Université de Mohammed Boudiaf, M'sila
Master 1, S2 : Analyse fonctionnelle, 2021/2022

Faculté des mathématiques
Mr. Bougherara Brahim

Module : **Formulation variationnelle**

Examen (02-06-2022), durée : 1 :30 heure

Exercice 1. Soit f la fonction défini sur $]0,1[$ par $f(x) = x\ln x$.

1. Montrer que $u \in L^2(0,1)$.
2. Est ce que $u \in H^1(0,1)$ (**Ind.** utiliser le fait que : $x^\alpha \ln x$ est bornée , $\forall \alpha > 0$).
3. Donner la définition de $H_0^1(0,1)$.
4. Si $u \in \mathcal{C}([0,1])$, donner la définition de la trace Tu.
5. Calculer la trace de f et déduire que $f \in H_0^1(0,1)$.

Exercice 2. On considère le problème de Dirichlet homogène suivante

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} -\Delta u - \alpha u = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

où $f \in H^{-1}(\Omega)$ et $\alpha > 0$ assez petit.

1. Donner la définition de l'espace $H^{-1}(\Omega)$.
2. Écrire la formulation variationnelle associée au problème (P), en précisant la forme bilinéaire a et la forme linéaire ℓ.
3. Donner l'énoncé de l'inégalité de Poincaré.
4. En utilisant l'inégalité précédent, montrer que la forme bilinéaire a est coercive.
5. En utilisant le théorème de Lax-Milgram, montrer l'existence de la solution faible u.
6. Vérifie que u satisfait l'équation de (P) au sens de distributions.
7. Sous que condition sur u et f, l'équation devient satisfaite au sens p.p.

Module : **Formulation variationnelle**

Correction d'examen (02-06-2022), durée : 1 :30 heure

Exercice 3. Soit f la fonction défini sur $]0,1[$ par $f(x) = x \ln x$.

1. Montrer que $f \in L^2(0,1)$. On u est continue sur $]0,1]$ et $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Donc f est borné sur $]0,1[$. D'où
$$\int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x \leq C \int_0^1 dx < +\infty.$$
Donc $f \in L^2(0,1)$.

2. Est ce que $f \in H^1(0,1)$ (**Ind.** utiliser le fait que : $x^\alpha \ln x$ est bornée , $\forall \alpha > 0$). On a f est dérivable sur $]0,1[$ et $f'(x) = \ln x + 1,\ \forall x \in]0,1[$. Montrons que $f' \in L^2(0,1)$. On a $|x^\alpha \ln x| \leq C$ D'où
$$|\ln x| \leq C x^{-\alpha}, \forall x \in]0,1[.$$
En choisissant $\alpha = 1/4$, on obtient
$$\int_0^1 |f'(x)|^2 \mathrm{d}x \leq \int_0^1 (Cx^{-1/4} + 1)^2 \mathrm{d}x \leq \int_0^1 2(C^2 x^{-1/2} + 1)\mathrm{d}x < \infty.$$

3. Donner la définition de $H_0^1(0,1)$. Par définition $H_0^1(0,1)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(0,1)$ dans $H^1(0,1)$. (De manière équivalente $H_0^1(0,1) = \{u \in H^1(0,1) : Tu = 0\}$.)

4. Si $u \in \mathcal{C}([0,1])$, donner la définition de trace de u .
$$\begin{array}{rcl} Tu : \partial]0,1[= \{0,1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & Tu(x) = u(x) \end{array}$$

5. Calculer la trace de f et déduire que $f \in H_0^1(0,1)$. D'après l'injection $H^1(0,1) \hookrightarrow \mathcal{C}([0,1])$, il existe $\tilde{f} \in \mathcal{C}([0,1])$ telle que $\tilde{f} = f,\ p.p.$ et on donc $\tilde{f}(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$. D'où pour $x_0 \in \{0,1\}$.
$$Tf(x_0) := T\tilde{f}(x_0) := \tilde{f}(x_0) \lim_{x\to x_0} f(x_0) = 0.$$
Comme $Tf \equiv 0$, alors $f \in H_0^1(0,1)$.

Exercice 4. On considère le problème de Dirichlet homogène suivante
$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} -\Delta u - \alpha u = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$
où $f \in H^{-1}(\Omega)$ et $\alpha > 0$ assez petit.

$\boxed{1}$ Donner la définition de l'espace $H^{-1}(\Omega)$. C'est le dual topologique de $H_0^1(\Omega)$ (l'espace des forme linéaires et continue sur $H_0^1(\Omega)$).

$\boxed{2}$ Écrire la formulation variationnelle associée au problème (P), en précisant la forme bilinéaire a et la forme linéaire ℓ. On multiplie l'équation de (P) par la fonction teste v et on intègre formellement par partie, on obtient la formulation variationnelle suivante

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v \mathrm{d}x - \alpha \int_\Omega uv \mathrm{d}x = \langle f, v\rangle.$$

et cette formulation a de sens pour tout $u, v \in H_0^1(\Omega)$. La forme bilinéaire associé est définie sur $H_0^1(\Omega)$ par

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v \mathrm{d}x - \alpha \int_\Omega uv \mathrm{d}x.$$

La forme linéaire ℓ est donnée par $\ell(v) := \langle f, v\rangle$.

$\boxed{3}$ Donner l'énoncé de l'inégalité de Poincaré : Si Ω est borné et régulier, alors

$$\exists C > 0 : \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^N}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

$\boxed{4}$ En utilisant l'inégalité précédent, montrer que la forme bilinéaire a est coercive. On a

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \alpha \int_\Omega u^2 \mathrm{d}x \\ &\geq \|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^N} - \alpha C^2 \|\nabla u\|^2_{(L^2(\Omega))^N} \text{ (Inégalité de Poincaré)} \\ &= (1-\alpha C^2)\|\nabla u\|^2_{(L^2(\Omega))^N} = C_0 \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

où $C_0 = 1 - \alpha C^2 > 0$ si α est petit. D'où a est coercive.

$\boxed{5}$ En utilisant le théorème de Lax-Milgram, montrer l'existence de la solution faible u. Il suffit de montrer la continuité de a et ℓ. En utilisant les inégalité de Cauchy-Schwartz et puis de Poincaré, on a

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \alpha C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (1+\alpha C)\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'où a est continue. Pour ℓ, on a $\ell(v) := \langle f, v\rangle$ et comme $f \in H^{-1}(\Omega)$, alors elle est linéaire et continue. D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe une solution faible unique $u \in H_0^1(\Omega)$.

$\boxed{6}$ Vérifie que u satisfait l'équation de (P) au sens de distributions. Si on prend $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, dans la formulation variationnelle ci-dessus, on obtient

$$\langle -\Delta u, v\rangle - \alpha\langle u, v\rangle = \langle f, v\rangle$$

ce qui donne $-\Delta u - \alpha u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

$\boxed{7}$ Sous que condition sur u et f, l'équation devient satisfaite au sens p.p. Si $-\Delta u, f \in L^2(\Omega)$ alors l'équation précédente sera satisfaite au sens p.p.