Exercice N°1: Calculer $\int_{1+i}^{2+4i} z^2 dz.$

1- le long de la parabole $y = x^2$.
2- le long de la ligne droite joignant les points $1+i$ et $2+4i$
3- le long de la ligne brisé allant de $1+i$ à $2+i$, puis de $2+i$ à $2+4i$

Solution :

1) Pour le chemin γ_1 la parabole $y = x^2 \Longrightarrow z = x + ix^2$ et $dz = (1 + i2x)dx$

$$\boldsymbol{I_1} = \int_{\gamma_1} z^2 dz = \int_1^2 (x + ix^2)^2 \times (1 + i2x)dx = \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \boldsymbol{x}^{\mathbf{3}} (1 + ix)^3\right]_1^2 = \frac{\mathbf{-86}}{\mathbf{3}} - \mathbf{6}\boldsymbol{i}$$

2) Pour le chemin γ_2 le segment de droite joignant $1+i$ et $2+4i$

$$z = \gamma(t) = a + (b - a)t \quad et \qquad 0 \le t \le 1$$
$$\Longrightarrow z = 1 + i + (1 + 3i)t \; et \; dz = (1 + 3i)dt$$

$$\boldsymbol{I_2} = \int_{\gamma_2} z^2 dz = \int_0^1 (1 + i + (1 + 3i)t)^2 \times (1 + 3i)dt = \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} (1 + i + (1 + 3i)t)^3\right]_0^1 = \frac{\mathbf{-86}}{\mathbf{3}} - \mathbf{6}\boldsymbol{i}$$

3) Pour le chemin γ_3 la ligne brisée allant de $1+i$ à $2+i$, puis de $2+i$ à $2+4i$

On peut décomposer le chemin γ_3 en deux chemins $\gamma'_3 \; et \; \gamma''_3$ tel que :

$$\boldsymbol{I_3} = \int_{\gamma_3} z^2 dz = \int_{\gamma'_3} z^2 dz + \int_{\gamma''_3} z^2 dz$$

Où le chemin γ'_3 est le segment de droite joignant $1 + i$ et $2 + i$; et γ''_3 est le segment de droite joignant $2 + i$ et $2 + 4i$

- Pour le segment de droite joignant $1 + i$ et $2 + i$, on a

$$z = \gamma(t) = a + (b - a)t \quad et \qquad 0 \le t \le 1$$
$$\Longrightarrow z = 1 + i + t \; et \; dz = dt$$

$$\boldsymbol{I'_3} = \int_{\gamma'_3} z^2 dz = \int_0^1 (1 + i + t)^2 \times dt = \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} (1 + i + t)^3\right]_0^1 = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}} + \mathbf{3}\boldsymbol{i}$$

- Pour le segment de droite joignant $2 + i$ et $2 + 4i$, on a

$$z = \gamma(t) = a + (b - a)t \quad et \qquad 0 \le t \le 1$$
$$\Longrightarrow z = 2 + i + 3it \; et \; dz = 3idt$$

$$I''_3 = \int_{\gamma''_3} z^2 dz = \int_0^1 (2+i+3it)^2 \times 3i dt = \left[\frac{1}{3}(2+i+3it)^3\right]_0^1 = \frac{-90}{3} - 9i$$

$$I_3 = I'_3 + I''_3 = \frac{-86}{3} - 6i$$

Exercice N° 2 :

Calculer l'intégrale suivante : $\int_C (z^2 + 3z) dz$,

1) Le long du cercle $|z|$ = 2, du point (2, 0) au point (-2,0) [le demi cercle supérieur].
2) Le long du cercle $|z|$ = 2 parcouru dans le sens direct. Et En déduire $\int_C (z^2 + 3z) dz$ où C est le demi-cercle inférieur de rayon 2 centré en l'origine parcouru dans le sens direct.

Solution :

1) Pour le chemin C_1 le demi cercle de centre (0,0) et de rayon 2 alors :

$$z = \gamma(t) = 2e^{it} \quad \Rightarrow dz = 2ie^{it}\ avec \qquad 0 \le t \le \pi$$

$$I_1 = \int_C (z^2 + 3z) dz = \int_0^{\pi} \left(4e^{i2t} + 6e^{it}\right) \times \left(2ie^{it}\right) dt = \left[\frac{8}{3} e^{i3t} + 6e^{i2t}\right]_0^{\pi} = \frac{-16}{3}$$

2) Pour le chemin C_2 le cercle de centre (0,0) et de rayon 2 , étant donné que $f(z) = (z^2 + 3z)$ est une fonction holomorphe, en appliquant le théoréme de Cauchy alors :

$$I_2 = \oint f(z) = 0$$

- **On aura par la suite :**

$$I_2 = \oint f(z) = \int_{C_1} (z^2 + 3z) dz + \int_{C_3} (z^2 + 3z) dz = \mathbf{0} \Longrightarrow \int_{C_3} (z^2 + 3z) dz = \frac{16}{3}$$

Exercice N° 3: Calculer $\oint_C \frac{z-1}{z(z+1)(z+2)} dz$ ou C est :

1. le cercle $|z| = \frac{1}{2}$
2. le cercle $|z| = \frac{3}{2}$
3. le rectangle de sommets $-4+i, -4-i, 2+i, 2-i$

Solution :

On observe que $g(z) = \frac{z-1}{z(z+1)(z+2)}$ n'est pas défini en $z_1 = 0,\ z_2 = -1\ et\ z_3 = -2$, et g(z) est holomorphe dans $\mathbb{C} - \{0, -1, -2\}$ alors on a trois points singuliers:

1) Pour le chemin $C_1: |z| = \frac{1}{2}$ seul $z_1 = 0$ est à l'intérieur de C_1, tandis que $z_2 = -1$ et $z_3 = -2$ sont à l'extérieur de C_1, en utilisant la formule intégrale de Cauchy :

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

On peut considérer, donc que $f(z) = \frac{z-1}{(z+1)(z+2)}$

$$\oint_{C_1} \frac{z-1}{z(z+1)(z+2)} dz = 2\pi i f(0) = -\pi i$$

2) Pour le chemin $C_2: |z| = \frac{3}{2}$ seul $z_1 = 0$ et $z_2 = -1$ sont à l'intérieur de C_2, tandis que seul $z_3 = -2$ est à l'extérieur de C_2, en utilisant la formule intégrale de Cauchy :

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

Dans ce cas on considère, donc que $f(z) = \frac{z-1}{(z+2)}$

Et on a aussi la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{z(z+1)}$ donne :

$$\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{(z+1)}$$

$$\Rightarrow \oint_{C_2} \frac{\frac{z-1}{(z+2)}}{z(z+1)} dz = \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z(z+1)} dz = \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z} dz - \oint_{C_2} \frac{f(z)}{(z+1)} dz = 2\,\pi i f(0) - 2\pi i f(-1)$$

$$= 3\pi i$$

3) Pour le rectangle de sommets $-4+i, -4-i, 2+i, 2-i$: tous les points singuliers $z_1 = 0,\ z_2 = -1$ et $z_3 = -2$ sont à l'intérieur de C_3, en utilisant la formule intégrale de Cauchy :

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

Dans ce cas on considère, donc que $f(z) = z - 1$

Et en décomposant en éléments simples $\frac{1}{z(z+1)(z+2)}$ on trouve :

$$\frac{1}{z(z+1)(z+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z} + \frac{1}{(z+2)} - \frac{2}{(z+1)}\right]$$

$$\Rightarrow \oint_{C_2} \frac{z-1}{z(z+1)(z+2)} dz = \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z(z+1)(z+2)} dz =$$

$$\frac{1}{2}\left(\oint_{C_2} \frac{f(z)}{z} dz + \oint_{C_2} \frac{f(z)}{(z+2)} dz - \oint_{C_2} \frac{f(z)}{(z+1)} dz \right) = \pi i\big(f(0) + f(-2) - 2f(-1)\big) = 0$$

Exercice N° 4:

Calculer les intégrales suivantes :

$$\oint_C \frac{\sin\frac{z}{2}}{z-\pi} dz \,, \oint_C \frac{z^2 \cos \pi z^2}{(z-2)(z-4)} dz \text{ , et } \oint_C \frac{e^{2z}}{z(z+1)} dz$$

ou C est le cercle $|z-1| = 3$

Solution :

1. Pour $I_1 = \oint_C \frac{\sin\frac{z}{2}}{z-\pi} dz$

On observe que $g(z) = \frac{\sin\frac{z}{2}}{z-\pi}$ n'est pas défini en $z_0 = 0$ et g(z) est holomorphe dans $\mathbb{C}^*$ alors on a un point singulier en en $z_0 = 0$, on remarque aussi que en $z_0 = 0$ est à l'intérieur de C, alors on utilise la formule intégrale de Cauchy :

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

Dans ce cas on considère, $f(z) = \sin\frac{z}{2}$

$$\Rightarrow I_1 = \oint_{C_2} \frac{\sin\frac{z}{2}}{z-\pi} dz = 2\pi i \sin\frac{\pi}{2} = 2\pi i$$

2. Pour $I_2 = \oint_C \frac{z^2 \cos \pi z^2}{(z-2)(z-4)} dz$

On remarque que $g(z) = \frac{z^2 \cos \pi z^2}{(z-2)(z-4)}$ n'est pas défini en $z_1 = 2$ et $z_2 = 4$, alors on a deux points singuliers, on remarque aussi que seul $z_1 = 2$ $(|z_1| < 3)$ est à l'intérieur de C, et $z_2 = 4$ $(|z_2| > 3)$ est à l'extérieur de C,donc g(z) est holomorphe à l'intérieur de C sauf en $z_1 = 2$ alors on utilise la formule intégrale de Cauchy :

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

Dans ce cas on considère, $f(z) = \frac{z^2 \cos \pi z^2}{(z-4)}$

$$\Longrightarrow I_2 = \oint_{C_2} \frac{\frac{z^2 \cos \pi z^2}{(z-4)}}{(z-2)} dz = 2\pi i f(2) = -\pi i$$

3. Pour $I_3 = \oint_C \frac{e^{2z}}{z(z+1)} dz$

On remarque que $g(z) = \frac{e^{2z}}{z(z+1)}$ n'est pas défini en $z_1 = 0 \ et \ z_2 = -1$, alors on a deux points singuliers, on remarque aussi que $z_1 = 0 \ (|z_1| < 3)$ et $z_2 = -1 \ (|z_2| < 3)$ sont à l'intérieur de C, , alors g(z) est holomorphe à l'intérieur de C sauf en $z_1 = 0$ et $z_2 = -1$ alors on utilise la formule intégrale de Cauchy :

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

On a la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{z(z+1)}$ donne :

$$\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{(z+1)}$$

Dans ce cas on considère, $f(z) = e^{2z}$

$$\Longrightarrow I_3 = \oint_C \frac{f(z)}{z(z+1)} dz = \oint_C \frac{f(z)}{z} dz - \oint_C \frac{f(z)}{(z+1)} dz = 2\pi i f(0) - 2\pi i f(-1) = 2\pi i(1 - e^2)$$

Exercice N° 5: Calculer $\oint_C \frac{\cos(z\pi) e^z}{(z-3)^2} dz$ ou C est :

1. le cercle $|z| = 1$
2. le cercle $|z + i| = 4$

Solution :

On a $g(z) = \frac{\cos(z\pi) e^z}{(z-3)^2}$ n'est pas défini en $z_0 = 3$ alors on a un point singulier en en $z_0 = 3$.

1. Pour le cercle $C: |z| = 1$, le point singulier de g(z) est à l'extérieur du cercle C (puisque $|z_0| > 1$, alors g(z) est holomorphe à l'intérieur et sur le cercle C , alors on utilise le théorème de Cauchy :

$$\oint_C \frac{\cos(z\pi)\, e^z}{(z-3)^3} dz = 0$$

2. Pour le cercle $C: |z+i| = 4$, le point singulier de g(z) est à l'intérieur du cercle C (puisque $|z_0 + i| < 4$, alors g(z) est holomorphe à l'intérieur et sur le cercle C sauf en z_0, alors on utilise la 2ieme formule intégrale de Cauchy :

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Par conséquent, on considère $f(z) = \cos(z\pi)\, e^z$:

$$\Longrightarrow \oint_C \frac{\cos(z\pi)\, e^z}{(z-3)^3} dz = \frac{2\pi i f''(3)}{2!} = \pi i(\pi^2 - 1)e^3$$

Exercice N° 6:

1. Calculer $\oint_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3} dz$,ou C est une courbe fermée simple quelconque entourant z=1
2. Calculer $\oint_C \frac{e^{2z}}{(z^2+4)^2} dz$ ou C est le cercle $|z-i| = 2$.

Solution :

1. On a $g(z) = \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}$ n'est pas défini en $z_0 = 1$ alors on a un point singulier en en $z_0 = 1$, et g(z) est holomorphe dans C sauf en $z_0 = 1$, alors on utilise la 2ieme formule intégrale de Cauchy :

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Par conséquent, on considère $f(z) = 5z^2 - 3z + 2)$:

$$\Longrightarrow \oint_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3} dz = \frac{2\pi i f''(1)}{2!} = 5\pi i$$

2. On a $g(z) = \frac{e^{2z}}{(z^2+4)^2} = \frac{e^{2z}}{(z-2i)^2(z+2i)^2}$ n'est pas défini en $z_1 = 2i \; et \; z_2 = -2i$ alors on a deux points singuliers, mais seulement$z_1 = 2i$ ($|z_1 - i| < 2$) est à l'intérieur de C, et g(z) est holomorphe dans C sauf en $z_1 = 2i$, alors on utilise la 2ieme formule intégrale de Cauchy :

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Dans ce cas, on considère $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z+2i)^2} \Longrightarrow f'(z) = \frac{2e^{2z}(z+2i-1)}{(z+2i)^3}$

$$\Longrightarrow \oint_C \frac{e^{2z}}{(z^2+4)^2}dz = \oint_C \frac{\frac{e^{2z}}{(z+2i)^2}}{(z-2i)^2}dz = \frac{2\pi i f'(2i)}{1!} = \frac{\pi}{16}e^{4i}(1-4i)$$

Exercice N° 7: Donner le domaine de convergence des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2 2^n} \quad ; \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^3 3^n} \quad ; \quad \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Solution :

- En utilisant la règle de d'Alembert :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)^2 2^{n+1}} \times \frac{n^2 2^n}{z^n}\right| = \left|\frac{z}{2}\right|$$

D'prés la règle de d'Alembert La série $\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n^2 2^n}$converge absolument si $\left|\frac{z}{2}\right| < 1 \Rightarrow |z| < 2$;

Pour $|z| = 2 \Rightarrow z = 2e^{it}$ la série devienne $\sum_{n\geq 1}\frac{e^{itn}}{n^2}$, qui est une série divergente (car$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{itn}}{n^2} = -\infty \neq 0$), alors la série $\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n^2 2^n}$converge absolument si $|z| < 2$ (dans le disque ouvert de centre (0,0) et de rayon 2.

- En utilisant la règle de d'Alembert :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)^3 3^{n+1}} \times \frac{n^3 3^n}{z^n}\right| = \left|\frac{z}{3}\right|$$

D'prés la règle de d'Alembert La série $\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n^2 2^n}$converge absolument si $\left|\frac{z}{3}\right| < 1 \Rightarrow |z| < 3$;

Pour $|z| = 3 \Rightarrow z = 3e^{it}$ la série devienne $\sum_{n\geq 1}\frac{e^{itn}}{n^3}$, qui est une série divergente (car$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{itn}}{n^3} = -\infty \neq 0$), alors la série $\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n^3 3^n}$converge absolument si $|z| <$ (dans le disque ouvert de centre (0,0) et de rayon 3.

- En utilisant la règle de d'Alembert :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \left|\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\times\frac{(2n-1)!}{z^{2n-1}}\right| = 0 < 1$$

D'prés la règle de d'Alembert La série $\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n^2 2^n}$converge absolument pour tout valeur de $\forall z \in \mathbb{C}$.