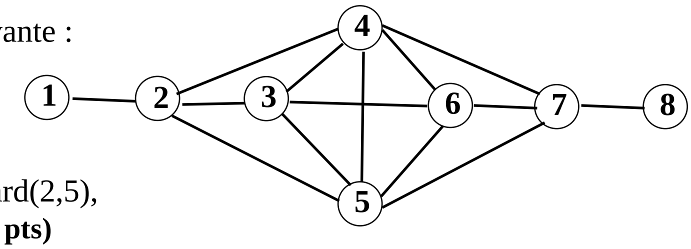
Faculté des mathématiques et de l'informatique	Date : 07.06.2022	Niveau : 1ère Année Master IDO
Département d'informatique	Durée : 01 H 30 Mn	Module : Théorie des graphes avancée

CONTROLE DU SEMESTRE S2

EXERCICE 01	30 Minutes	08 points

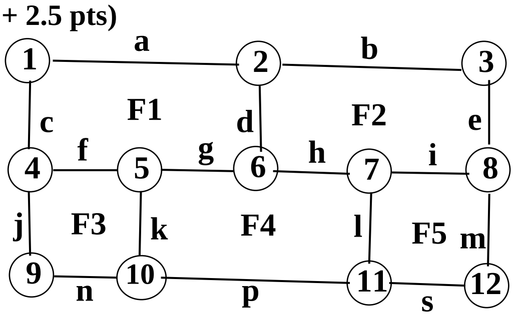
Soit le graphe G(X, U) représentée par la figure suivante :



1. Donner l'ordre n et le degré moyen D_m **(01 pt)**
2. Trouver une clique dans le graphe **(01 pt)**
3. Calculer les deux similarités Cosine(2, 6), Jaccard(2,5), et dites que signifient les résultats obtenus ? **(02 pts)**
4. Calculer le degré normalisé de centralité pour les deux sommets 3, 5 **(1.5 pts)**
5. Calculer le degré de centralisation du graphe C_D **(01 pt)**
6. Représenter le graphe en utilisant une matrice d'adjacence M **(1.5 pts)**

EXERCICE 02	30 Minutes	06 points

Soit le graphe G(X, U) représentée par la figure suivante : **(3.5 pts + 2.5 pts)**

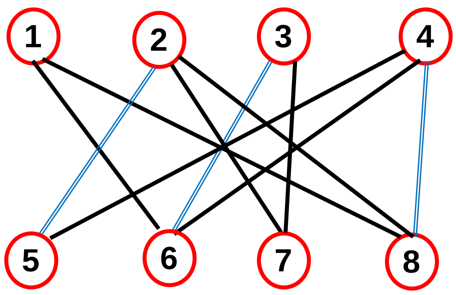


1. Comment colorer les arêtes de la figure de sorte que deux arêtes adjacentes ne doivent pas porter la même couleur ? (Utiliser les couleurs C_1, C_2, C_3, …)
2. Appliquer la même procédure de coloriage sur les faces de la figure.

EXERCICE 03	30 Minutes	6.0 points

Soit le graphe biparti G(X, U) ci-après avec :

X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}
U = {(1, 6), (1, 8), (2, 5), (2, 7), (2, 8), (3, 6), (3, 7) (4, 5), (4, 6), (4, 8)}
On définit un couplage C comme suit :
C = {(2, 5), (3, 6), (4, 8)} avec |C|=3



1. Décrire brièvement l'algorithme de construction d'un arbre alterné T_{alt} ? **(2.5 pts)**
2. Utiliser l'algorithme précédent pour trouver le couplage maximum C' **(3.5 pts)**

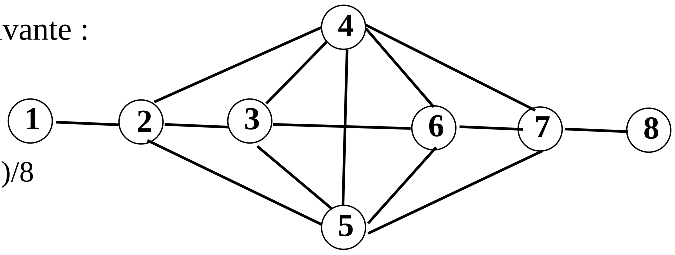
Bon Courage
Resp.Module : Dr. KADRI. S

Faculté des mathématiques et de l'informatique	Date : 27.05.2021	Niveau : 1ère Année Master IDO
Département d'informatique	Durée : 01 H 30 Mn	Module : Théorie des graphes avancée

CONTROLE DU SEMESTRE S2 Corrigé-type

EXERCICE 01 | **30 Minutes** | **5.5 points**

Soit le graphe G(X, U) représentée par la figure suivante :



1. Donner l'ordre n et le degré moyen D_m **(01 pt)**

Ordre n=8 ; Degré Moyen Dm = (1+4+4+5+5+4+4+1)/8
= 28/8 = 7/2 = 3.5

2. Trouver une clique dans le graphe **(01 pt)**
Une clique dans G : {3, 4, 5, 6}

3. Calculer les deux similarités Cosine(2, 6), Jaccard(2,5), et dites que signifient les résultats obtenus ? **(02 pts)**

Cos(2, 6) = $\frac{|N2 \cap N6|}{\sqrt{|N2|.|N7|}} = \frac{|\{3,4,5\}|}{\sqrt{|\{1,3,4,5\}|.|\{3,4,5,7\}|}} = \frac{3}{\sqrt{4.4}} = \frac{3}{4} = 0.75$

Jacc(2, 5) = $\frac{|N2 \cap N5|}{|N2 \cup N5|} = \frac{|\{3,4\}|}{|\{1,3,4,5\} \cup \{2,6,7\}|} = \frac{2}{7} \approx 0.28$

Le premier résultat Cos(2, 6) signifie que les deux sommets 2 et 6 sont similaires à 75%
Le deuxième résultat Jacc(2, 5) signifie que les deux sommets 2 et 5 sont faiblement similaires

4. Calculer le degré normalisé de centralité pour les deux sommets 3, 5 **(1.5 pts)**

$C'_D(3) = \frac{d(3)}{N-1} = \frac{4}{8-1} = \frac{4}{7} \approx 0.57$

$C'_D(5) = \frac{d(5)}{N-1} = \frac{5}{8-1} = \frac{5}{7} \approx 0.71$

5. Calculer le degré de centralisation du graphe C_D **(01 pt)**

$$C_D = \frac{\sum_i^n \left(C_D(n^*) - C_D(i)\right)}{(N-1)(N-2)}$$

$$= \frac{[(5-1)+(5-4)+(5-4)+(5-5)+(5-5)+(5-4)+(5-4)+(5-1)}{(8-1)(8-2)} = \frac{4+1+1+0+0+1+1+4}{7*6}$$

$$= \frac{12}{42} = \frac{2}{7} \cong 0.28$$

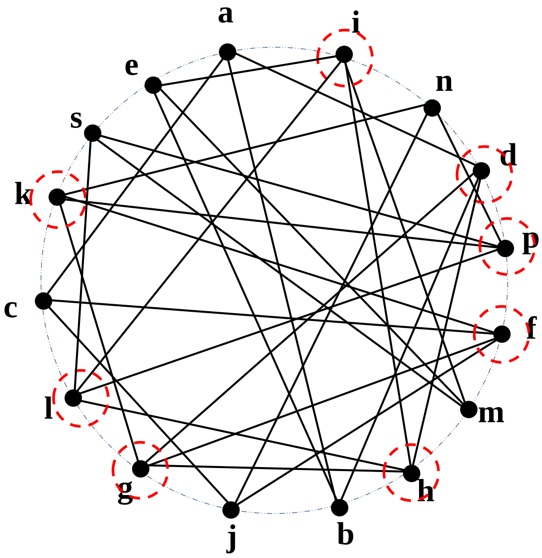
Représentation du graphe en utilisant une matrice d'adjacence M **(1.5 pts)**

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	1	1	0	0	0
3	0	1		1	1	1	0	0
4	0	1	1	0	1	1	1	0
5	0	1	1	1	0	1	1	0
6	0	0	1	1	1	0	1	0
7	0	0	0	1	1	1	0	1
8	0	0	0	0	0	0	1	0

EXERCICE 02	30 Minutes	06 points

1. Proposer un coloriage minimum pour les arêtes

On trace un graphe dont les sommets sont les segments et les arêtes envisagent leurs intersections. (le graphe adjoint du graphe G) **(1.5 pts)**



Maintenant, on applique l'algorithme de Welch Powell sur les arêtes a, b, …, s **(01 pt)**

Sommet	Degré	Couleur
d	4	C1
f	4	C1
g	4	C2
h	4	C3
i	4	C1
k	4	C3
l	4	C2
p	4	C1
a	3	C2
b	3	C3
c	3	C3
e	3	C2
j	3	C2
m	3	C3
n	3	C4
s	3	C4

Nb.Couleurs = 4
{d, f, i, p} ==> C1 ; {g, l, a, e, j} ==> C2 ; {h, k, b, c, m} ==> C3 ; {n, s} ==> C4 **(01 pt)**

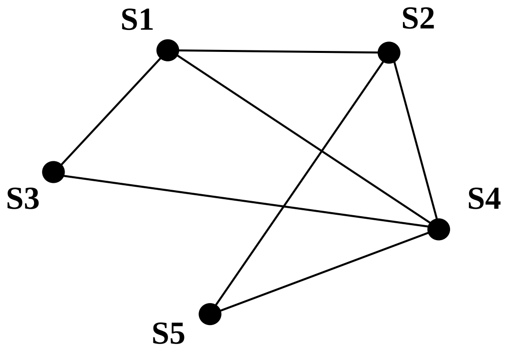
2. Reprendre la question (1) pour les faces

On trace le graphe dual en représentant chaque face par un sommet, et les arêtes envisagent les frontières communes entre les faces **(01 pt)**

{F1, F2, F3, F4, F5} ==> {S1, S2, S3, S4, S5}

Coloriage: **(01 pt)**

Sommet	Degré	Couleur
S4	4	C1
S1	3	C2
S2	3	C3
S3	2	C3
S5	2	C2



Nb. Couleurs = 03 **(0.5 pt)**
{F4} ==> {C1}
{F1, F5} ==> {C2}
{F2, F3} ==> {C3}

EXERCICE 03	**30 Minutes**	**6.0 points**

Construction d'un arbre alternée T_{alt} (2.5 pts)

1.Choisir un sommet insaturé x_0 ($x_0 \notin C$) comme racine de l'arbre Talt (Niveau N0).

2.Au niveau *i* impair (N1, N3, N5, …), on insère dans T_{alt} un sommet adjacent à l'un des sommets insérés au niveau *(i-1)* par le biais d'une arête $A \notin C$, ainsi que cette arête.

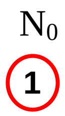
3. Au niveau *i* pair (N2, N4, N6, …), on insère dans T_{alt} un sommet adjacent à l'un des sommets insérés au niveau *(i-1)* par le biais d'une arête $A \in C$, ainsi que cette arête.

4.On continue la construction de T_{alt} jusqu'à l'insertion d'un sommet insaturé (à un niveau impair) ou jusqu'à ce que l'on puisse plus insérer de sommet.

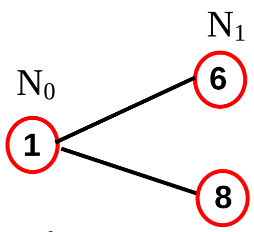
5.S'il existe une chaîne alternée augmentante (améliorante) du couplage C, on finit nécessairement par l'insertion d'un sommet insaturé s. on utilise la chaîne reliant s à la racine x_0 de T_{alt} pour améliorer le couplage C.

Construction du couplage maximal (3.5 pts)

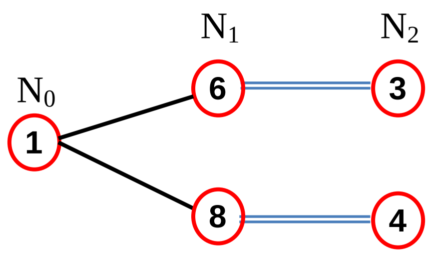
1.On choisit le sommet insaturé 1 ($1 \notin C$) comme racine de Talt (le niveau N0).



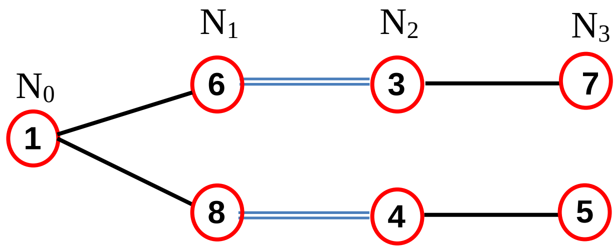
2.Dans le niveau impair N1 : insèrer à T_{alt} un sommet adjacent à 1 par le biais d'une arête $A \notin C$, ainsi que cette arête.



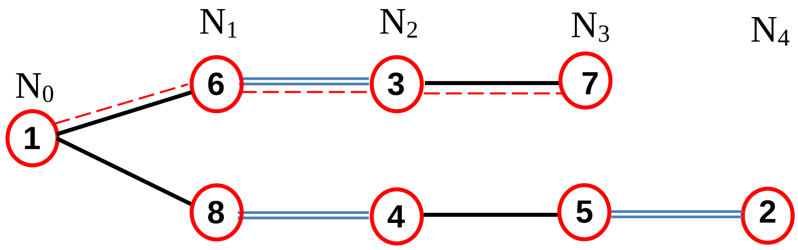
3. Dans le niveau pair N2 : insèrer à T_{alt} un sommet adjacent à {6, 8} par le biais d'une arête $A \in C$, ainsi que A.



Répéter (2)



Répéter (3)



On peut pas continuer tous les sommets du graphe sont insérés.
On a la chaîne augmentante C =(1, 6, 3, 7) ➔ on améliore notre couplage suivant cette chaîne comme suit :

C = {(1, 6), (2, 5), (3, 7), (4, 8)} |C| = 4

C est maximum et parfait, car tous les sommets sont insaturés.

Bon Courage
Resp.Module : Dr. KADRI. S