Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et Informatiques

Master EDP et Application
Première année (Semestre 02)

ARIOUA YACINE

Introduction Aux Calcul Fractionnaire Et Application

Année: **2021/2022**

Chapitre 3

Equations Différentielles Fractionnaires

Dans cette chapitra on va discuter les propriétés d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire. On va se restreindre à des problèmes aux conditions initiales (problèmes de Cauchy). On commence par donner une définition d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire (EDF) :

Définition 3.0.9 *Soit* $\alpha > 0,\ \alpha \notin \mathbb{N},\ n = [\alpha] + 1$ *et* $f : A \sqsubset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$ *alors :*

$$\mathcal{D}^{\alpha} y\left(t\right) = f\left(t, y\left(t\right)\right), \tag{3.1}$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville.
De la même manière

$$^{C}\mathcal{D}^{\alpha} y\left(t\right) = f\left(t, y\left(t\right)\right), \tag{3.3}$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Caputo.

3.1 Equation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville

On commence par l'équation homogène de type Riemann-Liouville.

Lemme 3.1.1 *Soit $\alpha > 0$. Si nous supposons que $u \in C(0,1) \cap L(0,1)$, alors l'quation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville:*

$$\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} u(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{3.5}$$

admet une solution unique

$$u(t) = C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + \cdots + C_n t^{\alpha-n}.$$

où $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 1, 2, \ldots, n$.

Preuve.

Soit $\alpha > 0$. D'après la Remarque 2.2.2, on a:

$$\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} t^{\alpha-m} = 0, \qquad \text{avec} \quad m = 1, 2, \ldots, n.$$

Alors l'équation différentielle fractionnaire (3.5), admet une solution particulière, comme

$$u(t) = C_m t^{\alpha-m}, \qquad \text{avec} \quad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.6}$$

où $C_m \in \mathbb{R}$.

Donc la solution générale de (3.5), donné comme une somme des solutions particulières (3.6), C.-à-d.

$$u(t) = C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + \cdots + C_n t^{\alpha-n},$$

où $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 1, 2, \ldots, n$. ∎

Lemme 3.1.2 *Supposons que*

$$u \in C(0,1) \cap L(0,1), \quad et \quad \mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} u \in C(0,1) \cap L(0,1).$$

Alors:

$$\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} \mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} u(t) = u(t) + C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + \cdots + C_n t^{\alpha-n}. \tag{3.7}$$

où $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 1, 2, \ldots, n$.

Preuve.

Soit $\alpha > 0$. Pour tout $u \in C(0,1) \cap L(0,1)$ (Proposition 2.2.3) on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}u(t) &= u(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\mathcal{I}_{0^+}^{n-\alpha}u^{(n-k)}\right)(0)}{\Gamma(\alpha-k+1)} t^{\alpha-k} \\
&= u(t) - \left[\frac{\left(\mathcal{I}_{0^+}^{n-\alpha}u^{(n-1)}\right)(0)}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \frac{\left(\mathcal{I}_{0^+}^{n-\alpha}u^{(n-2)}\right)(0)}{\Gamma(\alpha-1)} t^{\alpha-2} + .. + \frac{\left(\mathcal{I}_{0^+}^{n-\alpha}u\right)(0)}{\Gamma(\alpha-n+1)} t^{\alpha-n} \right]
\end{aligned}$$

On pose $C_m = -\frac{\left(\mathcal{I}_{0^+}^{n-\alpha}u^{(n-m)}\right)(0)}{\Gamma(\alpha-m+1)} \in \mathbb{R}$, pour chaque $m = 1, 2, \ldots, n$, on trouve l'égalité (3.7).

■

Lemme 3.1.3 *Soit* $1 < \alpha \leq 2$, *et* $y \in C([0,1])$.
Alors l'unique solution de preblème aux limites

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}u(t) + y(t) = 0, & 0 < t < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}, \tag{3.8}$$

est donné par:

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\, y(s)\, ds,$$

tel que:

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{[t(1-s)]^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & si \quad 0 \leq s \leq t \leq 1. \\ \frac{[t(1-s)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & si \quad 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases} \tag{3.9}$$

Preuve.

En appliquant $\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}$, sur l'équation (3.8) on obtient:

$$\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\left[\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}u(t) + y(t)\right] = 0 \Leftrightarrow \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}u(t) + \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}y(t) = 0.$$

D'après le Lemme 3.1.2, pour $1 < \alpha \leq 2$ $(n = [\alpha] + 1 = 2)$, on a:

$$\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}u(t) = u(t) + C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2}, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

donc

$$u(t) + C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}y(t) = 0,$$

ce qui imlique

$$u(t) = -\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}y(t) - C_1 t^{\alpha-1} - C_2 t^{\alpha-2},$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation (3.8) , donne par:

$$u(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds - C_1 t^{\alpha-1} - C_2 t^{\alpha-2}. \tag{3.10}$$

Les condition aux limites implique que:

$$\begin{cases} u(0) = 0 & \Rightarrow \quad 0 = -0 - 0 - \lim\limits_{t \to 0} C_2 t^{\alpha-2} & \Rightarrow \quad C_2 = 0, \\ u(1) = 0 & \Rightarrow \quad 0 = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds - C_1 & \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds. \end{cases}$$

L'équation intégro-différentielle (3.10) , équivalente à:

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds \\ &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (1-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds \\ &\quad + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_t^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left[t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1} \right] y(s)\, ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_t^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds \\ &= \int_0^t \frac{[t(1-s)]^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(s)\, ds + \int_t^1 \frac{[t(1-s)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(s)\, ds \\ &= \int_0^1 G(t,s)\, y(s)\, ds. \end{aligned}$$

La preuve est complet. ■

3.2 Equation différentielle fractionnaire de type Caputo

On commence par l'équation homogène de type Caputo.

Lemme 3.2.1 *Soit $\alpha > 0$. Si nous supposons que $u \in C(0,1) \cap L(0,1)$, alors l'équation différentielle fractionnaire de type Caputo:*

$$ {}^{C}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}\, u(t) = 0, \tag{3.11}$$

admet une solution unique

$$u(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \cdots + C_{n-1} t^{n-1}.$$

où $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Preuve.
Soit $\alpha > 0$. D'après la Remarque 2.2.4, on a:

$$ {}^{C}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}\, t^m = 0, \qquad \text{pour} \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Alors l'équation différentielle fractionnaire (3.11), admet une solution particulière, comme

$$u(t) = C_m t^m, \qquad \text{pour} \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{3.12}$$

où $C_m \in \mathbb{R}$.
Donc la solution générale de (3.11), donné comme une somme des solutions particulières (3.12), C.-à-d.

$$u(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \cdots + C_{n-1} t^{n-1}.$$

■

Lemme 3.2.2 *Supposons que $u \in C^n([0,1])$. Alors:*

$$\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\, {}^{C}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}\, u(t) = u(t) + C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \cdots + C_{n-1} t^{n-1}. \tag{3.13}$$

où $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Preuve.

Soit $\alpha > 0$. Pour tout $u \in C^n([0,1])$ (Proposition 2.2.4) on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\ {}^{C}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}\ u(t) &= u(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^{(k)}(0)}{k!} t^k \\
&= u(t) - \left[u(0) + u'(0)\,t + \frac{u''(0)}{2} t^2 + \cdots + \frac{u^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} t^{n-1} \right]
\end{aligned}$$

On pose $C_m = -\frac{u^{(m)}(0)}{m!} \in \mathbb{R}$, pour chaque $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, on trouve facilement l'égalité (3.13) . ■

Lemme 3.2.3 *Soit* $1 < \alpha \leq 2$, *et* $y \in C([0,1])$.
Alors l'unique solution de preblème aux limites

$$\begin{cases} {}^{C}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} u(t) = y(t), \qquad 0 < t < 1 \\ u(0) + u'(0) = 0, \ \ u(1) + u'(1) = 0 \end{cases}, \tag{3.14}$$

est donné par:

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\, y(s)\, ds,$$

tel que:

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-1} + (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} & si \quad 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} & si \quad 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases} \tag{3.15}$$

Preuve.

En appliquant $\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}$, sur l'équation (3.14) on obtient:

$$\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} \left[{}^{C}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} u(t) - y(t) \right] = 0 \Leftrightarrow \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\ {}^{C}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}\ u(t) - \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} y(t) = 0.$$

D'après le Lemme 3.2.2, pour $1 < \alpha \leq 2$ $(n = [\alpha] + 1 = 2)$, on a:

$$\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\ {}^{C}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}\ u(t) = u(t) + C_0 + C_1 t, \ \ C_0, C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

donc

$$u(t) + C_0 + C_1 t - \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} y(t) = 0,$$

ce qui imlique

$$u(t) = \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} y(t) - C_0 - C_1 t,$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation (3.14) , donne par:

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds - C_0 - C_1 t. \tag{3.16}$$

Les condition aux limites implique que:

$$\begin{cases} u(0) + u'(0) = 0 & \Rightarrow \quad C_0 + C_1 = 0 \\ u(1) + u'(1) = 0 & \Rightarrow \quad C_0 + 2C_1 = \left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} y\right)(1) + \left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} y\right)'(1) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} C_0 = -\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} y\right)(1) - \left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} y\right)'(1) \\ \qquad = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} y(s)\, ds \\ C_1 = \left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} y\right)(1) + \left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} y\right)'(1) \\ \qquad = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} y(s)\, ds \end{cases}$$

L'équation intégro-différentielle (3.14) , équivalente à:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} y(s)\, ds - \frac{t}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds \\ &\quad - \frac{t}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} y(s)\, ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds + \frac{(1-t)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (1-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds \\ &\quad + \frac{(1-t)}{\Gamma(\alpha)} \int_t^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds + \frac{(1-t)}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^t (1-s)^{\alpha-2} y(s)\, ds \\ &\quad + \frac{(1-t)}{\Gamma(\alpha-1)} \int_t^1 (1-s)^{\alpha-2} y(s)\, ds \\ &= \int_0^t \left[\frac{(t-s)^{\alpha-1} + (1-t)(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \right] y(s)\, ds \\ &\quad + \int_t^1 \left[\frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \right] y(s)\, ds \\ &= \int_0^1 G(t,s)\, y(s)\, ds. \end{aligned}$$

La preuve est complet. ■

3.3 Existence et uniquence de la solution

Ce section constitue une partie préliminaire dans la quelle on rappelle des notions et des résultats fondamentaux de la théorie de l'analyse fonctionnelle (principe de contraction de Banach, équicontinuité, théorème de Schauder, théorème d'Arzela-Ascoli,...). On abordera ensuite, la question d'existence et d'unicité de la solution pour le problème aux limites d'équation différentielle d'ordre fractionnaire.

3.3.1 Quelques théorèmes de point fixe

Définition 3.3.1 *Soit* (E, d) *un espace métrique complet et* $F : E \to E$ *une application continue.*

i) *On dit que* $x \in E$ *est un point fixe de* F *si* $f(u) = u$.

ii) *On dit que* F *est contractante si elle est lipschitzienne de rapport* $0 < L < 1$, *c'est-à-dire s'il existe* $0 < L < 1$, *tel que*

$$\forall u, v \in E, \; d\left(F(u), F(v)\right) \leq Ld\left(u, v\right), \; 0 < L < 1.$$

Définition 3.3.2 ***(Complètement continue)***

Soient X *et* Y *deux espaces de Banach et* $F : X \to Y$ *une application définie de* X *à valeurs dans* F. *On dit que* F *est complètement continue si elle est continue et transforme tout borné de* X *en un ensemble relativement compact dans* Y. F *est dite compacte si* $F(X)$ *est relativement compacte dans* Y.

Théorème 3.3.1 ***(Ascoli-Arzelà)***

Soit A un sous ensemble de $C(J; E)$; A est relativement compact dans $C(J; E)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

i) L'ensemble$A$ est borné. i.e il existe une constante $K > 0$ tel que :

$$\|f\| \leq K \text{ pour tout } x \in J \text{ et } f \in A.$$

ii) L'ensemble A est équicontinue. i.e pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|t_1 - t_2| < \delta \Longrightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon \text{ pour tous } t_1, t_2 \in J \text{ et } f \in A.$$

iii) Pour tout $x \in J$ l'ensemble $\{f(x), f \in A\} \subset E$ est relativement compact.

Théorème 3.3.2 ***(Banach)***
Soient X un espace de Banach, et un opérateur contractant $F : X \to X$.Alors F admet un point fixe unique.
i.e $\exists ! u \in X$ tel que $Fu = u$.

Le deuxième théorème de point fixe qu'on va énnoncer est celui de Schauder.

Théorème 3.3.3 ***(Schauder)***
Soit $(E; d)$ un espace metrique complet, et X une partie convexe et fermée de E, et soit $F : X \to X$ une application telle que l'ensemble $\{Fu : u \in X\}$ est relativement compacte dans E. Alors F possède au moins un point fixe.

Théorème 3.3.4 ***(Leray-SchauderAlternative)*** *Soit X un espace de Banach, C une sous-ensmble convexe et fermée dans X, U est un sous-ensmble ouvert de C et $0 \in U$. Supposons que $F : \bar{U} \longrightarrow C$ un opérateur continu et compact ($F(\bar{U})$ est ralativement compact de C). Alors*
(i) F admet un point fixe de $\bar{U}$, ou
(ii) Il existe un $u \in \partial U$ et $\lambda \in (0, 1)$ avec $u = \lambda F(u)$.

Théorème 3.3.5 ***(Schaefer)***
Soient X un espace de Banach et $F : X \to X$ un opérateur complètement continu. Si l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{u \in X : \lambda F u = u,\ \lambda \in]0, 1[\},$$

est borné, alors F possède au moins un point fixe.

Théorème 3.3.6 ***(Krasnoselskii)***
Soit M un sous ensmble fermé et borné, convexe et non vide d'un espace de Banach X. Soient A, B deux opérateures tels que
(a) $Ax + By \in M,\ \forall x, y \in M$.
(b) A est compact et continu.
(c) B est un opérateur contractante.
Alors il existe $z \in M$ tel que $z = Az + Bz$.

3.3.2 Problème de Cauchy d'equation différentielle d'ordre fractionnaire

On va étudier l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy pour des equation différentielles d'ordre fractionnaire (on utilise la dérivée au sens de Caputo) et on a le problème sous la forme suivant :

$$\begin{cases} {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [0, T], \quad 0 < \alpha < 1 \\ y(0) = y_0, \quad y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}, \tag{3.17}$$

tell que $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Lemme 3.3.1 *Soit $0 < \alpha < 1$ et soit $h : [0, T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction y est une solution de problème de Cauchy*

$$\begin{cases} {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}y(t) = h(t), \quad t \in [0, T], \quad 0 < \alpha < 1 \\ y(0) = y_0, \quad y_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.18}$$

si et seulement si elle est la solution de l'equation intégrale:

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha - 1} h(s) dx. \tag{3.19}$$

Preuve. On applique l'operateur $\mathcal{I}^{\alpha}$ à l'équation (3.18) on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^{\alpha}\, {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}y &= \mathcal{I}^{\alpha}f(t) \Rightarrow y(t) + c_0 = \mathcal{I}^{\alpha}h(t) \\ &\Rightarrow y(t) = \mathcal{I}^{\alpha}h(t) - c_0. \end{aligned}$$

La conditions initial donne

$$y(0) = (\mathcal{I}^{\alpha}h)(0) - c_0 = -c_0 \Rightarrow c_0 = -y_0.$$

Alors

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{I}^{\alpha}h(t) - (-y_0) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha - 1} h(s) dx + y_0. \end{aligned}$$

Inversment on a :

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha - 1} h(s) dx \\ &= \mathcal{I}^{\alpha}h(t) + y_0, \end{aligned}$$

on applique ${}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}$ à l'equation intégrale (3.19),

$$\begin{aligned} {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}y(t) &= {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}(\mathcal{I}^{\alpha}h)(t) +^{C}\mathcal{D}^{\alpha}(y_0) \\ &= h(t) \end{aligned}$$

donc il rest vérifier que $y(0) = y_0$,

$$\begin{aligned} y(0) &= \mathcal{I}^{\alpha}h(0) + y_0 = 0 + y_0 \\ &= y_0 \end{aligned}$$

Alors y est solution du problème (3.18). ■

Théorème 3.3.7 *Soit* $0 < \alpha < 1$ *et* $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et vérifie la condition de Lipschitz suivant :*

$$|f(t,y) - f(t,z)| \leq k\,|y - z|\,, \quad \forall t \in [0,T], \ \ et\ y, z \in \mathbb{R}.$$

Si

$$\frac{kT^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} < 1,$$

alors il existe une solution unique de problème de Cauchy (3.17).

Preuve. On utilise le théorème du point fixe de Banach 3.3.2.
On transforme le problème (3.17) en un problème au point fixe (Lemme 3.3.1), en considérant l'opérateur :

$$\begin{array}{llll} F: & C([0,T],\mathbb{R}) & \to & C([0,T],\mathbb{R}) \\ & y & \to & F(y)(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s))dx. \end{array}$$

où $C([0,T],\mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues y définies de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$; muni de la norme

$$\|y\| = \sup_{t\in[0,T]} |y(t)|\,.$$

Il est clair, que les points fixes de l'opérateur F sont les solutions du problème (3.17).
F est bien défini, en effet : si $y(t) \in C([0,T],\mathbb{R})$, alors $Fy(t) \in C([0,T],\mathbb{R})$.
Pour montrer que F admet un point fixe, il suffit de montrer que F est une contraction, en

effet si $y_1, y_2 \in C\left([0,T],\mathbb{R}\right),\ t \in [0,T]$, en utilisant la condition de Lipschitiz on obtient::

$$\begin{aligned}
|Fy_1 - Fy_2| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (f(s,y_1(s)) - f(s,y_2(s)))(t-s)^{\alpha-1}ds\right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (|f(s,y_1(s)) - f(s,y_2(s))|\,(t-s)^{\alpha-1}ds \\
&\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t |y_1(s) - y_2(s)|\,(t-s)^{\alpha-1}ds \\
&\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\|y_1 - y_2\|\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds \\
&\leq \frac{kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|y_1 - y_2\|
\end{aligned}$$

En vertu de $\frac{kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < 1$, on peut déduire que F est une contraction, et d'après le théorème de Banach F admet un seul point fixe qui est une solution du problème (3.17). ∎

3.3.3 Problème aux Limites d'equation différentielle d'ordre fractionnaire

Dans cette partie on va étudier l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux limites d'equation différentielle d'ordre fractionnaire sous formes :

$$\begin{cases} {}^{C}\mathcal{D}^\alpha y(t) = f(t,y(t)), \quad t \in [0,T], \quad 0 < \alpha < 1 \\ ay(0) + by(T) = c \end{cases}, \tag{3.20}$$

tell que $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et a, b des constant réelles $(a + b \neq 0)$.

Définition 3.3.3 *On dit que une fonction $y \in C^1([0,T],\ \mathbb{R})$, est solution du problème $(3,20)$ si y vérifier l'équation ${}^{C}\mathcal{D}^\alpha y(t) = f(t,y(t))$, sur A et avec la condition $ay(0)+by(T) = c$.*

Lemme 3.3.2 *Soit $0 < \alpha < 1$ et soit $h : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction y est une solution de problème de Cauchy*

$$\begin{cases} {}^{C}\mathcal{D}^\alpha y(t) = h(t), \quad t \in [0,T], \quad 0 < \alpha < 1 \\ ay(0) + by(T) = c \end{cases}, \tag{3.21}$$

si et seulement si elle est la solution de l'equation intégrale:

$$y(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds-\frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds-c\right]. \tag{3.22}$$

Preuve. On applique l'opéateur $\mathcal{I}^\alpha$, à l'équation (3.21),

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^\alpha\, {}^C\mathcal{D}^\alpha y &= \mathcal{I}^\alpha f(t) \Rightarrow y(t)+c_0=I^\alpha h(t)\\ &\Rightarrow y(t)=\mathcal{I}^\alpha h(t)-c_0.\end{aligned}$$

D'aprés les cnditions aux limites on a :

$$\begin{aligned}&y(0)=(\mathcal{I}^\alpha h)(0)-c_0=-c_0.\\ &y(T)=(\mathcal{I}^\alpha h)(T)-c_0.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}ay(0)+by(T) &= -ac_0+b[\mathcal{I}^\alpha h(T)-c_0]=c\\ &\Rightarrow (a+b)c_0=b(\mathcal{I}^\alpha h)(T)-c\\ &\Rightarrow c_0=\frac{1}{a+b}[b(\mathcal{I}^\alpha h)(T)-c], \quad a+b\neq 0\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathcal{I}^\alpha h(t)-\frac{1}{a+b}[b(\mathcal{I}^\alpha h)(T)-c]\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds-\frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds-c\right].\end{aligned}$$

Inversment on a :

$$y(t)=(\mathcal{I}^\alpha h)(t)-\frac{1}{a+b}[b\left(\mathcal{I}^\alpha h\right)(T)-c],$$

on applique ${}^C\mathcal{D}^\alpha$ à l'equation intégrale (3.22),

$$\begin{aligned}{}^C\mathcal{D}^\alpha y(t) &= {}^C\mathcal{D}^\alpha(\mathcal{I}^\alpha h)(t)-{}^C D^\alpha[\frac{1}{a+b}(b\left(\mathcal{I}^\alpha h\right)(T)-c]\\ &= h(t).\end{aligned}$$

Il rest que de vérifier $ay(0)+by(T)=c$.

$$\begin{cases} y(0)=\left(\mathcal{I}^\alpha h\right)(0)-\frac{1}{a+b}\left[b(\mathcal{I}^\alpha h)(T)-c\right]\\ y(T)=\left(\mathcal{I}^\alpha h\right)(T)-\frac{1}{a+b}\left[b(\mathcal{I}^\alpha h)(T)-c\right]\end{cases},$$

donc

$$\begin{aligned} ay(0)+by(T) &= \frac{-a}{a+b}\left[b(\mathcal{I}^{\alpha}h)(T)-c\right]+b(\mathcal{I}^{\alpha}h)(T)-\frac{b}{a+b}\left[b(\mathcal{I}^{\alpha}h)(T)-c\right] \\ &= -\frac{a+b}{a+b}\left[b(\mathcal{I}^{\alpha}h)(T)-c\right]+b(\mathcal{I}^{\alpha}h)(T) \\ &= -b(\mathcal{I}^{\alpha}h)(t)+c+b(\mathcal{I}^{\alpha}h)(T) \\ &= c. \end{aligned}$$

Alors y est solution du problème (3.21).

■

Théorème 3.3.8 *Soit* $0<\alpha<1$ *et* $f:[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *et vérifie la condition de Lipschitz suivant :*

$$|f(t,x)-f(t,y)|\leq k(x-y), \quad \forall t\in[0,T], \;\; et\; x,y\in\mathbb{R}$$

si

$$\frac{kT^{\alpha}\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\Gamma(\alpha+1)}<1, \tag{3.23}$$

Alors le problème $(2,12)$ *admet une solution unique sur* $[0,T]$*,*

Preuve. On transformer le problème $(3,20)$ en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur

$$F:C([0,T],\mathbb{R})\to C([0,T],\mathbb{R})$$

défini par :

$$F(y)(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds-\frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds-c\right]. \tag{3.24}$$

Donc les points fixes de F sont les solution du problème (3.20) on a :
F est bien défini, en effet : si $y\in C([0,T],\mathbb{R})$ alors $(Fy)\in C([0,T],\mathbb{R})$,
donc si montrer F est contraction alors F admet un point fixe en effet si $x,y\in C([0,T],\mathbb{R})$

alors $\forall t \in [0,T]$, on a :

$$\begin{aligned}
|F(x)(t)-F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,|f(s,x(s))-f(s,y(s))|\,ds \\
&\quad +\frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s))-f(s,y(s))|ds \\
&\leq \frac{k\,\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds+\frac{|b|k\,\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}ds \\
&\leq \frac{kT^\alpha\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\alpha\Gamma(\alpha)}\,\|x-y\|_\infty\,.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|F(x)-F(y)\|_\infty \leq \frac{kT^\alpha\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\alpha\Gamma(\alpha)}\,\|x-y\|_\infty\,.$$

En vertu de (3.23), on déduire que F est une contraction et d'après le théorème de Banach F admet un seul point fixe et cette point est la solution du problème $(3,20)$. ■

On utilisant le théorème du point fixe de Schaefer pour deuxième résultat de la solution du $(3,20)$.

Théorème 3.3.9 *Soit les deux condition suivant:*
(H1) La fonction $f:[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue.
(H2) Il existe une constant $M>0$ tell que :

$$|f(t,x)|\leq M, \quad \forall t\in[0,T], \;\; et\; x\in\mathbb{R}.$$

Alors, le problème $(3,20)$ admet au moins une solution sur $[0,T]$.

Preuve. On va utiliser le théorème du point fixe de Schaefer pour montrer que F défini par (3.24) admet un point fixe. La démonstration se fait en plusieurs étapes.

Etape 1. F est continue.

Soit $\{y_n\}$ une suite dans $C([0,T],\mathbb{R})$ convergent pour $\|.\|_\infty$ vers y. C-à-d

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n-y\|_\infty=0.$$

Il faut montrer que $\lim_{n\to\infty} \|F(y_n) - F(y)\|_\infty = 0, \quad \forall t \in [0,T]$ on a :

$$\begin{aligned}
|F(y_n)(t) - F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y_n(s) - f(s, y(s))| \, ds \\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| \, ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sup_{x\in[0,T]} |f(s, y_n(s) - f(s, y(s))| \, ds \\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \sup_{x\in[0,T]} |f(s, y_n(s) - f(s, y(s))| \, ds \\
&\leq \frac{\|f(., y_n(.)) - f(., y(.))\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{|b|}{|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds \right] \\
&\leq \frac{T^\alpha \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|f(., y_n(.)) - f(., y(.))\|_\infty .
\end{aligned}$$

Puisque f est continue, alors

$$\|F(y_n)(t) - F(y)(t)\| \leq \frac{T^\alpha \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\Gamma(\alpha+1)} \|f(., y_n(.)) - f(., y(.))\|_\infty \to 0 \text{ quand n} \to \infty.$$

d'où la continuité de F.

Etape 2. L'image de tout ensemble borné par F est un ensemble borné dans $C([0,T], \mathbb{R})$, en effet suffit de montrer que pour tout $r > 0$, il existe une constante $L > 0$: pour tout $y \in B_r$,

$$B_r = \{y \in C([0,T], \mathbb{R}) : \|y\|_\infty \leq r\}$$

on a $\|F(y)\|_\infty \leq L$.

Par $(H2)$ on a pour tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}
|F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| \, ds \\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| \, ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{M|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|} T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\|F(y)\|_\infty \leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|} T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|} = L.$$

par suite $F(B_r)$ est borné.

Etape 3. L'image de tout borné par F est un ensemble équicontinu de $C([0,T],\mathbb{R})$.

Soit $t_1, t_2 \in (0,T],\ t_1 < t_2,\ B_r$ un ensemble borné de $C([0,T],\mathbb{R})$ et soit $y \in B_r$,

Alors :

$$\begin{aligned}
|F(y)(t_2 - F(y)(t_1)| &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left[(t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1}\right] ds \\
&\quad + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} ds \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} [(t_2 - t_1)^\alpha + t_1^\alpha - t_2^\alpha] + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2 - t_1)^\alpha \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2 - t_1)^\alpha + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} (t_1^\alpha - t_2^\alpha),
\end{aligned}$$

qunand $t_1 \to t_2$, momber droit de l'inégalité précédent tend vers 0, d'où la continuité de F d'après l'étape 2, et 3, et le théorème d'Ascoli-Arzélà, $F(B_r)$ est relativement compact pour tuot borné B_r. **C-à-d** F est complètement continu et par l'étape 1, F est continu par conséquent, $F : C([0,T],\mathbb{R}) \to C([0,T],\mathbb{R})$ est continu et complètement continu.

Etape 4.

Donc il reste à montrer que $\mathcal{E} = \{y \in C(A,\mathbb{R}) : y = \lambda F(y)\}$ tell que $0 < \lambda < 1$, est borné.

Soit $y \in \mathcal{E} \Rightarrow y = \lambda F(y)$, donc $\forall t \in [0,T]$, on a :

$$y(t) = \lambda \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - c \right] \right],$$

et d'après $(H2)$, et $\forall t \in [0,T]$ on a :

$$\begin{aligned}
|F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds \\
&\quad + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{|c|}{|a+b|} + \frac{M|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds \\
&\leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|} T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\|F(y)\|_\infty \leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|} T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|} = R.$$

Cela $\mathcal{E}$ montre que est borné. alors d'après le théorème de Schaefer 3.3.5 on déduit que F admet au moins un point fixe que est une solution du problème (3.20). ■