions rationnelles : Une fonction rationnelle est une fonction complexe de la forme $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ où P et Q sont deux polynômes avec $Q(z) \neq 0$.

Le cas particulier $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ où $ad - bc \neq 0$ est appelée fonction homographique.

2.2Fonctions exponentielle

La fonction exponentielle est définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C} : e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

2.2.1Formule d'Euler :

Si on considère le cas où $z = iy$ avec $y \in \Re$, alors e^{iy} s'écrit sous une forme très intéressante :

$$e^{iy} = \sum_{n\geq 0} \frac{(iy)^n}{n!} = 1 + \frac{(iy)}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \cdots + \frac{(iy)^n}{n!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right) + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} \ldots + (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right)$$

Et en utilisant le développement en série entière des fonctions sinus et cosinus, on obtient la fameuse formule d'Euler d'où :

$$\boxed{\forall y \in \Re : \quad e^{iy} = cosy + isiny}$$

Donc la fonction exponentielle peut être écrite comme :

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x cosy + ie^x siny$$

D'où on a $Re(e^z) = e^x cosy = P(x,y)$ et $Im(e^z) = e^x siny = Q(x,y)$

On peut vérifier les conditions de Cauchy Riemann, et on trouve que la dérivée de la fonction exponentielle est :

$$\forall z \in \mathbb{C} : (e^z)' = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = e^x cosy + ie^x siny = e^x(cosy + isiny) = e^{x+iy} = e^z$$

2.3 Fonctions Hyperboliques

Les fonctions hyperboliques sont définies par les relations suivantes :

- ***sinus hyperbolique*** : $shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$
- ***cosinus hyperbolique*** : $\forall z \in \mathbb{C}\ chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$
- ***tangente hyperbolique*** : $\forall z \in \mathbb{C}\ \ z \neq i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$: $thz = \frac{shz}{chz} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$
- ***cotangente hyperbolique*** : $\forall z \in \mathbb{C}\ \ z \neq i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\ cothz = \frac{chz}{shz} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$

Les propriétés suivantes sont également vérifiées, en passant directement à l'exponentielle :

$\forall z \in \mathbb{C}$: $$ch^2z - sh^2z = 1$$

$$ch(-z) = chz \qquad sh(-z) = -shz$$

$$ch(z + i\pi) = -chz \qquad sh(z + i\pi) = -shz$$

$$ch\left(z + i\frac{\pi}{2}\right) = ishz \qquad sh\left(z + i\frac{\pi}{2}\right) = ichz$$

- Les fonctions hyperboliques sont holomorphes et leurs dérivées sont données par :

$$(shz)' = chz \quad et \quad (chz)' = shz \quad \text{et} \quad (thz)' = \frac{1}{ch^2z}$$

2.4 Fonctions Trigonométriques

On peut définir les fonctions trigonométriques ou circulaires, en utilisant les fonctions exponentielles et la formule d'Euler, de la manière suivante :

$$cosz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad et \quad sinz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$tgz = \frac{sinz}{cosz} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} \quad z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad et \quad cotgz = \frac{cosz}{sinz} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}} \quad z \neq \pi + k\pi$$

Les fonctions trigonométriques et les fonctions hyperboliques sont liées par les relations suivantes

$$\sin(iz) = ishz \qquad sh(iz) = isinz \qquad \cos(iz) = chz \qquad ch(iz) = cosz$$

$$\text{tg}(iz) = ithz \qquad th(iz) = itgz \qquad \text{cotg}(iz) = -icothz \qquad cohth(iz) = cotgz$$

Remarque :

La plupart des propriétés des fonctions trigonométriques réelles sont encore vérifiées dans le cas complexe, par exemple : $\forall z \in \mathbb{C}$: $$sin^2z + cos^2z = 1$$

$$si\,n(z + z') = sinzcosz' + coszsinz'$$

$$\cos(z + z') = \ coszcosz' = sinzsinz' \quad \ldots\ldots etc.$$

Par contre pour $z \in \mathbb{C}$, on peut avoir $|sinz| > 1 \quad ou\ |cosz| > 1$

2.5 Fonction Logarithme complexe

On appelle détermination du logarithme de z un nombre complexe t tel que $t = logz \Leftrightarrow z = e^t$ définie par :

$$\forall z \neq 0 \quad Logz = ln|z| + iargz$$
$$= ln|z| + iArgz + i2\pi k \qquad k \in \mathbb{C}$$

On remarque que $Logz$ est une fonction multiforme (cette fonction possède une infinité de déterminations).

Le nombre $ln|z| + iArgz\ (-\pi \ \leq Argz < \pi)$s'appelle souvent ***La détermination principale de*** $logz$.

La fonction est définie comme l'inverse de la fonction exponentielle e^t.

Exemples :

- $Log(i) = ln|i| + iarg(i) = ln1 + i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$, alors La détermination principale de log $(i)\ est\ i\frac{\pi}{2}$.
- $Log(1+i) = ln|1+i| + iarg(1+i) = \frac{1}{2}ln2 + i(\frac{\pi}{4} + 2\pi k)$,

  Donc La détermination principale de log $(1+i)\ est \frac{1}{2}ln2 + i\frac{\pi}{4}$.

2.6 Fonction Puissance

C'est une fonction complexe de la forme $f(z) = z^{\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{C}$, et définie comme :

$$f(z) = z^{\alpha} = e^{\alpha Logz}$$

Nous pouvons définir $f\ (z)^{g(z)} = e^{g(z)Logf(z)}$ .En général de telles fonctions sont multiformes.

Exemple :

$$i^{-i} = e^{-iLogi} = e^{-i(ln|i|+iarg(i))} = e^{-i(i(\frac{\pi}{2}+2\pi k))} = e^{\frac{\pi}{2}+2\pi k}$$

Alors La détermination principale de$i^{-i}\ est\ e^{\frac{\pi}{2}}$

2.7 Fonctions trigonométriques inverses

Si $z = sin\, t$ alors $t = arc\, sin\, z$ est appelée la fonction inverse de $sin\, z$ ou $arc\, sinus\, de\, z$. De la même façon on peut définir d'autres fonctions trigonométriques inverses $arcos\, z, arctg\, z, etc$. Ces fonctions qui sont multiformes peuvent être exprimées au moyen de la fonction logarithme

$$arc\, sin\, z = \frac{1}{i} Log\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right) \qquad arc\, cos\, z = \frac{1}{i} Log\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$$arc\, tg\, z = \frac{1}{2i} Log\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right) \qquad arc\, ctg\, z = \frac{1}{2i} Log\left(\frac{z + i}{z - i}\right)$$

2.7 Fonctions hyperboliques inverses

Si $z = sh\, t$ alors $t = arg\, sh\, z$ est appelée la fonction inverse de $sinus\, hyperboliques$. De la même façon on peut définir d'autres fonctions inverses des fonctions hyperboliques $argch\, z, argth\, z, etc$. Ces fonctions qui sont multiformes peuvent être exprimées au moyen de la fonction logarithme

$$argsh\, z = Log\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right) \qquad argch\, z = Log\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

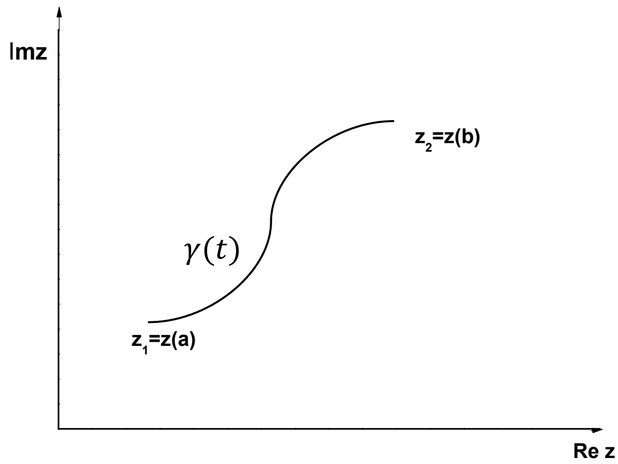
$$argth\, z = \frac{1}{2} Log\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right) \qquad argcoth\, z = \frac{1}{2} Log\left(\frac{z + 1}{z - 1}\right)$$

CHAPITRE 3 : Théorèmes fondamentaux sur les fonctions holomorphes

3.1 Intégrale curviligne

Définition 1 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Un chemin γ est une fonction continue d'un intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$.

$$[a,b] \longrightarrow \Omega$$
$$\gamma: t \longmapsto \gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$$



- Lorsque t décrit $[a,b]$, le point $\gamma(t)$décrit une trajectoire $\gamma([a,b]$ dans le plan $\mathbb{C}$.

$\gamma(a)$ est appelé l'origine du chemin et $\gamma(b)$ son extrémité.

- On dit qu'un chemin est simple si ne se recoupe pas lui-même, c'est-à -dire il n'a pas de points doubles.

Exemples :

- Si le chemin γ est un segment de droite d'origine le point a et d'extrémité le point b alors

$$z = \gamma(t) = a + (b-a)t \quad et \qquad 0 \leq t \leq 1$$

- Si le chemin γ est un cercle de centre z_0 et de rayon r alors :

$$z = \gamma(t) = z_0 + re^{it} \quad et \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Définition 2 : On appelle contour ou lacet un chemin fermé, c'est-à -dire que son origine se confond avec son extrémité, et vérifie $\gamma(a) = \gamma(b)$.

3.2 Intégration le long d'un chemin

Définition 3: On appelle intégrale de f le long d'un chemin γ le nombre complexe :

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{a}^{b} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Propriétés :

- Si γ^* désigne le chemin opposé de , c'est-à –dire orienté de b vers a alors :

$$\int_{\gamma^*} f(z)dz = -\int_{\gamma} f(z)dz$$

- Si f est telle que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \gamma([a,b])$ alors :

$$\int_{\gamma} f(z)dz \leq \int_{\gamma} |f(z)|.|dz| \leq M\int_{\gamma} |dz| = ML$$

L : est la longueur du chemin $\gamma(L = \int_\gamma |dz|)$

- Si γest la juxtaposition de deux chemins $\gamma_1$et γ_2 alors :

$$\int_{\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

- Si le chemin est fermé et orientée dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (sens positif) on note $\oint_\gamma f(z)dz$.

Exemple : calculer $\int_\gamma dz$, où γ est le triangle joignant $1+i, 1-i$ et $-1+i$

Soit $I = \int_\gamma dz = \int_{\gamma_1} dz + \int_{\gamma_2} dz + \int_{\gamma_3} dz$

Avec : γ_1 est le segment de droite $1+i$ à $1-i$

$$\Rightarrow z = \gamma_1(t) = 1 + i - 2it \; et \; \gamma_1' = -2idt \quad \Rightarrow I_1 = \int_{\gamma_1} dz = \int_0^1 -2idt = -2i$$

Et γ_2 est le segment de droite $1-i$ à $-1+i$

$$\Rightarrow z = \gamma_2(t) = 1 - i + 2(i-1)t \; et \; \gamma_1' = 2(i-1)dt$$

$$\Rightarrow I_2 = \int_{\gamma_2} dz = \int_0^1 2(i-1)dt = 2(i-1)$$

Et γ_3 est le segment de droite $-1+i$ à $1+i$

$$\Rightarrow z = \gamma_3(t) = -1 + i + 2t \; et \; \gamma_1' = 2dt$$

$$\Rightarrow I_3 = \int_{\gamma_3} dz = \int_0^1 2dt = 2$$

Donc par conséquent $I = \int_{\gamma} dz = \int_{\gamma_1} dz + \int_{\gamma_2} dz + \int_{\gamma_3} dz = -2i + 2i - 2 + 2 = 0$

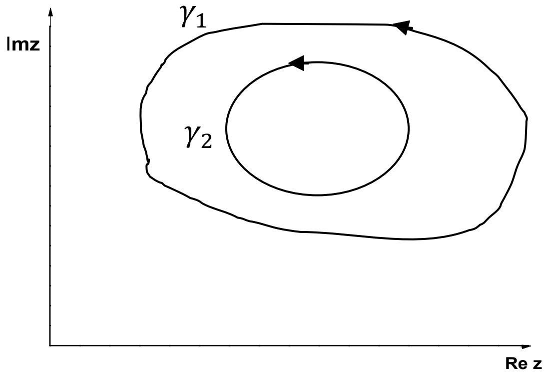
3.3 Théorème de Cauchy

Soit γ une courbe simple fermée. Si $f(z)$ est une fonction holomorphe dans un domaine Ω limité par la courbe γ et sur la courbe γ, alors on a le théorème de Cauchy :

$$\boxed{\int_{\gamma} f(z)\,dz = \oint_{\gamma} f(z)dz = 0}$$

Proposition :

Si $f(z)$ est une fonction holomorphe à l'intérieur et sur la frontière limité par deux courbes fermées γ_1 et γ_2, alors on a : $\oint_{\gamma_1} f(z)dz = \oint_{\gamma_2} f(z)dz = 0$



3.4 Formules intégrales de Cauchy

<u>Théorème 1 :</u> Si $f(z)$ est une fonction holomorphe dans un domaine Ω limité par la courbe γ et sur la courbe γ, et si z_0 est un point intérieure au domaine, alors :

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}dz \qquad \text{(I)}}$$

Où γ est parcourue dans le sens positif (sens inverse des aiguilles d'une montre).

Démonstration : posons

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & si\ z \neq z_0 \\ f'(z_0) & si\ z = z_0 \end{cases}$$

$f(z)$ est holomorphe dans γ d'où $g(z)$ est holomorphe dans γ, alors :

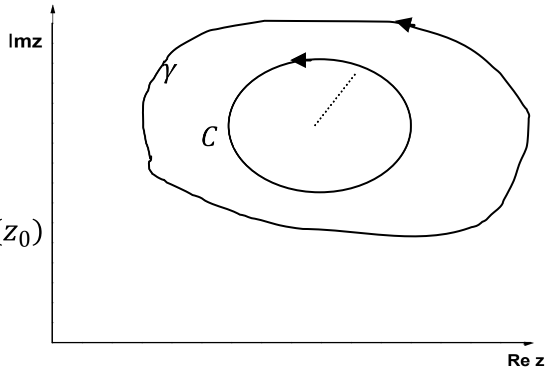
$$\int_\gamma g(z)\,dz = 0 \Leftrightarrow \oint_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz = 0 \Leftrightarrow \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_\gamma \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz = f(z_0)\oint_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$$

Pour calculer l'intégrale $\oint_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$, on suppose un cercle C de rayon r et de centre z_0 à l'intérieure de γ

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = \oint_C \frac{dz}{z-z_0}$$

Avec $z - z_0 = re^{it}$ $t \in [0,2\pi]$

$$\oint_C \frac{dz}{z-z_0} = \frac{ire^{it}}{re^{it}}dt = 2\pi i \Longrightarrow \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$$



Théorème 2 :

Par la suite de la relation (I), la dérivée nième de $f(z)$ au point z_0 est donnée par ne, alors :

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \qquad \text{(II)}}$$

On appelle ces deux relations (I) et (II) les formules intégrales de Cauchy.

Exemples :Calculer $\oint_C \frac{\sin z}{z-\frac{\pi}{2}}\,dz$ où C est le cercle définie comme :

1) $|z-2| = 2$
2) $|z-4| = 1$

Solution :

1) Pour le cercle $|z-2| = 2$, on $z_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left|\frac{\pi}{2} - 2\right| < 2 \Rightarrow z_0$ est à l'intérieure de C , donc on utilise la formule intégrale Cauchy $\oint_C \frac{\sin z}{z-\frac{\pi}{2}}\,dz = 2\pi i f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi i \sin\frac{\pi}{2} = 2\pi i$ ($f(z) = \sin z$ *est holomorphe*).

2) Pour le cercle $|z-4|=1$, on $z_0=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \left|\frac{\pi}{2}-4\right|>1 \Rightarrow z_0$ est à l'extérieur de , donc $\frac{\sin z}{z-\frac{\pi}{2}}$ est holomorphe dans C, alors on utilise le théorème de Cauchy $\oint_C \frac{\sin z}{z-\frac{\pi}{2}}\,dz=0$

3.5 Séries Entières

3.5.1 Définition : On appelle série entière en $\mathrm{z}-\mathrm{z}_0$, d'une variable complexe z, une série de la forme suivante : $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{a}_\mathrm{n}(\mathrm{z}-\mathrm{z}_0)^\mathrm{n}$peut définir un nombre complexe z par la d

3.5.2 Rayon de convergence : On définit le rayon de convergence de la série entière, comme le nombre R tel que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{a}_\mathrm{n}(\mathrm{z}-\mathrm{z}_0)^\mathrm{n}$ converge si $|\mathrm{z}-\mathrm{z}_0|<R$ et diverge si $|\mathrm{z}-\mathrm{z}_0|>R$. Pour $|\mathrm{z}-\mathrm{z}_0|=R$ la série peut être convergé ou divergé.

On peut obtenir le rayon de convergence par :

- Le critère de d'Alembert :$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$
- Le critère de Cauchy : $R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$

Remarque : Les deux propositions précédentes sont basées sur l'existence des limites. Mais si ces limites n'existent pas cela ne signifie pas que le rayon de convergence n'existera pas, dans ce cas on fait appel à d'autres critères de convergence des séries.

Notation : On note $D(z_0,\mathrm{R})=\{z\in\mathbb{C}\ tel\ que\ |z-z_0|<R,\ R>0\}$

$D(z_0,\mathrm{R})$ est appelé disque ouvert de centre z_0 et de rayon R.

$\bar{D}(z_0,\mathrm{R})=\{z\in\mathbb{C}\ tel\ que\ |z-z_0|\le R,\ R>0\}$

$\bar{D}(z_0,\mathrm{R})$ est appelé disque fermé de centre z_0 et de rayon R

Exemple : La série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\mathrm{z}-\mathrm{i})^\mathrm{n}}{2^\mathrm{n}}$

On a : $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{\mathrm{n}+1}}{2^\mathrm{n}}\right|=2$, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\mathrm{z}-\mathrm{i})^\mathrm{n}}{2^\mathrm{n}}$ converge pour $|z-i|<2$, qui représente le disque de centre (0.1) et de rayon $R=2$.

Pour $|z-i|=2 \Rightarrow z-i=2e^{i\theta}$ ⇒la série devienne $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{in\theta}$. C'est une série divergente car :

$$\lim_{n\to\infty} U_n=\lim_{n\to\infty} e^{in\theta}=+\infty\neq 0$$

La série converge dans le disque ouvert de centre $i(0,1)$ et de rayon 2.

3.5.3 Propriétés des séries entières :

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{a_n}(\mathrm{z}-\mathrm{z_0})^{\mathrm{n}}$ une série entière de rayon de convergence $R(\neq 0)$, *alors* :

- Elle est dérivable dans tout ouvert connexe situé à l'intérieur du disque de convergence, et sa dérivé est $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{na_n}(\mathrm{z}-\mathrm{z_0})^{\mathrm{n}-1}$
- Elle peut être intégrée terme à terme sur toute courbe C située entièrement à l'intérieur du disque de convergence.

3.3.4 Développement d'une fonction en séries entières

Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine contenant le disque $D(z_0, R)$ et f une fonction holomorphe $f: D \longrightarrow C$. On dit que f admet un développement en série entière au voisinage de z_0 si et seulement si il existe une suite de coefficients complexes $(a_n)n \in N$ telle que : $\forall z \in |z-z_0| < R \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{a_n}(\mathrm{z}-\mathrm{z_0})^{\mathrm{n}}$.

On dit aussi que f est analytique en z_0.

Propriétés :

- Soit $f : D \subset C \rightarrow C$ développable en série entière sur D. Alors f est indéfiniment dérivable et pour tout $n \in N, f^{(n)}\ (z_0)$ existe et $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.
- Si le développement en série entière de f existe, il est unique.
- La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(\mathrm{z}-\mathrm{z_0})^{\mathrm{n}}$ est appelée la série de Taylor de f en z_0.

3.5.5 Développement de quelques fonctions usuelles :

- $\forall z \in \mathbb{C} :\ e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{z}^{\mathrm{n}}}{n!}$
- $\forall z \in \mathbb{C} : \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{\mathrm{n}} \frac{\mathrm{z}^{2\mathrm{n}+1}}{(2n+1)!}$
- $\forall z \in \mathbb{C} : \cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{\mathrm{n}} \frac{\mathrm{z}^{2\mathrm{n}}}{(2n)!}$
- $|z| < 1 : \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{z}^{\mathrm{n}}$
- $|z| < 1 : \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{\mathrm{n}} \mathrm{z}^{\mathrm{n}}$

3.6 Prolongement analytiques

Soit la fonction $f(z) = \frac{1}{z-1}$ définie pour $z \neq 1$. Cette fonction, holomorphe au voisinage de tout point $z \neq 1$, dans $C\backslash\{1\}$. Et Soit

$$g(z) = \sum_{n\geq 1} z^n$$

qui définit une fonction holomorphe dans le disque D de centre 0 et de rayon 1. Pour $|z| < 1, g(z) = f(z)$. On dit alors que $f(z)$ est le prolongement analytique dans $C\backslash\{1\}$ de la fonction $g(z)$. Plus généralement, si $f(z)$ est une fonction holomorphe dans un ouvert U du plan complexe et $g(z)$ est une fonction holomorphe dans un ouvert V du plan complexe, telles que l'intersection de U et de V ne soit pas vide, et que

$$f(z) = g(z) \text{, pour tout } z \in U \cap V$$

alors, $g(z)$ est le prolongement analytique de $f(z)$ dans $V - (U \cap V)$. De même, $f(z)$ est le prolongement analytique de $g(z)$ dans $U - (U \cap V)$.

3.7 Points Singuliers

Un point singulier d'une fonction f est une valeur de z pour laquelle $f(z)$ n'est pas holomorphe. Si $f(z)$ est holomorphe partout dans un domaine excepté en un point intérieur z_0, on dit que $z = z_0$ est un point singulier isolé, ou une singularité isolée de $f(z)$. Il y en a de différents types de singularité.

Exemple : si $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$ alors $z = 1$ est un point singulier isolé de $f(z)$.

3.7.1 Pôles

Si $f(z) = \frac{\Phi(z)}{(z-z_0)^n}$ avec $\Phi(z_0) \neq 0$, où $\Phi(z)$est holomorphe partout dans un domaine contenant $z = z_0$,et si n est un entier positif , alors z_0 est appelé un pôle d'ordre n.

- Si $n = 1$ le pôle est souvent appelé un pôle simple.
- Si $n = 2$ le pôle est appelé un pôle double, etc...

Exemples :

1. La fonction $f(z) = \frac{z}{(z-2)^2(z+1)}$ a deux singularités : un pôle d'ordre 2 (double) en $z_1 = 2$, et un pôle simple en $z_2 = -1$
2. La fonction $f(z) = \frac{2z+1}{z^2+1} = \frac{2z+1}{(z+i)(z-i)}$ a deux pôles simples en $z_1 = i \; et \; en \; z_2 = -i$

3.7.2 Singularité apparente

On dit que le point $z_0$est une singularité apparente (ou bien une fausse singularité) si $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existe.

Exemple : la fonction $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ a une fausse singularité en $z_0 = 0$; puisque $\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$

3.7.3 Singularité essentielle : Si $f\,(z)$ est uniforme alors toute singularité qui n'est ni un pôle ni une singularité apparente est appelée une singularité essentielle.

Exemple : la fonction $f(z) = \mathrm{e}^{1/z}$ a un point singulier essentielle en $z = 0$

3.8 Série de Laurent

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe en tout point à l'intérieur et sur un cercle (γ)de centre z_0, sauf en un point $z = z_0$, où elle possède un pôle en ce point, alors $[(z-z_0)^n f(z)]$ est analytique en tout point à l'intérieur et sur un cercle (γ)et possède un développement en série de Taylor autour de $z = z_0$, de sorte que :

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \frac{a_{-n+2}}{(z-z_0)^{n-2}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)^1} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots\cdots\cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots\cdots\cdots$$

Cette série s'appelle la série de Laurent de $f(z)$

La partie $(a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots\cdots\cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots\cdots\cdots)$

s'appelle ***la parie analytique*** de la série de Laurent, et le reste de la série constitué de puissance négatives en $(z-z_0)$:

$$\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \frac{a_{-n+2}}{(z-z_0)^{n-2}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)^1}$$

S'appelle ***la partie Principale.***

En générale on appelle une série de Laurent une série de puissance positive et négative ; telle que :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{a_n}(\mathrm{z}-\mathrm{z_0})^{\mathrm{n}}$$

<u>Remarque :</u> la série de Laurent d'une fonction$f(z)$, permet l'identification de type de singularité situé en $z = z_0$, alors si :

- La partie principale a un nombre infini de termes, alors $z = z_0$est dit un point singulier essentiel
- La partie principale a un nombre fini de termes, et que $a_{-n} \neq 0$ tandis que $(a_{-n-1} = a_{-n-2} = 0)$ alors le point singulier $z = z_0$est un pôle d'ordre n.

Exemples :

1. $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \underbrace{1}_{partie\ analytique} + \underbrace{\frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots}_{partie\ pricipale}$ la partie principale est infinie alors la fonction

$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ a un point singulier essentiel en $z_0 = 0$

2. $g(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$ en $z_0 = 1$; on pose $z - 1 = t \Longrightarrow z = 1 + t$

$$g(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2} = \frac{e^{t+1}}{t^2} = \frac{e}{t^2}e^t = \frac{e}{t^2}\left[1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots\right]$$

$$= \frac{e}{t^2} + \frac{e}{t} + \frac{e}{2!} + \frac{et}{3!} + \cdots$$

$$= \underbrace{\frac{e}{(z-1)^2} + \frac{e}{(z-1)}}_{Partie\ principale} + \underbrace{\frac{e}{2!} + \frac{e(z-1)}{3!} + \cdots}_{Partie\ analytique}$$

La partie principale est finie $(a_{-3} = 0)$ alors la fonction $g(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$ a un pôle double en $z_0 = 1$

3. $h(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ (a deux pôles simples en $z_1 = 0\ et\ z_2 = -1$);

- en $z_1 = 0$; on a $\frac{1}{z+1} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \cdots$

$$h(z) = \frac{1}{z}\left(1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) = \frac{1}{z} - 1 + \frac{z}{2!} - \frac{z^2}{3!} + \cdots$$

$$= \underbrace{\frac{1}{z}}_{Partieprincipale} \underbrace{-1 + \frac{z}{2!} - \frac{z^2}{3!} + \cdots}_{Partie\ analytique}$$

La partie principale est finie $(a_{-2} = 0)$ alors la fonction $h(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ a un pôle simple en $z_1 = 0$

- en $z_2 = -1$

on pose $z + 1 = t \Longrightarrow z = t - 1$

$h(z) = \frac{1}{t(t-1)}$ et on a $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + \cdots \Longrightarrow h(t) = -\frac{1}{t}[1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + \cdots]$

$$= -\frac{1}{t} - 1 - t - t^2 - t^3 - t^4 + \cdots$$

$$= \quad \underbrace{-\frac{1}{(z+1)}}_{Partieprincipale} \quad \underbrace{-1 - (z+1) - (z+1)^2 - (z+1)^3 \ldots \ldots}_{Partie\ analytique}.$$

La partie principale est finie ($a_{-2} = 0$) alors la fonction $h(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ a un pôle simple en $z_2 = -1$

CHAPITRE 4 : Théorèmes des résidus et applications au calcul d'intégrales

4.1 Théorème des Résidus

4.1.1 Définition : Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine D, excepté en un point où $f(z)$ a un pôle en z_0, et si C est une courbe simple fermée dans D entourant z_0, on appelle alors ***Résidu*** de $f(z)$ en z_0 le coefficient a_{-1}du développement de Laurent de $f(z)$ au voisinage de z_0.

Ce nombre est noté : $\boxed{Res(f, z_0) = a_{-1}}$

Exemple : la fonction $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2} = \frac{e}{(z-1)^2} + \frac{e}{(z-1)} + \frac{e}{2} + \cdots \ldots ..$

$$\Longrightarrow Res(f, 1) = a_{-1} = e$$

4.1.2 Calcul des Résidus

En pratique, il n'est pas toujours facile d'évaluer le coefficient a_{-1} de la série de Laurent, dans plusieurs cas il est possible de calculer ce résidu sans avoir à expliciter cette série. Il est donné par la formule suivante :

$$\boxed{Res(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-z_0)^n f(z)] \qquad \text{(I)}}$$

Ou n est l'ordre du pôle. En particulier si le pôle est simple $(n = 1)$ le calcul des résidus devient simple et il se réduit en :

$Res(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \to z_0} [(z - z_0) f(z)].$

Exemples :

1. Reprenons l'exemple $h(z) = \frac{1}{z(z+1)}$, calculons $Res(h, 0)$ et $Res(h, -1)$

$$Res(h, 0) = \lim_{z \to 0} [(z)h(z)] = \lim_{z \to 0} \left[\frac{1}{z+1}\right] = 1$$

$$Res(h, -1) = \lim_{z \to -1} [(z+1)h(z)] = \lim_{z \to 0} \left[\frac{1}{z}\right] = -1$$

2. Calculons le résidu au point $z = 0$ de la fonction $f(z) = \frac{1}{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2 cosz}$

$$Res(f,0) = \lim_{z\to\frac{\pi}{4}} \frac{d}{dz}\left[\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to\frac{\pi}{4}} \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{cosz}\right] = \lim_{z\to\frac{\pi}{4}} -\frac{sinz}{cos^2 z} = -\frac{1}{2}$$

3. Calculons le résidu au point $z = i$ de la fonction $g(z) = \frac{cosz}{(z^2+1)^3}$

$$Res(g,i) = \lim_{z\to i} \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-i)^3 f(z)\right] = \lim_{z\to i} \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{cosz}{(z-i)^3}\right]$$

Remarque : *la formule (I) est intéressante seulement quand l'ordre est de 2à 3 à la limite. Si l'ordre est 4 ou plus, mieux utiliser la série de Laurent.*

Exemple 4. Calculons le résidu au point $z = 0$ de la fonction $f(z) = \frac{1+z^8}{z^5(z+2)}$ ($z = 0$ est un pôle d'ordre 5)

Directement on utilise la série de Laurent de $f(z)$ au voisinage de $z = 0$

$$f(z) = \frac{1+z^8}{2z^5\left(1+\frac{z}{2}\right)} = \frac{1+z^8}{2z^5}\left[1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}-\frac{z^3}{2^3}+\frac{z^4}{2^4}+\cdots+(-1)^n\frac{z^n}{2^n}+\cdots\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2z^5}+\frac{1}{2}z^3\right)\left[1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}-\frac{z^3}{2^3}+\frac{z^4}{2^4}+\cdots+(-1)^n\frac{z^n}{2^n}+\cdots\right]$$

Alors $Res(f,0) = a_{-1} = \frac{1}{2^5}$

Exemple 5. Calculons le résidu au point $z = 0$ de la fonction $f(z) = z\sin^2\frac{\pi}{z}$

$$f(z) = z\sin^2\frac{\pi}{z} = z\left(\frac{1-cos2\frac{\pi}{z}}{2}\right) = \frac{z}{2}\left(1-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{2\pi}{z}\right)^{2n}\right)$$

$$= \frac{z}{2}\left(1-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{2\pi}{z}\right)^{2n}\right) = \frac{z}{2}\left(\frac{2\pi^2}{z^2}-\frac{2\pi^4}{3z^4}+\frac{4\pi^6}{45z^6}+\cdots\right)$$

alors $z = 0$ est un point singulier essentiel d'où $Res(f,0) = a_{-1} = \pi^2$

4.1.3 Théorème des Résidus

Si $f(z)$ est analytique dans un domaine D, excepté en un pôle d'ordre n en $z = z_0$, alors on peut écrire $f(z)$ sous la forme suivante :

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}+\frac{a_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}}+\frac{a_{-n+2}}{(z-z_0)^{n-2}}+\cdots+\frac{a_{-1}}{(z-z_0)^1}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots\cdots\cdots$$

En intégrant cette formule sur une courbe simple fermée C dans D entourant z_0 ; et en utilisant le fait que :

$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 0 & si\ n \neq 1 \\ 2\pi i & si\ n = 1 \end{cases}$$

Il s'ensuit que $\oint_C f(z)dz = 2\pi i\ a_{-1}$

Théorème **:** Si $f(z)$ est analytique à l'intérieur et sur une frontière C d'un domaine D, sauf en un nombre fini de pôles $(a, b, c, \ldots)$ à l'intérieur de C, ayant des résidus $(a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, \ldots)$ respectivement, alors

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\ (a_{-1} + b_{-1} + c_{-1} + \cdots)$$

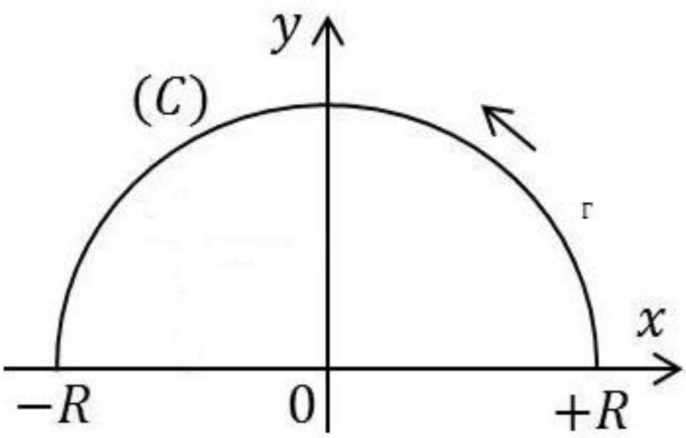
Remarque : le théorème et les formules de Cauchy sont des cas particuliers de ce résultat que l'on appelle le théorème des résidus.

4.2 Applications du Théorème des Résidus à des calculs d'intégrales

4.2.1 Intégrales de fractions rationnelles (de *type* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$)

On considère $\oint_C f(z)dz$ le long d'un contour C constitué d'un intervalle $[-R, R]$ de l'axe des réels (x) et d'un demi-cercle Γ, centré à l'origine, situé au-dessus de l'axe réel, de rayon R assez grand.

$$\oint_C f(z)dz = \int_{-R}^{+R} f(x)dx + \int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_j Res(f, a_j)$$



En suite on fait tendre la limite $R \to +\infty$.

D'où

$$\oint_C f(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx + \lim_{R\to+\infty} \int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_j Res(f, a_j)$$

Le théorème des résidus permet de calculer de nombreuses intégrales, Cependant, pour mener

à bien les calculs il est indispensable de connaitre le comportement de Γ lorsque $R \to +\infty$. En utilisant le Lemme de Jordan :

Si f est continue sur un cercle de centre z_0, de rayon R et si la limite de $|(z - z_0) \times f(z)|$ est nulle lorsque R tend vers l'infini, alors l'intégrale sur tout arc de ce cercle est nulle.

alors

$$\lim_{R\to+\infty} \int_\Gamma f(z)dz = 0 \Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_j Res(f, a_j)$$

Exemple1 : Calculer l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$

On a $f(x) = \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}$ une fonction paire $\Longrightarrow I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$

Posons $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}$ en appliquant le théorème des résidus, on choisit le contour C constitué d'un intervalle $[-R, R]$ de l'axe des réels (x) et d'un demi-cercle Γ, centré à l'origine, situé au-dessus de l'axe réel,

$$\oint_C f(z)dz = \int_{-R}^{+R} f(x)dx + \int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_j Res(f, a_j)$$

On fait $\lim_{R\to+\infty} \Longrightarrow$

$$\lim_{R\to+\infty} \int_\Gamma f(z)dz = 0 \Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_j Res(f, a_j)$$

$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}$ a 4 pôles simples :

en $z_1 = i\ ;\ z_2 = -i\ ;\ z_3 = 3i\ et\ z_4 = -3i$, seuls $z_1 = i\ et\ z_3 = 3i$ ont des parties imaginaires positives ($z_1 et\ z_3 \in C([-R, +R] + \Gamma)$),Alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)} dx = 2\pi i(res(f, i) + res(f, 3i))$$

On a

$$res(f, i) = \lim_{z\to i}(z - i).f(z) = \frac{i}{16}$$

$$res(f, 3i) = \lim_{z\to 3i}(z - 3i).f(z) = \frac{-3i}{16}$$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)} dx = 2\pi i\left(\frac{i}{16} - \frac{3i}{16}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Par la suite on obtient :

$$\Longrightarrow I = \int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)} dx = \frac{\pi}{8}$$

Exemple2 : Calculer l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$

On considère la fonction $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ et en appliquant le théorème des résidus, on choisit le contour C composé d'un intervalle $[-R, R]$ de l'axe des réels (x) et d'un demi-cercle Γ, centré à l'origine, situé au-dessus de l'axe réel,

$\oint_C f(z)dz = \int_{-R}^{+R} f(x)dx + \int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_j Res(f, a_j)$

On fait $\lim_{R\to+\infty}$ $\Longrightarrow$

$$\lim_{R\to+\infty} \int_\Gamma f(z)dz = 0 \Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_j Res(f, a_j)$$

$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)}$ a 2 pôles simples :

en $z_1 = i$; $z_2 = -i$ seul $z_1 = i$ a une partie imaginaire positive $(z_1 = i \in C([-R,+R] + \Gamma))$,Alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)} dx = 2\pi i\big(res(f,i)\big)$$

On a

$$res(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i).f(z) = \frac{1}{2i}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)} dx = 2\pi i\left(\frac{1}{2i}\right) = \pi$$

Exemple3 : Calculer l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^2+2x+2}$

On considère la fonction $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+2z+2}$ et en appliquant le théorème des résidus, on choisit le contour C composé d'un intervalle $[-R, R]$ de l'axe des réels (x) et d'un demi-cercle Γ, centré à l'origine, situé au-dessus de l'axe réel,

$$\oint_C f(z)dz = \int_{-R}^{+R} f(x)dx + \int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_j Res(f,a_j)$$

On fait $\lim_{R\to+\infty}$ $\Rightarrow$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_\Gamma f(z)dz = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_j Res(f,a_j)$$

$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+2z+2}$ a 2 pôles simples :

en $z_1 = -1+i$; $z_2 = -1-i$ ce dernier est rejeté seul $z_1 = -1+i$ a une partie imaginaire positive $(z_1 \in C([-R,+R] + \Gamma))$,Alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+2x+2} dx = 2\pi i\big(res(f,-1+i)\big)$$

On a

$$res(f,-1+i) = \lim_{z\to i}(z+1-i).f(z) = \frac{e^{-1-i}}{2i}$$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+2x+2}dx = 2\pi i\left(\frac{e^{-1-i}}{2i}\right) = \pi e^{-1-i} = \pi e^{-1}(\cos 1 - i\sin 1)$$

On déduit alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sinx}{x^2+2x+2}dx = -\pi e^{-1}\sin 1$$

Et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cosx}{x^2+2x+2}dx = \pi e^{-1}\cos 1$$

4.2.2 Intégrales trigonométriques (de type $\int_0^{2\pi} g(cos\theta, sin\theta)d\theta$)

Soit g une fonction rationnelle de $cos\theta$ *et* $sin\theta$, si on pose $z = e^{i\theta}$ $\theta \in [0,2\pi]$ et $z^{-1} = e^{-i\theta}$ alors on peut écrire :

$$cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2} \qquad et \qquad sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-z^{-1}}{2i}$$

$dz = ie^{i\theta}d\theta \Longrightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$

Par conséquent l'intégrale donnée est équivalent à :

$$\int_0^{2\pi} g(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = \int_{|z|=1} \frac{1}{zi} g\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)dz = 2\pi i\sum_j Res(f, a_j)$$

Où $f(z) = \frac{1}{zi}g\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)$ et a_j sont les pôles de la fraction rationnelle de f(z) qui sont à l'intérieur du cercle $|z| = 1$.

Exemple : calculer l'intégrale $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5+3\cos\theta}d\theta$

On pose $z = e^{i\theta}$ $cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2}$ et $cos2\theta = \frac{z^2+z^{-2}}{2}$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5+3\cos\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{iz} \frac{z^2+z^{-2}}{2(5+3\frac{z+z^{-1}}{2})} dz$$

soit $f(z) = \frac{-i(z^4+1)}{z^2(3z^2+10z+3)}$, cette fonction à un pôle double en $z_1 = 0$ et deux pôles simples en $z_2 = \frac{-1}{3}$ et $z_3 = -3$, seuls $z_1 = 0$ et $z_2 = -\frac{1}{3}$ sont) l'intérieur du cercle $|z| = 1$, alors en appliquant le théorème des résidus on obtient :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5+3\cos\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{-i(z^4+1)}{z^2(3z^2+10z+3)} dz = 2\pi i \left(Res(f,o) + Res(f,-\frac{1}{3}) \right)$$

D'où

$$Res(f,o) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(\frac{-i(z^4+1)}{(3z^2+10z+3)}\right) = -\frac{20}{18i}$$

$$Res\left(f,-\frac{1}{3}\right) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{-i(z^4+1)}{3z^2(z+3)}\right) = \frac{41}{36i}$$

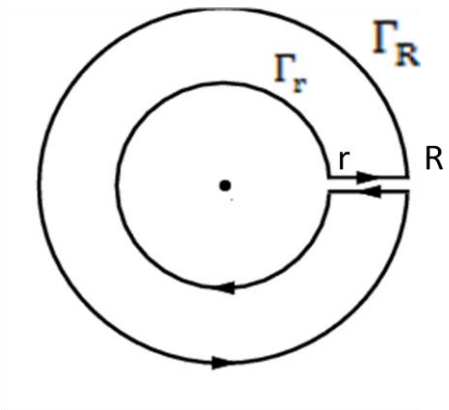
Alors :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5+3\cos\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{-i(z^4+1)}{z^2(3z^2+10z+3)} dz = \frac{\pi}{18}$$

4.2.3 Intégrales de fonctions multiformes

Exemple : $\int_0^{+\infty} \frac{lnx}{(x+1)^3} dx$

On considère la fonction $(z) = \frac{(lnz)^2}{(z+1)^3}$, et soit le contour C composé de : $[r,R] \cup \Gamma_R \cup [R,r] \cup \Gamma_r$ avec Γ_R et Γ_r sont des cercles centrés à l'origine de rayons R et r respectivement



En appliquant le théorème des résidus, on obtient :

$$\oint_C f(z)dz = \int_r^{+R} f(z)dz + \int_{\Gamma_R} f(z)dz + \int_R^r f(z)dz + \int_{\Gamma_r} f(z)dz = 2\pi i \sum_j Res(f,a_j)$$

on fait les limites $R \to +\infty$ et $r \to 0$, on obtient par la suite :

$$\lim_{r\to 0} \int_{\Gamma_r} f(z)dz = 0 \quad et \quad \lim_{R\to +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$$

On a aussi : le long de $[r,R]$ $lnz = lnx$ ainsi que le long du chemin $[R,r] lnz = lnx + i2\pi$, on peut écrire alors :

$$\int_r^{+R} f(z)dz = et \int_R^r f(z)dz = -\int_0^{+\infty} \frac{(lnx + i2\pi)^2}{(x+1)^3}dx$$

$$\oint_C f(z)dz = \int_0^{+\infty} \frac{(lnx)^2}{(x+1)^3}dx - \int_0^{+\infty} \frac{(lnx + i2\pi)^2}{(x+1)^3}dx = 2\pi i \sum_j Res(f,a_j)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{(lnx)^2}{(x+1)^3}dx - \int_0^{+\infty} \frac{(lnx)^2}{(x+1)^3}dx - \int_0^{+\infty} \frac{(i2\pi)^2}{(x+1)^3}dx - \int_0^{+\infty} \frac{4i.\,lnx\pi}{(x+1)^3}dx = 2\pi i \sum_j Res(f,a_j)$$

Par la suite

$$4\pi^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^3}dx - 4\pi i \int_0^{+\infty} \frac{lnx}{(x+1)^3}dx = 2\pi i \sum_j Res(f,a_j)$$

Comme La fonction $f(z) = \frac{(\ln z)^2}{(z+1)^3}$ a un pôle triple en $z_1 = -1$ à l'intérieur de contour C, alors :

$$res(f,-1) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\frac{d^2}{dz^2}(z+1).f(z) = 1 - i\pi$$

Par la suite on obtient :

$$4\pi^2\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^3}dx - 4\pi i\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(x+1)^3}dx = 2\pi i(1-i\pi)$$

Ce qui donne finalement :

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^3}dx = \frac{1}{2}\\ \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(x+1)^3}dx = -\frac{1}{2}\end{cases}$$

4.2.4 Formule des compléments

Nous définissons la fonction gamma pour $\mathcal{R}e\{z\} > 0$ par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt \qquad (1)$$

- On en déduit la formule de récurrence :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \text{ Ou } \Gamma(1) = 1 \qquad (2)$$

- Si z est un entier positif (2) devient

$$\Gamma(n+1) = n\times(n-1)\times\ldots\ldots\ldots..\times 1 = n! \qquad (3)$$

Ce qui montre que la fonction gamma est une généralisation de la factorielle. Pour cette raison la fonction gamma est aussi appelée fonction factorielle et est notée z ! plutôt que $\Gamma(z+1)$, on pose alors $\boxed{0\,! = 1}$

4.2.4 Résidu à l'infini

Soit f une fonction holomorphe sur le plan complexe et soit g la fonction définie par $(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$.

On dit que f a un pôle en l'infini si g a un pôle en 0 et que f a une singularité essentielle à l'infini si g a une singularité essentielle en 0. On appelle résidu à l'infini de f la quantité

$$\boxed{Res(f,\infty) = Res\left(-\frac{1}{z^2}g(z),0\right)}$$

CHAPITRE5: Applications

5.1 Equivalence entre Holomorphie et Analyticité

Définition : Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction à variables complexes ; où Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit que f est analytique sur Ω, si pour tout point $z_0 \in \Omega$ il existe un disque ouvert $D(z_0, r) \subset \Omega$ tel que $f(z)$ s'´ecrit comme une série entière en $(z - z_0)$: $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{a_n}(\mathrm{z} - \mathrm{z_0})^{\mathrm{n}}$.

Propriétés :

- Si $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{a_n}(\mathrm{z} - \mathrm{z_0})^{\mathrm{n}}$ est convergente sur $D(z_0, r)$, alors elle est analytique et holomorphe. Sa dérivée est $f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{na_n}(\mathrm{z} - \mathrm{z_0})^{\mathrm{n-1}}$ est convergente sur $D(z_0, r)$,par conséquent $f(z)$ est indéfiniment dérivable sur Ω. Autrement dit ***une fonction analytique est holomorphe.***
- Alors on a : $\mathrm{a_n} = \frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$, par conséquent la série entière est la série de Taylor en z_0. Elle est donc déterminée uniquement par f au voisinage de z_0 est donnée par :

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots\cdots\cdots + \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(z - z_0)^n + \cdots\cdots\cdots$$

Exemples :

- La fonction $f(z) = e^z$ est analytique sur $\mathbb{C}$: $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{z^n}}{\mathrm{n!}}$
- La fonction $f(z) = |\mathrm{z}|^2$ n'est pas analytique sur $\mathbb{C}$: $|z|^2$n'est pas holomorphe.

5.2 Théorème du Maximum

Si f (z) est analytique à l'intérieur d'une courbe fermée simple C, et sur C, si de plus $f\ (z)$ n'est pas constante alors le maximum de $|f\ (\ z\ )|$ est atteint sur C.

5.3 Théorème de Liouville

Supposons que quel que soit z dans le plan complexe, la fonction $f\ (z)$ vérifiée les deux conditions :

1. $f\ (z)$ est analytique
2. $f\ (\ z\ )$est bornée, c'est-à-dire $|f\ (\ z\ )|\ <\ M$ où M désigne une constante.

Alors $f\ (\ z\ )$ est constante.

5.4 Théorème de Rouché

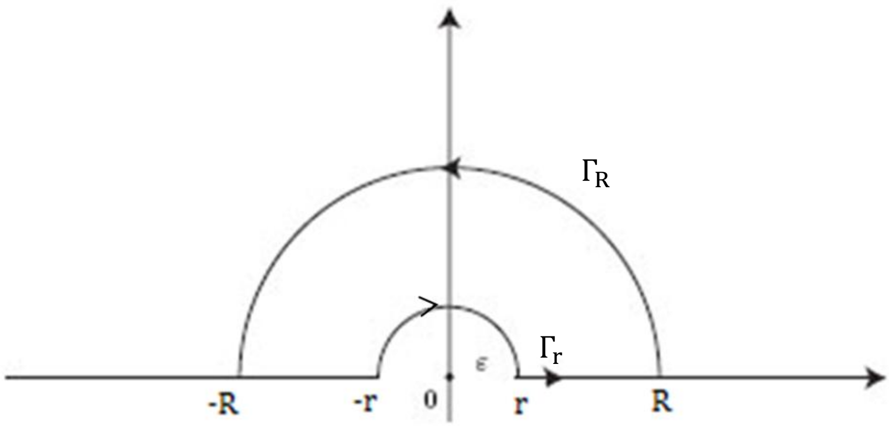
Si $f\ (z)$ et $g\ (z)$ sont analytiques dans et sur une courbe fermée simple C, et si $|g\ (\ z\ )| < |f\ (\ z\ )|$ sur **C,** alors $f\ (\ z\ )\ +\ g\ (\ z\ )$ et $f\ (z)$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur de C.

5.5 Calcul d'intégrales par la méthode des Résidus

Intégrale diverses sur des contours particuliers :

Exemple 1 : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)x} dx$

On considère la fonction $f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}$ qui a 3 pôles simples en $z_1 = i$; $z_2 = -i$ *et* $z_3 = 0$, ce dernier $z_3 = 0$ est sur le chemin d'intégrale, on ne peut pas intégrer sur un chemin passant par un point singulier ; en modifiant le contour comme C composé de : $[r, R] \cup \Gamma_R \cup [-R, -r] \cup \Gamma_r$; avec Γ_R *et* Γ_r sont des demi-cercles centrés à l'origine de rayons R *et* r respectivement , situés au-dessus de l'axe réel,



En appliquant le théorème des résidus, on obtient :

$$\oint_C f(z)dz = \int_r^{+R} f(x)dx + \int_{\Gamma_R} f(z)dz + \int_{-R}^{-r} f(x)dx + \int_{\Gamma_r} f(z)dz = 2\pi i \sum_j Res(f, a_j)$$

Pour l'intégrale $\int_{-R}^{-r} f(x)dx$, on fait le changement de variable $x = -x$:

$$\int_{-R}^{-r} f(x)dx = -\int_r^R \frac{e^{-ix}}{x(x^2+1)} dx$$

Par la suite

$$\int_r^{+R} f(x)dx + \int_{-R}^{-r} f(x)dx = \int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x(x^2+1)} dx = 2i \int_r^R \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx$$

On fait la limite de $r \to 0$ *et* $R \to \infty$ d'où $\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$

Pour calculer l'intégrale $\int_{\Gamma_r} f(z)dz$ on pose $= re^{i\theta}$; $dz = ire^{i\theta}d\theta$, on obtient par la suite :

$$\int_{\Gamma_r} f(z)dz = \lim_{r\to 0}\int_{\pi}^{0} \frac{e^{re^{i\theta}}}{re^{i\theta}(r^2e^{i2\theta}+1)} ire^{i\theta}d\theta = \int_{\pi}^{0} id\theta = -i\pi$$

Par la suite on obtient :

$$2i\int_{r}^{R} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx = i\pi + 2\pi i\sum_{j} Res(f,a_j)$$

Avec $z_1 = i$ est à l'intérieur de notre contour C, alors

$$2i\int_{r}^{R} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx = i\pi + 2\pi i Res(f,i)$$

$$Res(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i).f(z) = \lim_{z\to i}\frac{e^{iz}}{z(z+i)} = \frac{e^{-1}}{-2}$$

$$\int_{r}^{R} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx = \frac{\pi}{2}(1-e^{-1})$$

Exemple 2 : $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+4}dx$

On considère la fonction $(z) = \frac{(\ln z)^2}{z^2+4}$, qui a deux pôles simples en $2i$ et en $-2i$

$$res(f,2i) = \lim_{z\to 2i}\frac{(\ln z)^2}{z+2i} = \frac{\left(\ln(2i)\right)^2}{4i} = \frac{\left(\ln 2 + i\frac{\pi}{2}\right)^2}{4i}$$

$$res(f,-2i) = \lim_{z\to -2i}\frac{(\ln z)^2}{z-2i} = -\frac{\left(\ln(-2i)\right)^2}{4i} = -\frac{\left(\ln 2 + i\frac{3\pi}{2}\right)^2}{4i}$$

En appliquant le théorème des résidus, on obtient :

$$\oint_C f(z)dz = \int_{r}^{+R} f(z)dz + \int_{\Gamma_R} f(z)dz + \int_{R}^{r} f(z)dz + \int_{\Gamma_r} f(z)dz = 2\pi i\sum_{j} Res(f,a_j)$$

on fait les limites $R \to +\infty$ et $r \to 0$, on obtient par la suite :

$$\lim_{r\to 0}\int_{\Gamma_r} f(z)dz = 0 \;\; et \;\lim_{R\to +\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$$

On a aussi : le long de $[r, R]$ $lnz = lnx$ ainsi que le long du chemin $[R, r] lnz = lnx + i2\pi$, on peut écrire alors :

$$\int_r^{+R} f(z)dz = et \int_R^{r} f(z)dz = -\int_0^{+\infty}\frac{(lnx+i2\pi)^2}{(x+1)^3}dx$$

$$\oint_C f(z)dz = \int_0^{+\infty}\frac{(lnx)^2}{x^2+4}dx - \int_0^{+\infty}\frac{(lnx+i2\pi)^2}{x^2+4}dx = 2\pi i\big(Res(f,2i)+Res(f,-2i)\big)$$

$$4\pi^2\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+4}dx - 4\pi i\int_0^{+\infty}\frac{lnx}{x^2+4}dx = 2\pi i\big(Res(f,2i)+Res(f,-2i)\big)$$

Par la suite

$$4\pi^2\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+4}dx - 4\pi i\int_0^{+\infty}\frac{lnx}{x^2+4}dx = 2\pi i\left(\frac{2\pi^2-2i\pi ln2}{4i}\right) = \pi^3 - i\pi^2 ln2$$

Par la suite on obtient :

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+4}dx = \frac{\pi}{4}\\ \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{lnx}{x^2+4}dx = \frac{\pi ln2}{4}\end{cases}$$

Références

MURRAY R.SPIEGEL, Variables complexes : Cours et problèmes, Séries Schaum, Mac Graw-Hill Inc, New York, 1973

P. DOLBEAULT, Analyse Complexe, Masson, Paris, 1990