Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et Informatiques

Master EDP et Application
Première année (Semestre 02)

ARIOUA YACINE

Introduction Aux Calcul Fractionnaire Et Application

Année: **2021/2022**

Chapitre 2

Eléments de calcul fractionnaire

2.1 Intégrale de Rimann-Liouville

Fonctions définies sur $[a,b]$.

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction définie sur $[a,b]$.
Notons par $\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)$ la primitive de f qui s'annule en a :

$$\forall t\in[a,b]\,;\ \left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)(t)=\int_a^t f(\tau)\,d\tau$$

L'itération de $\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)$ permet d'obtenir la primitive seconde de f qui s'annule en a et dont la dérivée s'annule en a. De plus, d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)^2(t) &= \left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)\circ\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)=\int_a^t\left(\int_a^u f(\tau)\,d\tau\right)du\\ &= \int_a^t\left(\int_\tau^t du\right)f(\tau)\,d\tau\\ &= \int_a^t (t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau.\end{aligned}$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. En notant $\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)^n$ la nième itération de $\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)$, une récurrence directe montre que

$$\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)^n(t)=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1}f(\tau)\,d\tau.$$

Si on note $g=\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)^n$, g est donc l'unique fonction vérifiant

$$\forall\ 0\le k\le n-1,\ g^{(k)}(a)=0,\ g^{(n)}=f$$

L'égalité $g^{(n)}=f$ justifie la définition suivante :

Définition 2.1.1 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'intégrale à gauche d'ordre n de f, que l'on note $\left(\mathcal{I}_{a^+}^n f\right)$, est définie par*

$$\left(\mathcal{I}_{a^+}^n f\right)(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\, d\tau.$$

Grâce à la fonction Gamma d'Euler que nous avons définie précédemment.
C'est la propriété $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$, qui permet de généraliser la définition 2.1.1 de la manière suivante :

Définition 2.1.2 *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre $\alpha > 0$ de f est définie par*

$$\forall t \in [a,b]\,;\ \left(\mathcal{I}_{a^+}^\alpha f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau.$$

De même manière on définit l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre $\alpha > 0$ de f, par

$$\forall t \in [a,b]\,;\ \left(\mathcal{I}_{b^-}^\alpha f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^b (\tau-t)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau.$$

Fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$et $\mathbb{R}$.

Il est naturel d'étendre la définition 2.1.2 aux axes $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}$. Notons ces opérateurs $\left(\mathcal{I}_{0^+}^\alpha f\right)$ et $\left(\mathcal{I}_{+}^\alpha f\right)$:

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}^+;\ \left(\mathcal{I}_{0^+}^\alpha f\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau. \\ \forall t \in \mathbb{R};\ \left(\mathcal{I}_{+}^\alpha f\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau. \end{aligned}$$

Proposition 2.1.1 *Pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$, on a*

1. $$\left(\mathcal{I}_{a^+}^\alpha (t-a)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}.$$
2. $$\left(\mathcal{I}_{b^-}^\alpha (b-t)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(b-t)^{\alpha+\beta-1}.$$

Preuve.

1.

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-a)^{\beta-1}\,d\tau,\ \text{posons } \tau-a=s(t-a)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 ((t-a)-s(t-a))^{\alpha-1}(s(t-a))^{\beta-1}(t-a)\,ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1}\,ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta),\ B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}.
\end{aligned}$$

2. Même idée (le chengement de variable est $b-\tau=s(b-t)$). ■

Théorème 2.1.1 *Si $f\in L^1([a,b])$, alors $\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}f$ existe pour tout $\alpha>0$ et $\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}f\in L^1([a,b])$.*

Proposition 2.1.2 *Soit $\alpha>0,\ \beta>0,$ et $f\in L^1([a,b])$. Alors*

$$\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\mathcal{I}_{a^+}^{\beta}f=\mathcal{I}_{a^+}^{\beta}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}=\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha+\beta}.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\mathcal{I}_{a^+}^{\beta}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^\tau (\tau-s)^{\beta-1}f(s)\,ds\right)d\tau\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^\tau (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-s)^{\beta-1}f(s)\,dsd\tau,\ \left|\begin{array}{l}\text{changement de l'ordre}\\ \text{d'intégration}\end{array}\right|\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(s)\int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-s)^{\beta-1}\,d\tau ds,\ \left|\begin{array}{l}u=\frac{\tau-s}{t-s},\ du=\frac{d\tau}{t-s}\\ \tau=(t-s)u+s,\ u:0\to 1\end{array}\right|\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(s)(t-s)^{\alpha+\beta-1}\int_s^t (1-u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}duds,\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(s)(t-s)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta)\,duds,\ \left|B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right|\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t f(s)(t-s)^{\alpha+\beta-1}\,ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t (t-s)^{\alpha+\beta-1}f(s)\,ds\\
&= \mathcal{I}_{a^+}^{\alpha+\beta}f(t).
\end{aligned}$$

■

Lemme 2.1.1 *Soit* $\alpha > 0,\ f \in L^1([0,b]),\ b > 0.$
Alors la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville $\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} f$ *est*

$$\mathcal{L}\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} f\right)(s) = s^{-\alpha}\mathcal{L}(f)(s)$$

Preuve. On écrire l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville $\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} f$ comme convolution de deux fonction $g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}$ et $f(t)$, C-à-d

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} f\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau \\
&= \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}\right) * f(t) \\
&= g(t) * f(t)
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} f\right)(s) &= \mathcal{L}(g * f)(s) \\
&= \mathcal{L}(g)(s) \times \mathcal{L}(f)(s) \\
&= \mathcal{L}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}\right)(s) \times \mathcal{L}(f)(s) \\
&= s^{-\alpha}\mathcal{L}(f)(s).
\end{aligned}$$

■

2.2 Dérivées fractionnaire

Il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaires, nous présentons dans cette parties les définitions de Riemann-Liouville, Liouville, Caputo ainsi que Grunwald-letnikov qui sont les plus utilisées.

2.2.1 Dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville

Si $\alpha > 0$, on note $[\alpha]$ la partie entière de α : $[\alpha]$ est l'unique entier vérifiant $[\alpha] \leq \alpha < [\alpha]+1$.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. En s'inspirant de la relation classique $\frac{d}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} \circ_a \mathcal{I}_t^1$, on peut définir une dérivée fractionnaire d'ordre $0 \leq \alpha < 1$ par :

$$\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}} = \frac{d}{dt} \circ_a \mathcal{I}_t^{1-\alpha}.$$

Plus généralement, si $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$, on peut poser :

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{d^n}{dt^n} \circ_a \mathcal{I}_t^{n-\alpha}.$$

On obtient exactement la dérivée de Riemann-Liouville à gauche.

Définition 2.2.1 *Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α de f est définie par :*

$$\forall t \in [a, b]\,,\ \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau.$$

De plus, on a vu que la définition 2.2.1 d'intégrale à droite était associée à $-d/dt$. Le raisonnement précédent conduit donc à la définition suivante :

Définition 2.2.2 *Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre α de f est définie par :*

$$\forall t \in [a, b]\,,\ \mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(t) = \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \circ \mathcal{I}_{b^-}^{n-\alpha} f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau.$$

Si maintenant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, les définitions précédentes se généralisent directement et sont appelées dérivées de Liouville.

Définition 2.2.3 *Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Liouville à gauche d'ordre α de f est définie par :*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathcal{D}_+^\alpha f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ \mathcal{I}_+^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau.$$

De plus, on a vu que la définition 2.2.3 d'intégrale à droite était associée à $-d/dt$. Le raisonnement précédent conduit donc à la définition suivante :

Définition 2.2.4 *Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Liouville à droite d'ordre α de f est définie par :*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathcal{D}_-^\alpha f(t) = \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \circ \mathcal{I}_-^{n-\alpha} f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^{+\infty} (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau.$$

Remarque 2.2.1 *1. Pour* $\alpha = 0,\ n = 1$.*on a* $\mathcal{D}^0_{a^+} f(t) = \frac{d}{dt}\left(\mathcal{I}^1_{a^+} f\right) = f(t)$.

2. Toutes ces dérivées coïncident avec les dérivées usuelles pour les ordres entiers :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} \mathcal{D}^n_{a^+} f(t) = \mathcal{D}^n_{+} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t) \\ \mathcal{D}^n_{b^-} f(t) = \mathcal{D}^n_{-} f(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} f(t) \end{cases}.$$

Proposition 2.2.1 *Pour* $\alpha \geq 0,\ \beta > 0,$ *on a*

$$\begin{aligned} 1.\ \left(\mathcal{D}^\alpha_{a^+} (t-a)^{\beta-1}\right)(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}. \\ 2.\ \left(\mathcal{D}^\alpha_{b^-} (b-t)^{\beta-1}\right)(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}. \end{aligned}$$

Preuve.

1. Posons $f(t) = (t-a)^{\beta-1}$, d'après la définition 2.2.1 et proposition 2.1.1 on a

$$\left(\mathcal{D}^\alpha_{a^+} f\right)(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ \mathcal{I}^{n-\alpha}_{a^+} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)} (t-a)^{n-\alpha+\beta-1}\right)$$

et

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{n-\alpha+\beta-1} &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)..(n-\alpha+\beta-1-(n-1))(t-a)^{-\alpha+\beta-1} \\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)..(\beta-\alpha)(t-a)^{\beta-\alpha-1} \end{aligned}$$

et d'autre coté

$$\begin{aligned} \Gamma(n-\alpha+\beta) &= (n-\alpha+\beta-1)\Gamma(n-\alpha+\beta-1), \qquad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)\Gamma(n-\alpha+\beta-2) \\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)...(\beta-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha). \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{D}^\alpha_{a^+} f\right)(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)} (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)...(\beta-\alpha)(t-a)^{\beta-\alpha-1} \\ &= \frac{(n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)...(\beta-\alpha)\Gamma(\beta)}{(n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)...(\beta-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}. \end{aligned}$$

2. De même manière. ■

Remarque 2.2.2 *Pour* $\lambda = \beta - 1, \ a = 0$ *on a*

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} t^{\lambda}\right)(t) &= \tfrac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n-\alpha+\lambda+1)} (n-\alpha+\lambda)(n-\alpha+\lambda-1)\ldots(\lambda+1-\alpha) t^{\lambda-\alpha} \\ &= \tfrac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n-\alpha+\lambda+1)} (n-(\alpha-\lambda))(n-1-(\alpha-\lambda))\ldots(1-(\alpha-\lambda)) t^{\lambda-\alpha} \\ &= \begin{cases} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} t^{\lambda-\alpha}, & si \quad \alpha-\lambda \notin \{1,2,\ldots,n\} \\ 0, & si \quad \alpha-\lambda \in \{1,2,\ldots,n\} \end{cases}, \ \lambda > -1.\end{aligned}$$

Si $\alpha - \lambda \in \{1,2,...,n\} \Rightarrow \alpha - \lambda = m \Rightarrow \lambda = \alpha - m, \ m \in \{1,2,...,n\}$ *C-à-d*

$$\left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} t^{\alpha-m}\right)(t) = 0, \ m \in \{1,2,...,n\}$$

2.2.2 Dérivées fractionnaires de Caputo

Cette définition se base sur l'interversion des compositions dans la formule de définition 2.1.1 semble aussi raisonnable pour définir une dérivée fractionnaire appelée dérivée de Caputo.

Définition 2.2.5 *Soit* $\alpha > 0$, *et* $n = [\alpha] + 1$. *La dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre* α *de* f *est définie par :*

$$\forall t \in [a,b], \ {}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \ f(t) = \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \circ \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) \, d\tau.$$

Définissons aussi son analogue à droite.

Définition 2.2.6 *Soit* $\alpha > 0$, *et* $n = [\alpha] + 1$. *La dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre* α *de* f *est définie par :*

$$\forall t \in [a,b], \ {}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} \ f(t) = \mathcal{I}_{b^-}^{n-\alpha} \circ \left(-\frac{d}{dt}\right)^n f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) \, d\tau.$$

Remarque 2.2.3 *Par contre, de telles définitions ne se recollent pas correctement aux dérivées classique :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \begin{cases} {}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{n} f(t) = f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a) \\ {}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{n} f(t) = (-1)^n \left(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(b)\right) \end{cases}.$$

Heureusement, le résultat suivant montre qu'elles approchent les dérivées classiques par limite inférieure.

Lemme 2.2.1 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{N}$ et $n = [\alpha] + 1$. Si $f \in AC^n([a,b])$, alors presque partout*

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \to n^-} {}^C\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f(t) &= f^{(n)}(t) \\
\lim_{\alpha \to n^-} {}^C\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f(t) &= (-1)^n f^{(n)}(t)
\end{aligned}$$

Proposition 2.2.2 *Pour $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, on a*

$$\begin{aligned}
1.\ \left({}^C\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} (t-a)^{\beta-1}\right)(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1},\ \beta > n. \\
2.\ \left({}^C\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} (b-t)^{\beta-1}\right)(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1},\ \beta > n.
\end{aligned}$$

Preuve.

1. Posons $f(t) = (t-a)^{\beta-1}$, d'après la définition et proposition on a

$$\left({}^C\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) = \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \circ \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau.$$

et

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{\beta-1} &= (\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-1-(n-1))(t-a)^{\beta-1-n} \\
&= (\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-n)(t-a)^{\beta-n-1}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\left({}^C\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-n-1} d\tau,\ \text{posons } \tau - a = s(t-a) \\
&= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta-n-1} ds \\
&= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} B(n-\alpha, \beta-n) \\
&\quad \left| B(n-\alpha, \beta-n) = \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n)}{\Gamma(\beta-\alpha)} \right| \\
&= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-n)\,\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}.\ \text{puisque } (\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-n)\,\Gamma(\beta-n) = \Gamma(\beta).
\end{aligned}$$

2. De même manière. ■

Remarque 2.2.4 *Pour $\lambda = \beta - 1,\ a = 0$ on a*

$$\begin{aligned}\left({}^{C}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} t^{\lambda}\right)(t) &= \tfrac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)...(\lambda-(n-1))\Gamma(\lambda-(n-1))}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} t^{\lambda-\alpha} \\ &= \begin{cases} \tfrac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} t^{\lambda-\alpha}, & si \quad \lambda \notin \{0,1,2,...,n-1\} \\ 0, & si \quad \lambda \in \{0,1,2,...,n-1\} \end{cases} \quad , \ \lambda > -1.\end{aligned}$$

C-à-d

$$\left({}^{C}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} t^{m}\right)(t) = 0,\ \ m \in \{0,1,2,...,n-1\}$$

Théorème 2.2.1 *Soient $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$.*
Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, si f possède $(n-1)$ dérivées en a et $\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)$ existe. Alors

$$\left({}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) = \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right],$$

presque pour tout $t \in [a,b]$.

Preuve. On a par définition

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right] &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right] \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\left[f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(\tau-a)^k\right] d\tau\end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par partie

$$\begin{array}{ccc} g(\tau) = f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(\tau-a)^k & \to & \frac{d}{d\tau}\left[f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(\tau-a)^k\right] \\ \frac{(t-\tau)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} & \to & -\frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \end{array}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}[g(t)] &= \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\left[f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(\tau-a)^k\right] d\tau \\ &= \left[\frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} g(\tau)\right]_a^t - \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \frac{d}{d\tau} g(\tau)\, d\tau\end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}[g(t)] = \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha+1} \frac{d}{dt} g(t)$$

De même façon pour n-fois,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}\left[g\left(t\right)\right] &= \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha+n}\frac{d^n}{dt^n}g\left(t\right) \\
&= \mathcal{I}_{a^+}^{n}\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}\frac{d^n}{dt^n}g\left(t\right) \\
&= \mathcal{I}_{a^+}^{n}\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}\frac{d^n}{dt^n}\left[f\left(t\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}\left(a\right)}{k!}\left(t-a\right)^k\right] \\
&= \mathcal{I}_{a^+}^{n}\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}\frac{d^n}{dt^n}f\left(t\right),\ \frac{d^n}{dt^n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}\left(a\right)}{k!}\left(t-a\right)^k\right]=0,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\left[f\left(t\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}\left(a\right)}{k!}\left(t-a\right)^k\right] &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}\left[f\left(t\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}\left(a\right)}{k!}\left(t-a\right)^k\right] \\
&= \left(\frac{d}{dt}\right)^n\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}\left[g\left(t\right)\right] \\
&= \left(\frac{d}{dt}\right)^n\mathcal{I}_{a^+}^{n}\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}\frac{d^n}{dt^n}f\left(t\right) \\
&= \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}\frac{d^n}{dt^n}f\left(t\right) \\
&= \left({}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f\right)\left(t\right).
\end{aligned}$$

■

Corollaire 2.2.1 *Soientt* $\alpha\geq 0$, $n=[\alpha]+1$ *et* $\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f\right)$, $\left({}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f\right)(t)$ *sont existent, on suppose que* $f^{(k)}\left(a\right)=0$ *pour* $k=0,1,...,n-1$.*Alors*

$$\left({}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f\right)\left(t\right)=\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f\right)\left(t\right).$$

2.2.3 Dérivées fractionnaires de Grünwald-Letnikov

Cette définition se base sur l'obtention de dérivées par différences finies.
Soit $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, pour $h>0$ on a :

$$f^{'}\left(t\right)=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{1}{h}\left[f\left(t\right)-f\left(t-h\right)\right]$$

et la dérivée seconde :

$$\begin{aligned} f''(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[f'(t)-f'(t-h)\right] \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{1}{h}\left(f(t)-f(t-h)\right)-\frac{1}{h}\left(f(t-h)-f(t-2h)\right)\right] \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\left[f(t)-2f(t-h)+f(t-2h)\right]. \end{aligned}$$

Plus généralement, la dérivée n$^{\text{ième}}$ de f et donnée par :

$$f^{(n)}(t)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n f(t-kh), \tag{1.1}$$

où

$$C_k^n=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{n\,(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!}.$$

Il est possible d'étendre C_k^n à $k>n$, en posant $C_k^n=0$.

La formule (1.1) devient alors

$$f^{(\alpha)}(t)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_k^\alpha f(t-kh).$$

Là encore, on peut généraliser le terme de droite grâce à la fonction Gamma, en posant pour $\alpha\in\mathbb{R}^+-\mathbb{N}$, et $k\in\mathbb{N}$,

$$C_k^\alpha=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\alpha-k+1)}.$$

Notons cette fois que $C_k^\alpha\neq 0$ même si $k>n$,

Définition 2.2.7 *Soit $\alpha>0$, La dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov à gauche d'ordre α de f est définie par :*

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \ {}^{GL}\mathcal{D}_+^\alpha f(t)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_k^\alpha f(t-kh).$$

Définissons aussi son analogue à droite.

Définition 2.2.8 *Soit $\alpha>0$, La dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov à droite d'ordre α de f est définie par :*

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \ {}^{GL}\mathcal{D}_-^\alpha f(t)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_k^\alpha f(t+kh).$$

La dérivée de Grünwald-Letnikov présente un intérêt numérique évident. Si h est assez petit, l'évaluation discrète de $\frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_k^\alpha f(t-kh)$ permet d'approximer la dérivée fractionnaire (de Liouville) sur $\mathbb{R}$.

2.2.4 Propriétés des opérateurs fractionnaires

Un des intérêts du calcul fractionnaire est qu'il généralise aussi certaines propriétés des dérivées et intégrales classiques : la dérivée fractionnaire de l'intégrale du même ordre donne l'identité, la dérivée d'une dérivée redonne sous certaines conditions une dérivée, l'intégration par parties reste valable et les opérateurs fractionnaires se conjuguent très bien avec les transformées de Fourier et Laplace. Cette dernière propriété est omniprésente dans de nombreux domaines d'applications présents dans la section précédente.

Linéarité

La différentiation et l'intégration fractionnaires sont des opérateurs linéaires :

$$\mathcal{D}^{\alpha}\left(\lambda f(t)+\mu g(t)\right)=\lambda\mathcal{D}^{\alpha}f(t)+\mu\mathcal{D}^{\alpha}g(t),$$

pour n'importe quelle approche de dérivation.

Compositions entre opérateurs

Proposition 2.2.3 *Soit* $\alpha>0,\ \beta>0,\ n=[\alpha]+1,$ *on a les propriétés suivantes:*

1. Si $f(t)\in L_p([a,b]),\ (1\leq p\leq\infty),,$ *alors*

$$\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}f\right)(t)=f(t),\ \textit{et}\ \left(\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha}f\right)(t)=f(t),$$

2. Si $\alpha>\beta,$ *et* $f(t)\in L_p([a,b]),\ (1\leq p\leq\infty),$ *alors*

$$\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\beta}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}f\right)(t)=\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha-\beta}f\right)(t),\ \textit{et}\ \left(\mathcal{D}_{b^-}^{\beta}\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha}f\right)(t)=\left(\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha-\beta}f\right)(t),$$

3. Si $f(t)\in C^{q}([a,b]),\ q=[\alpha+\beta]+1,$ *alors*

$$\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\mathcal{D}_{a^+}^{\beta}f\right)(t)=\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha+\beta}f\right)(t),\ \textit{et}\ \left(\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}\mathcal{D}_{b^-}^{\beta}f\right)(t)=\left(\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha+\beta}f\right)(t),$$

4. Si $f(t)\in L_1([a,b]),\ \left(\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}f\right)\in AC^{n}([a,b]),$ *alors*

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f\right)(t) &= f(t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}f\right)^{(n-k)}(a)}{\Gamma(\alpha-k+1)}(t-a)^{\alpha-k},\\ \left(\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}f\right)(t) &= f(t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n-k}\left(\mathcal{I}_{b^-}^{n-\alpha}f\right)^{(n-k)}(b)}{\Gamma(\alpha-k+1)}(b-t)^{\alpha-k},\end{aligned}$$

En particulier si $0<\alpha\leq 1$

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\ \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\ f\right)(t) &= f(t),\\ \left(\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha}\ {}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}\ f\right)(t) &= f(t),\end{aligned}$$

Proposition 2.2.4 *Soit* $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ n = [\alpha] + 1,$ *on a les propriétés suivantes:*

1. Si $f(t) \in C^q([a,b]),\ q = [\alpha+\beta]+1,$ *alors*

$$\left({}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}\ {}^C\mathcal{D}^{\beta}_{a^+}\ f\right)(t) = \left({}^C\mathcal{D}^{\alpha+\beta}_{a^+} f\right)(t),\ \ et\ \left({}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{b^-}\ {}^C\mathcal{D}^{\beta}_{b^-}\ f\right)(t) = \left({}^C\mathcal{D}^{\alpha+\beta}_{b^-} f\right)(t),$$

2. Si $f(t) \in C^n([a,b]),$ *ou* $f(t) \in AC^n([a,b]),$ *alors*

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+}\ {}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}\ f\right)(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f)^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k, \\
\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{b^-}\ {}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{b^-}\ f\right)(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}(f)^{(k)}(b)}{k!}(b-t)^k,
\end{aligned}$$

En particulier si $0 < \alpha \leq 1$

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+}\ {}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}\ f\right)(t) &= f(t) - f(a), \\
\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{b^-}\ {}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{b^-}\ f\right)(t) &= f(t) - f(b),
\end{aligned}$$

Intégration par parties

La formule d'intégration par parties est une des propriétés extensibles aux opérateurs fractionnaires mais là encore sous certaines restrictions. C'est ici qu'apparaissent inévitablement les opérateurs à droite. Dans [8] apparait une formule d'intégration par parties, mais elle requiert plusieurs conditions. Nous préférons donner ici une version simplifiée avec des conditions explicites que nous avons trouvé dans [35].

Corollaire 2.2.2 *Soit* $\alpha > 0$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *tels que* $n - 1 < \alpha \leq n$. *Soit* $f(t) \in C^n([a,b]),$ *et* $g(t) \in C^n([a,b]),$ *et Alors*

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+} g(t)\,dt &= \int_a^b \mathcal{D}^{\alpha}_{b^-} f(t)\,g(t)\,dt \\
\int_a^b f(t)\,\mathcal{D}^{\alpha}_{b^-} g(t)\,dt &= \int_a^b \mathcal{D}^{\alpha}_{a^+} f(t)\,g(t)\,dt
\end{aligned}$$

Transformée de Fourier

La transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ peut-être définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-it\xi} dt$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n sont intégrables, alors

$$\mathcal{F}\left[f^{(n)}\right](\xi) = (i\xi)^n \mathcal{F}[f](\xi)$$

Ce résultat se généralise aux opérateurs fractionnaires définis sur $\mathbb{R}$.

Lemme 2.2.2 *Soit* $0 < \alpha \leq 1,\ f \in L^1(\mathbb{R})$ *et* $\mathcal{D}_{\pm}^{k+\alpha-n} f \in L^1(\mathbb{R}),\ 1 \leq k \leq n.$ *Alors*

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{I}_{\pm}^{\alpha} f\right](\xi) = (\pm i\xi)^{-\alpha} \mathcal{F}[f](\xi)$$

Corollaire 2.2.3 *Soit* $\alpha > 0$ *et* $n = [\alpha] + 1,$ *et* $f \in L^1(\mathbb{R})$. *Alors*

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{D}_{\pm}^{\alpha} f\right](\xi) = (\pm i\xi)^{\alpha} \mathcal{F}[f](\xi)$$

Preuve. D'aprés le lemme 2.2.2,

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{I}_{\pm}^{n-\alpha} f\right](\xi) = (\pm i\xi)^{\alpha-n} \mathcal{F}[f](\xi)$$

Comme pour tout $1 \leq k \leq n$, $\frac{d^k}{dt^k}\mathcal{I}_{+}^{n-\alpha} f = \mathcal{D}_{+}^{k+\alpha-n} f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[\mathcal{D}_{+}^{\alpha} f\right](\xi) &= \mathcal{F}\left[\frac{d^n}{dt^n}\mathcal{I}_{+}^{n-\alpha} f\right] = (i\xi)^n \mathcal{F}\left[\mathcal{I}_{+}^{n-\alpha} f\right](\xi) \\
&= (i\xi)^n (+i\xi)^{\alpha-n} \mathcal{F}[f](\xi) \\
&= (+i\xi)^{\alpha} \mathcal{F}[f](\xi).
\end{aligned}$$

De même pour tout $1 \leq k \leq n$, $\frac{d^k}{dt^k}\mathcal{I}_{-}^{n-\alpha} f = (-1)^k \mathcal{D}_{-}^{k+\alpha-n} f \in L^1(\mathbb{R})$, donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[\mathcal{D}_{-}^{\alpha} f\right](\xi) &= \mathcal{F}\left[(-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\mathcal{I}_{-}^{n-\alpha} f\right] = (-1)^n (i\xi)^n \mathcal{F}\left[\mathcal{I}_{-}^{n-\alpha} f\right](\xi) \\
&= (-i\xi)^n (-i\xi)^{\alpha-n} \mathcal{F}[f](\xi) \\
&= (-i\xi)^{\alpha} \mathcal{F}[f](\xi).
\end{aligned}$$

■

Transformée de Laplace

On dit qu'une fonction réelle $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est à croissance sous-exponentielle si

$$\exists A > 0,\ \exists s_0 \in \mathbb{R},\ \exists t_0 > 0,\ \forall t > t_0\ ;\ |f(t)| \leq e^{s_0 t}.$$

Si $f \in C^n(\mathbb{R}^+)$, est à croissance sous-exponentielle, rappelons que sa transformée de Laplace est définie par

$$\forall s > s_0,\ \mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st} dt$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, si $f \in C^n(\mathbb{R}^+)$, est à croissance sous-exponentielle, alors

$$\forall s > s_0,\ \mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0). \tag{2.1}$$

L'extension au cas fractionnaire s'effectue cette fois avec les opérateurs fractionnaires à supports minorés par 0.

Lemme 2.2.3 *Soit $\alpha > 0$ et $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$, est à croissance sous-exponentielle. Alors*

$$\forall s > s_0,\ \mathcal{L}[\mathcal{I}_0^\alpha f](s) = s^{-\alpha} \mathcal{L}[f](s).$$

Proposition 2.2.5 *Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, et $f \in C^n(\mathbb{R}^+)$, est à croissance sous-exponentielle. Alors*

1.

$$\forall s > s_0,\ \mathcal{L}[\mathcal{D}_0^\alpha f](s) = s^\alpha \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} \left(\mathcal{I}_0^{n-\alpha} f\right)^{(k)}(0).$$

2.

$$\forall s > s_0,\ \mathcal{L}\left[{}^C\mathcal{D}_0^\alpha f\right](s) = s^\alpha \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} (f)^{(k)}(0).$$

Preuve.

1. On applique (2.1) à $\left(\mathcal{I}_0^{n-\alpha} f\right)$, puis on utilise le lemme 2.2.3 :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\mathcal{D}_0^\alpha f](s) &= \mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}\mathcal{I}_0^{n-\alpha} f\right](s) = s^n \mathcal{L}\left[\mathcal{I}_0^{n-\alpha} f\right](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} \left(\mathcal{I}_0^{n-\alpha} f\right)^{(k)}(0) \\
&= s^n s^{\alpha-n} \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} \left(\mathcal{I}_0^{n-\alpha} f\right)^{(k)}(0) \\
&= s^\alpha \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} \left(\mathcal{I}_0^{n-\alpha} f\right)^{(k)}(0).
\end{aligned}$$

2. De même on applique le lemme 2.2.3 à $f^{(n)}$, puis on utilise (2.1) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[{}^{C}\mathcal{D}_0^\alpha f\right](s) &= \mathcal{L}\left[\mathcal{I}_0^{n-\alpha}\frac{d^n}{dt^n}f\right](s) = s^{\alpha-n}\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) \\
&= s^{\alpha-n}\left[s^n\mathcal{L}\left[f\right](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}f^{(k)}(0)\right] \\
&= s^{\alpha}\mathcal{L}\left[f\right](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1}f^{(k)}(0).
\end{aligned}$$

■

Remarque 2.2.5 *On remarquera l'absence de généralisation pour la dérivée du produit et de la composition de deux fonctions. Ces caractéristiques de la dérivée classique passent effectivement mal au fractionnaire. Quelle que soit la définition utilisée et même avec des restrictions sur les fonctions :*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}^\alpha(fg) \neq (\mathcal{D}^\alpha f)\,g + f\,(\mathcal{D}^\alpha g) \\
&\mathcal{D}^\alpha(fg) \neq \tfrac{(\mathcal{D}^\alpha f)g - f(\mathcal{D}^\alpha g)}{g^2} \\
&\mathcal{D}^\alpha(f\circ g) \neq (\mathcal{D}^\alpha f)(g).g'.
\end{aligned}$$