Université Mohamed Boudiaf-M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'informatique
Département des Mathématiques

Module: **Probabilités,** 2 ième Année Licence LMD,

## Examen Final (05/06/2022)

**Exercice 01 (04 points):**

On jette un dé équilibré et une pièce de monnais au même temps.
(1) Décrire l'ensemble fondamental de cette expérience.
(2) Calculer le cardinal de cet ensemble fondamental.
(3) Exprimer puis calculer la probabilité des événements suivants:
$\mathbf{A} = \{$ Obtenir Face et nombre paire$\}$. $\mathbf{B} = \{$ Obtenir un nombre premier$\}$. $\mathbf{C} = \{$ Obtenir Pile$\}$.

**Exercice 02 (08 points):**

Une urne contient **03** boules blanches et **02** boules noires.
**I)** On tire successivement **03** boules, chaque fois si la boule est blanche on la remet dans l'urne.
(1) Construire un arble de probabilité de cette expérience.
(2) Calculer la probabilité des événement suivants:
$A$ :' Les boules sont de même couleurs", $B$ : ' Les boules sont de couleurs différentes".
(3) Supposons que la deuxième et troisème boules tirées sont blanches, calculer la probabilité pour que la première boule tirée soit noire.
**II)** On tire cette fois-ci une boule et on note sa couleur. On répète indépendamment cette expérience jusqu'à l'obtention d'une boule blanche pour la prmière fois. On définit une variable aléatoire $X$ qui indique la première apparition d'une boule blanche.
(1) Quelle est la loi de $X$
(2) Calculer la probabilté d'obntenir une boule blanche pour la première fois dans le 20 $^{ième}$ essai.
**III)** On répète indépendamment l'expérience dans II) $n$ fois. On définit $X$ qui indique le nombre de fois d'apparition une boule blanche.
(1) Quelle est la loi de $X$
(2) Calculer la probabilté d'obtenir au moins une boule blanche dans les $n$ tirages.

**Exercice 03 (04 points):**

On tire au hasard un nombre entre 1 et 5.
1) Quelle est la loi de $X$.
2) Quelle est la probabilité qu'il soit solution de l'inéquation $x^2 - 6x + 8 \geq 0$?

**Exercice 04 (04 points):**

Soit $a > 0$. Soit $X$ une variable aléatoire avec sa densité:

$$f(x) = \begin{cases} (a+1)\, e^{-2x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Déterminer la valeur de $a$.
2) Quelle est la loi de $X$.
3) Calculer $E[X]$ et $V[X]$.

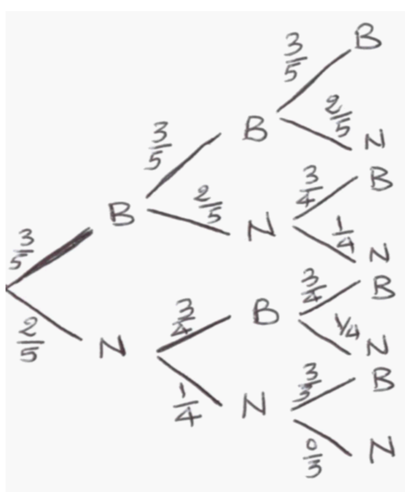
Université Mohamed Boudiaf-M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'informatique
Département des Mathématiques

Module: **Probabilités,** 2 ième Année Licence LMD,

## Correction et Barème

**Exercice 01 (04 points):**
On jette un dé équilibré et une pièce de monnais au même temps.
(1) L'ensemble fondamental $\Omega = \{1P, 2P, 3P, 4P, 5P, 6P, 1F, 2F, 3F, 4F, 5F, 6F\}$.
(2) $|\Omega| = 12$
(3) $\mathbf{A} = \{2F, 4F, 6F\}$ et $P(\mathbf{A}) = \frac{3}{12}$.
$\mathbf{B} = \{2P, 3P, 5P, 2F, 3F, 5F\}$ et $P(\mathbf{B}) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.
$\mathbf{C} = \{1P, 2P, 3P, 4P, 5P, 6P\}$ et $P(\mathbf{C}) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

**Exercice 02 (08 points):**
Une urne contient **03** boules blanches et **02** boules noires.
**I)** On tire successivement **03** boules, chaque fois si la boule est blanche on la remet dans l'urne.
On pose les événements suivants:
$A_1$ :" La première boule tirée est blanche"
$A_2$ :" La deuxième boule tirée est blanche"
$A_3$ :" La troisème boule tirée est blanche"
(1) **Arble de probabilité**



(2) La probabilité demandée à calculer est

$$\begin{aligned} P(\mathbf{A}) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right) \\ &= P(A_1)\, P_{A_1}(A_2)\, P_{A_2 \cap A_3}(A_3) + P\left(\overline{A_1}\right) P_{\overline{A_1}}\left(\overline{A_2}\right) P_{\overline{A_2} \cap \overline{A_3}}\left(\overline{A_3}\right) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times 0 = \frac{27}{125} \end{aligned}$$

On remarque que $\overline{\mathbf{B}}=\mathbf{A}$, nous avons donc

$$\begin{aligned} P(\mathbf{B}) &= 1-P\left(\overline{\mathbf{B}}\right) \\ &= 1-P(\mathbf{A}) \\ &= 1-\frac{27}{125}=\frac{98}{125} \end{aligned}$$

**On peut calculer les probabilités demandées directement de l'arbre pondéré.**
(3) La probabilité demandée à calculer est

$$P_{A_2\cap A_3}\left(\overline{A_1}\right) \overset{\text{Par Bayes}}{=} \frac{P_{\overline{A_1}}\left(A_2\cap A_3\right)}{P_{A_1}\left(A_2\cap A_3\right)+P_{\overline{A_1}}\left(A_2\cap A_3\right)}$$

$$= \frac{P_{\overline{A_1}}\left(A_2\cap A_3\right)}{P_{A_1}\left(A_2\cap A_3\right)+P_{\overline{A_1}}\left(A_2\cap A_3\right)} = \frac{\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}}{\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}} = \frac{25}{51}$$

**II)** On tire cette fois-ci une boule et on note sa couleur. On répète indépendamment cette expérience jusqu'à l'obtention d'une boule blanche pour la prmière fois. On définit une variable aléatoire $X$ qui indique la première apparition d'une boule blanche.
(1) La loi de $X$ : **Loi géométrique** $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{3}{5}\right)$.
(2) $P(X=20)=\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^{19}$.
**III)** On répète indépendamment l'expérience dans II) $n$ fois. On définit $X$ qui indique le nombre de fois d'apparition une boule blanche.
(1) La loi de $X$ : **Loi Binomiale** $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,\frac{3}{5})$.
(2) On pose les événements suivants:
$\mathbf{A}$ :" Obtenir au moins une boule blanche dans les $n$ tirages"
$\overline{\mathbf{A}}$ :" Obtenir $n$ boules noirs dans les $n$ tirages. Nous avons

$$P(\mathbf{A})=1-P\left(\overline{\mathbf{A}}\right).$$

et encore

$$P\left(\overline{\mathbf{A}}\right)=\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

donc

$$P(\mathbf{A})=1-\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

**Exercice 03 (04 points):**
1) La loi de $X$ : **Loi uniforme continue** $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1,5])$
2) On résout l'inégalité $x^2-6x+8\geq 0 \Rightarrow x\in[1,2]\cup[4,5]$ et donc

$$P(1\leq X\leq 2\cup 4\leq X\leq 5)=\frac{\text{Longueur de }[1,2]\cup[4,5]}{\text{Longueur de }[1,5]}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

**Exercice 04 (04 points):**
Soit $a>0$. Soit $X$ une variable aléatoire avec sa densité:

$$f(x)=\begin{cases}(a+1)\,e^{-2x} & \text{si} \quad x\geq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

1) Nous avons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow a = 1$$

2) La loi de $X$ : **loi exponentielle** $X \hookrightarrow \mathcal{E}(2)$

3)

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

et

$$V[X] = E\left[X^2\right] - (E[X])^2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$