UNIVERSITE DE M'SILA
Faculté des Mathématiques et de l' Informatique

Introduction au Calcul Fractionnaire et Application
1ère année Master EDPs
05/06/2022

Examen du dexième semestre

Questions de cours.

Rappeler les définitions de l'intégrale fractionnaire de Rimann-Liouville, la dérivée fractionnaire au sens Rimann-Liouville, et au sens Caputo, à gauche d'ordre $\alpha > 0$ de f :

a) Si la fonction f définie sur l'intervalle $[a, b]$.

b) Si la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice N° 1 : Soit $\alpha > 0,\ n = [\alpha] + 1,\ et\ \ f(t) = t^{\lambda}$.

1) Calculer ${}^{C}D_{0^+}^{\alpha} f(t)$.

2) En déduire que l'unique solution de l'équation ${}^{C}D_{0^+}^{\alpha} f(t) = 0$ est :

$$f(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_{n-1} t^{n-1},\ c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}.$$

Exercice N° 2 . On considère le problème aux limites :

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} D_{0^+}^{\alpha} u(t) = f\big(t, u(t)\big), & t \in [0,1],\ \ 1 < \alpha \leq 2 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}.$$

où $f: [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1) Transformer le problème (I) en un problème de point fixe.

2) Supposons que :

(H1) $\exists\, \mathrm{k} > 0$ telle que: $|f(t, u) - f(t, v)| \leq k|u - v|, \forall t \in [0,1], u, v \in \mathbb{R}$.

(H2) $\exists\, \mathrm{M} > 0$ telle que: $|f(t, u)| \leq M,\ \ \forall (t, u) \in [0,1] \times \mathbb{R}$.

Utilisant le théorème de contraction de Banach, montrer l'existence d'une unique solution du problème (I) sur [0,1].

Exercice N° 3 . Résoudre le problème :

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{cases} D_{0^+}^{\alpha} y(t) - 2y''(t) = f(t), & t > 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \\ D_{0^+}^{\alpha - n + k} y(0) = b_{k+1} \end{cases}$$

Où $\alpha > 2,\ b_{k+1} \in \mathbb{R},\ \ k = 0, \ldots, n-1,\ n = [\alpha] + 1.$