Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et Informatiques

Master EDP et Application
Première année (Semestre 02)

ARIOUA YACINE

Introduction Aux Calcul Fractionnaire Et Application

Année: **2021/2022**

Chapitre 1

Fonctions Spéciales

1.1 Fonction Gamma d'Euler

Définition 1.1.1 *On appelle fonction Gamma la fonction définie par*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \ \left(z \in \mathbb{C}, \ \operatorname{Re}(z) > 0\right).$$

avec $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$.

Exemple 1.1.1 *1.* $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$.
2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}$. *(Posant le changement de variable* $t = \tau^2$*).*

Lemme 1.1.1 *La fonction Gamma est une fonction de classe* C^{∞} *sur* $\mathbb{R}_+^*$, *(resp. holomorphe sur le demi plan* $z \in \mathbb{C}, \ \operatorname{Re}(z) > 0$*) et*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{R}_+^* \ (\textit{resp. } z \in \mathbb{C}, \ \operatorname{Re}(z) > 0); \ \Gamma^{(k)}(z) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k \, t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Lemme 1.1.2 *Pour tout* $z \in \mathbb{C}, \ \operatorname{Re}(z) > 0, \ n \in \mathbb{N}$, *on a*

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$
2. $\Gamma(n) = (n-1)!$
3. $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$

Preuve.

1. Représentons $\Gamma(z+1)$ par l'intégrale d'Euler et intégrons par parties :

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt = \left[-t^z e^{-t}\right]_0^{+\infty} + z\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt \\ &= z\Gamma(z)\end{aligned}$$

2. Il suffit d'appliquons 1 pour $z = n-1$.

3. Nous allons démontrer la formule $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$, on a $\Gamma\left(0+\frac{1}{2}\right) = \frac{(0)!\sqrt{\pi}}{4^0(0!)} = \sqrt{\pi}$.

- Supposons que la formule est vérifiée pour $(n-1)$ et considérons n. C-à-d que supposons que $\Gamma\left((n-1)+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!}$, est vérifié. Alors

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!} \\ &= \left(\frac{2n-1}{2}\right)\frac{(2n-2)!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!} = \frac{2n}{2n}\frac{(2n-1)}{2}\frac{(2n-2)!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!} \\ &= \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}.\end{aligned}$$

Donc la formule est vérifiée pour n. ■

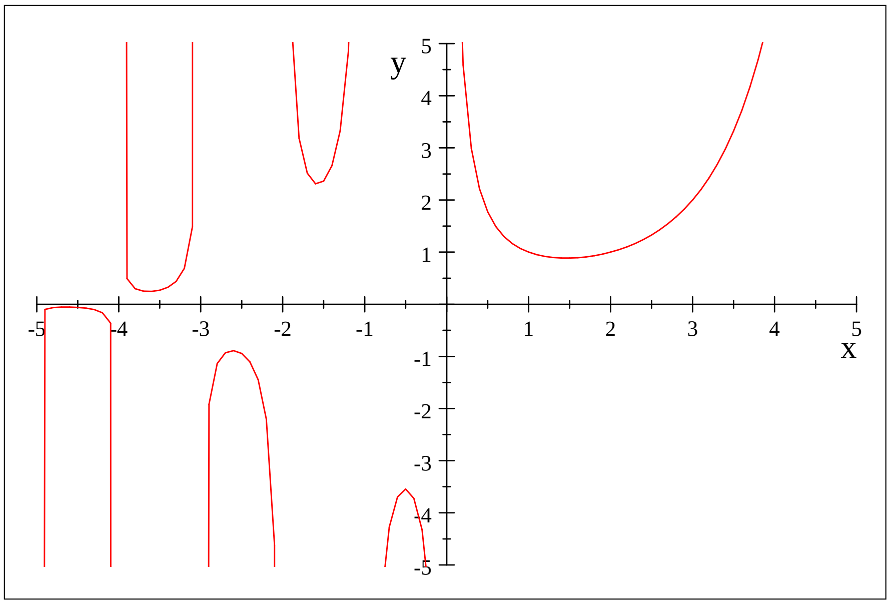
Remarque 1.1.1 *La détermination de la fonction Gamma pour les valeur négatifs non entièrs par la formule* $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$, *et la transition d'un intervalle à un autre* $(-1,0)$, $(-2,-1)$, $(-3,-1)$, ... *etc.*

La fonction Gamma n'existe pas pour les valeur négatifs entiers.

Exemple 1.1.2 1. $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$.

2. $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{-2\sqrt{\pi}}{-\frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$.

- Le graphe de la fonction Γ d'Euler



Le Graphe de la fonction Γ d'Euler

Proposition 1.1.1 *Pour tout $p > 0$, on a*

$$\Gamma(p) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^p}{p(p+1)(p+2) \ldots\ldots (p+n)}.$$

Preuve. Considérons la fonction

$$f(n,p) = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{p-1} dx,$$

on peut facilement voir que

$$\lim_{n \to +\infty} f(n,p) = \Gamma(p).$$

D'une autre part, par l'intégration par parties on obtient

$$\begin{aligned} f(n,p) &= \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{p-1} dx = \left[\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \frac{x^p}{p}\right]_0^n + \frac{1}{p} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} x^p dx \\ &= \frac{1}{p} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} x^p dx. \end{aligned}$$

Encore fois, en intégrant par parties

$$\begin{aligned} f(n,p) &= \frac{1}{p} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} x^p dx = \frac{1}{p} \left[\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^n + \frac{(n-1)}{np(p+1)} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-2} x^{p+1} dx \\ &= \frac{n(n-1)}{n^2 p(p+1)} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-2} x^{p+1} dx. \end{aligned}$$

Après l'intégration par parties n fois, on obtient

$$\begin{aligned} f(n,p) &= \frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{n^n p(p+1)\ldots[p+(n-1)]}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-n} x^{p+(n-1)}dx \\ &= \frac{n!}{n^n p(p+1)\ldots[p+(n-1)]}\left[\frac{x^{n+p}}{n+p}\right]_0^n \\ &= \frac{n!n^p}{p(p+1)\ldots(n+p)}. \end{aligned}$$

par conséquent

$$\Gamma(p) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^p}{p(p+1)(p+2)\ldots\ldots(p+n)}.$$

■

1.2 La fonction Beta

Définition 1.2.1 *La fonction de Beta est un type d'intégrale d'Euler définie par*

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt, \ \ (p,q\in\mathbb{C},\ \operatorname{Re}(p)>0,\ \operatorname{Re}(q)>0).$$

Pour tout $p,q\in\mathbb{C}$, avec $\operatorname{Re}(p)>0,\ \operatorname{Re}(q)>0$, on a

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Soit $D=(0,+\infty)\times(0,+\infty)$, on a

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx\right)\left(\int_0^{+\infty} y^{q-1}e^{-y}dy\right) \\ &= \iint_D x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)}dxdy, \end{aligned}$$

En utilisant un changement de cordonnées, considérons les nouvelles cordonnées

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = \frac{x}{x+y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = uv \\ y = u(1-v) \end{cases},$$

et

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -uv-u(1-v) = -u.$$

De meme que le domaine $D^{'}$ correspondant à D dans les cordonnées u, v est

$$D^{'} = \{(u,v) \,/\, u \geq 0,\ 0 \leq v \leq 1\}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\iint_D x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)}dxdy &= \iint_{D^{'}} (uv)^{p-1}(u(1-v))^{q-1}e^{-u}\left|-u\right| dudv \\
&= \iint_{D^{'}} u^{p+q-1}v^{p-1}(1-v)^{q-1}e^{-u}dudv \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^1 u^{p+q-1}v^{p-1}(1-v)^{q-1}e^{-u}dudv \\
&= \left(\int_0^{+\infty} u^{p+q-1}e^{-u}du\right)\int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}dv \\
&= \Gamma(p+q)\,B(p,q),
\end{aligned}$$

par conséquent

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

1.3 Fonction de Mittag-Leffter

Définition 1.3.1 *La fonction de Mittag-Leffter est définie par*

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+1)},\ \alpha > 0,$$

et la fonction de Mittag-Leffter généralisée est définie par

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\ \alpha,\beta > 0$$

Exemple 1.3.1 *1.*

$$E_1(x) = E_{1,1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

2.

$$E_2(x) = E_{2,1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(2k)!} = \cosh\sqrt{x}.$$

3.
$$E_{1,2}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{x}(e^x - 1).$$

4.
$$E_{1,3}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+2)!} = \frac{1}{x^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{1}{x^2}(e^x - 1 - x).$$

Théorème 1.3.1 *Pour* $\alpha = n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{d}{dx}\right)^n E_n(\lambda x^n) &= \lambda E_n(\lambda x^n), \\ \left(\tfrac{d}{dx}\right)^n x^{\beta-1} E_{n,\beta}(\lambda x^n) &= \lambda x^{\beta-n-1} E_n(\lambda x^n), \end{aligned}$$

Proposition 1.3.1 *Pour* $\alpha, \beta > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\mathcal{L}\left[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)\right](s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda}, \ s > 0, \ |\lambda s^\alpha| < 1.$$

Preuve. Grâce à la définition de transformée de Laplace, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)\right](s) &= \int_0^{+\infty} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^{\beta-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} e^{-st} dt \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha k + \beta - 1} e^{-st} dt, \end{aligned}$$

posons le changement de variable $st = \tau$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)\right](s) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k s^{-\alpha k - \beta}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \int_0^{+\infty} \tau^{\alpha k + \beta - 1} e^{-\tau} dt \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k s^{-\alpha k - \beta}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \Gamma(\alpha k + \beta) \\ &= s^{-\beta} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\lambda s^{-\alpha}\right)^k, \end{aligned}$$

et pour $|\lambda s^\alpha| < 1$, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda s^{-\alpha})^k = \frac{1}{1-\lambda s^{-\alpha}}$, donc

$$\mathcal{L}\left[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)\right](s) = \frac{s^{-\beta}}{1 - \lambda s^{-\alpha}} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda}.$$

■