



امتحان السداسي...2... في مقياس : .....TNS.....

السنة : .....2022.....  
التاريخ : .....01/06/2022.....  
المدة : ساعة ونصف

اللقب والاسم : .....  
الفوج : .....  
الموسم الجامعي : 2022-2021

### Question de cours : (3 points)

A partir des déclarations suivantes, répondre par vrais 'V' ou faut 'F'

- 1- Le calcul des filtres numériques et la transformée de Fourier discrète (TFD) ne dépend pas de la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  [ F ].
- 2- Un système discret à minimum de phase possède des pôles et des zéros à l'intérieur du cercle de rayon 1 [ V ].
- 3- La causalité d'un système discret est justifiée par des valeurs futures de la séquence [ F ].
- 4- La méthode de la transformation bilinéaire est basée sur l'approximation de la dérivée [ F ].
- 5- Généralement, les filtres RIF ont des avantages mieux que des filtres RII [ V ].
- 6- La TFD d'une séquence finie a des valeurs de fréquences,  $f_k = kf_e / N$ ,  $k = 0, \dots, N-1$  [ V ]

### Exercice 1 : (6 points)

1- Calcul de la transformée en Z de la séquence,  $x(n) = n + 3$  :

$$\begin{aligned} Z\{x(n+3)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n+3)z^{-n} = z^3 \left( X(z) - \sum_{j=0}^2 x(j)z^{-j} \right) \\ &= z^3 \left( \frac{z}{(z-1)^2} - (0 + 1 \cdot z^{-1} + 2 \cdot z^{-2}) \right) = \frac{3z^2 - 2z}{(z-1)^2} \end{aligned}$$

2- Calcul de  $X(z)$  et puis  $x(n)$  en fonction de  $n$  pour  $x(n+1) = x(n) + 4$  :

$$z(X(z) - x(0)) = X(z) + 4 \frac{z}{z-1} \quad (\text{la propriété de l'avance est appliquée})$$

$$X(z) = \frac{2z}{z-1} + 4 \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$x(n) = 2u(n) + 4nu(n) \quad (\text{la table de la TZ et la TZI est utilisée})$$

3- Calcul de la transformée en Z inverse de la fonction  $X(z) = \frac{4z}{(z-3)(z-1)^2}$

$$\operatorname{Res}_3^1 = \lim_{z \rightarrow 3} (X(z)z^{n-1}(z-3)) = \frac{4z}{(z-1)^2} z^{n-1} \Big|_{z=3} = 3^n$$

$$\operatorname{Res}_1^2 = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d(X(z)z^{n-1}(z-1)^2)}{dz} = 4 \frac{d}{dz} \frac{z^n}{(z-3)} \Big|_{z=1} = -1 - 2n$$

$$x(n) = (3^n - 1 - 2n)u(n)$$

### Exercice 2 : (6 points)

A partir du filtre analogique passe-bas de Chebyshev, nous avons les spécifications suivantes :

$$\begin{cases} -1dB \rightarrow \Omega_p = 0.2\pi \\ -15dB \rightarrow \Omega_s = 0.3\pi \end{cases}$$

1- Calcul de  $f_p$  et  $f_s$  pour une fréquence d'échantillonnage,  $f_e = 2kHz$  :

D'après le théorème d'échantillonnage, on a

$f_e \geq 2f_c$ , donc les fréquences sont normalisées par la relation :

$$\Omega_p = \frac{2f_p}{f_e} \pi \quad \text{et} \quad \Omega_s = \frac{2f_s}{f_e} \pi$$

$$\text{D'où, } f_p = \frac{0.2f_e}{2} = 200Hz \quad f_s = \frac{0.3f_e}{2} = 300Hz$$

2- Module du filtre de Chebyshev ?

$$|H_a(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 V_N^2(\Omega/\Omega_c)}} = \begin{cases} \left(1 + \varepsilon^2 \cos^2(N \cos^{-1}(\Omega/\Omega_c))\right)^{-0.5}, & \Omega/\Omega_c \leq 1 \\ \left(1 + \varepsilon^2 \cosh^2(N \cosh^{-1}(\Omega/\Omega_c))\right)^{-0.5}, & \Omega/\Omega_c > 1 \end{cases}$$

3- Calcul des paramètres de ce filtre et les pôles ?

$$\Omega_c = \Omega_p = 0.2\pi = 0.6283$$

Pour,  $\Omega = \Omega_c = \Omega_p$ , nous avons

$$\cos^2(N \cos^{-1}(1)) = \cos^2(N.0) = 1 \Rightarrow \varepsilon^2 = 10^{0.1} - 1 \Rightarrow \varepsilon = 0.5088$$

Pour,  $\Omega = \Omega_s > \Omega_c$ , nous avons

$$\cosh^2(N \cosh^{-1}(\Omega_s/\Omega_c)) = \frac{10^{1.5} - 1}{10^{0.1} - 1} \Rightarrow \cosh(N \cosh^{-1}(\Omega_s/\Omega_p)) = \sqrt{\frac{10^{1.5} - 1}{10^{0.1} - 1}}$$

En prenant le  $\cosh^{-1}$  des deux cotés, on obtient

$$N \geq \frac{\cosh^{-1}\left(\sqrt{(10^{1.5} - 1)/(10^{0.1} - 1)}\right)}{\cosh^{-1}(0.3/0.2)} = 3.19 \approx 4 \quad (2.44)$$

Avec

$$\begin{cases} \alpha = \varepsilon^{-1} + \sqrt{1 + \varepsilon^{-2}} = 4.17 \\ a = \frac{1}{2}(\alpha^{1/N} - \alpha^{-1/N}) = 0.36 \\ b = \frac{1}{2}(\alpha^{1/N} + \alpha^{-1/N}) = 1.06 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_{1,2} = -a\Omega_c \sin(\pi/8) \pm jb\Omega_c \cos(\pi/8) \\ s_{3,4} = -a\Omega_c \sin(3\pi/8) \pm jb\Omega_c \cos(3\pi/8) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_{1,2} = -0.0877 \pm j0.6179 \\ s_{3,4} = -0.2117 \pm j0.2559 \end{cases}$$

#### 4- Détermination de $H(z)$ :

puisque  $N$  est un nombre pair, nous avons

$$\begin{cases} H_a(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \prod_{k=1}^4 \frac{-s_k}{s - s_k} = \sum_{k=1}^4 \frac{A_k}{s - s_k} \\ H(z) = \sum_{k=1}^4 \frac{A_k}{1 - e^{s_k} z^{-1}} \end{cases}$$

#### Exercice 3 : (5 points)

Soit un filtre RIF passe-bas avec un ordre  $N = 5$  et une fréquence de coupure,  $\omega_c = 0.3\pi$ .

1- Calcul de la réponse impulsionnelle utilisant la fenêtre rectangulaire :

$$h(n) = h_d(n)w(n)$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(n-\alpha)} d\omega = \frac{\sin(\omega_c(n-\alpha))}{\pi(n-\alpha)}$$

avec  $\alpha = (N-1)/2$

La fenêtre rectangulaire est :  $w(n) = 1$

La réponse impulsionnelle tronquée devient

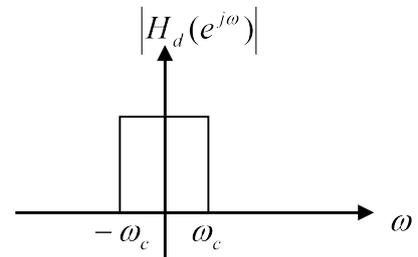
$$h(n) = \begin{cases} \frac{\sin[\omega_c(n - (N-1)/2)]}{\pi(n - (N-1)/2)}, & n \neq \alpha \\ \frac{\omega_c}{\pi}, & n = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(0) = h(4) = 0.1514 \\ h(1) = h(3) = 0.2575 \\ h(2) = 0.3 \end{cases}$$

2- Calcul des 4 premiers termes de la sortie du filtre  $y(n)$ , pour un signal d'entrée,  $x(n) = a^n$  :

Nous avons

$$\begin{cases} H(z) = h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + h(3)z^{-3} + h(4)z^{-4} \\ y(n) = h(0)(x(n) + x(n-4)) + h(1)(x(n-1) + x(n-3)) + h(2)x(n-2) \end{cases}$$



$$\begin{cases} y(0) = h(0)x(0) = h(0) = 0.1514 \\ y(1) = h(0)x(1) + h(1)x(0) = h(0)a + h(1) = 0.1514a + 0.2575 \\ y(2) = h(0)x(2) + h(1)x(1) + h(2)x(0) = 0.1514a^2 + 0.2575a + 0.3 \\ y(3) = h(0)x(3) + h(1)(x(2) + x(0)) + h(2)x(1) = 0.1514a^3 + 0.2575(a^2 + 1) + 0.3a \end{cases}$$