Corrigé type - Examen du Premier Semestre Introduction au Calcul Fractionnaire et Application 1ère Année Master EDPs et Appl

Questions de cours.

1) La définition de l'intégrale fractionnaire de Rimann-Liouville, la dérivée fractionnaire au sens Rimann-Liouville, et au sens Caputo, à gauche d'ordre $\alpha > 0$ de f.

a) Si la fonction f définie sur l'intervalle $[a, b]$,

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau. \\
\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau. \\
{}^C\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f(t) &= \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \circ \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau.
\end{aligned}$$

b) Si la fonction f définie sur $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{I}_{+}^{\alpha} f\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau. \\
\mathcal{D}_{+}^{\alpha} f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ \mathcal{I}_{+}^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau. \\
{}^C\mathcal{D}_{+}^{\alpha} f(t) &= \mathcal{I}_{+}^{n-\alpha} \circ \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau.
\end{aligned}$$

avec $n = [\alpha] + 1$.

Exercice N° 1:

1) Soit $\alpha > 0,\ n = [\alpha] + 1$, et $f(t) = t^{\lambda}$

$$\left({}^C\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} f\right)(t) = \mathcal{I}_{0^+}^{n-\alpha} \circ \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau.$$

on a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt}\right)^n t^{\lambda} &= \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-(n-1))\, t^{\lambda-n} \\
&= \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)\, t^{\lambda-n}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\left({}^{C}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}f\right)(t) &= \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}\tau^{\lambda-n}d\tau, \text{ posons } \tau=st\\
&= \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)}t^{\lambda-\alpha}\int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1}s^{\lambda-n}ds\\
&= \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)}t^{\lambda-\alpha}B(n-\alpha,\lambda-n+1)\\
&\left|B(n-\alpha,\lambda-n)=\frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\lambda-n+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}\right|\\
&= \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\lambda-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\lambda-\alpha+1)}t^{\lambda-\alpha}\\
&= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}t^{\lambda-\alpha}. \text{ puisque } \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)\Gamma(\lambda-n+1)=\Gamma(\lambda).
\end{aligned}$$

2) D'après (1) on a

$$\begin{aligned}
\left({}^{C}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}t^{\lambda}\right)(t) &= \tfrac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-(n-1))\Gamma(\lambda-(n-1))}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}t^{\lambda-\alpha}\\
&= \begin{cases} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}t^{\lambda-\alpha}, & \text{si} \quad \lambda\notin\{0,1,2,\dots,n-1\}\\ 0, & \text{si} \quad \lambda\in\{0,1,2,\dots,n-1\}\end{cases}, \ \lambda>-1.
\end{aligned}$$

C-à-d si $\lambda=m\in\{0,1,2,\dots,n-1\}\Rightarrow$

$$\left({}^{C}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}t^{m}\right)(t)=0,\ m\in\{0,1,2,\dots,n-1\}.$$

En déduire que alors l'unique solution de l'équation $\left({}^{C}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}f\right)(t)=0$ est donné par

$$f(t)=c_0+c_1t+c_2t^2+\dots+c_{n-1}t^{n-1},\ c_0,\dots,c_{n-1}\in\mathbb{R}.$$

Exercice N° 2: On considère le problème aux limites :

$$\begin{cases}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}u(t)=f(t,u(t)), & t\in[0,1], \quad 1<\alpha\le 2\\ u(0)=u(1)=0\end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

1) Transformer le problème (I) en un problème de point fixe. En appliquant $\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}$,

$$\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}u(t)=\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}f(t,u(t))$$

Pour $1<\alpha\le 2 \ (n=[\alpha]+1=2)$, on a:

$$\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}u(t)=u(t)+C_1t^{\alpha-1}+C_2t^{\alpha-2},\ C_1,C_2\in\mathbb{R},$$

donc

$$u(t)+C_1t^{\alpha-1}+C_2t^{\alpha-2}=\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}f\Longrightarrow u(t)=\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}f-C_1t^{\alpha-1}-C_2t^{\alpha-2},$$

Par conséquent, la solution générale est donne par:

$$u(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,u(s))ds-C_1t^{\alpha-1}-C_2t^{\alpha-2}.$$

Les condition aux limites implique que:

$$\left\{\begin{array}{lll} u\left(0\right)=0 & \Rightarrow & 0=0-0-\lim\limits_{t\rightarrow 0}C_2t^{\alpha-2}\Rightarrow C_2=0, \\ u\left(1\right)=0 & \Rightarrow & \left\{\begin{array}{l} 0=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\left(1-s\right)^{\alpha-1}f(s,u(s))ds-C_1 \\ \Rightarrow C_1=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\left(1-s\right)^{\alpha-1}f(s,u(s))ds. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

donc

$$\begin{aligned} u\left(t\right) &= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^t\left(t-s\right)^{\alpha-1}f(s,u(s))ds-\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^1\left(1-s\right)^{\alpha-1}f(s,u(s))ds \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^t\left(t-s\right)^{\alpha-1}f(s,u(s))ds-\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^t\left(1-s\right)^{\alpha-1}f(s,u(s))ds \\ &\quad -\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_t^1\left(1-s\right)^{\alpha-1}f(s,u(s))ds \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^t\left[\left(t-s\right)^{\alpha-1}-t^{\alpha-1}\left(1-s\right)^{\alpha-1}\right]f(s,u(s))ds-\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_t^1\left(1-s\right)^{\alpha-1}f(s,u(s))ds \\ &= \int_0^t\frac{\left(t-s\right)^{\alpha-1}-t^{\alpha-1}\left(1-s\right)^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\alpha\right)}f(s,u(s))ds-\int_t^1\frac{t^{\alpha-1}\left(1-s\right)^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\alpha\right)}f(s,u(s))ds \\ &= \int_0^1 G\left(t,s\right)f(s,u(s))ds. \end{aligned}$$

Donc le problème (I) équivalant à:

$$u\left(t\right)=\int_0^1 G\left(t,s\right)f(s,u(s))ds.$$

où

$$G\left(t,s\right)=\left\{\begin{array}{ll} \frac{\left(t-s\right)^{\alpha-1}-\left[t(1-s)\right]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{si} \quad 0\leq s\leq t\leq 1. \\ -\frac{\left[t(1-s)\right]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{si} \quad 0\leq t\leq s\leq 1. \end{array}\right.$$

2) Supposons que : pour tout $t\in[0,1]$ et $x,y\in\mathbb{R}$,

(H1) Il existe une constante $k>0$ telle que: $|f(t,u)-f(t,v)|\leq k|u-v|$.
(H2) Il existe une constante $M>0$ telle que: $|f(t,u)|\leq M$.

Soit l'espace de Banach $C([0,1]),\mathbb{R})$, muni de la norme $\|u\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$, et l'opérateur :

$$F:C([0,1]),\mathbb{R})\rightarrow C([0,1],\mathbb{R})$$

défini par :

$$F(u)(t)=\int_0^1 G\left(t,s\right)f(s,u(s))ds.$$

Il est clair que les points fixes de F sont les solution du problème (I). L'opérateur F est bien défini, en effet : si $u\in C([0,1],\mathbb{R})$ alors $(Fu)\in C([0,1],\mathbb{R})$.
Il suffit de montrer F est contraction.
Soient $u,v\in C([0,1],\mathbb{R})$ alors $\forall t\in[0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} |F(u)(t)-F(v)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 G\left(t,s\right)\left|f(s,u(s))-f(s,v(s))\right|ds \\ &\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha+1)}\left\|u-v\right\|. \end{aligned}$$

Donc
$$\|F(u)-F(v)\| \leq \frac{k}{\Gamma(\alpha+1)}\|u-v\|.$$
Quand $\frac{k}{\Gamma(\alpha+1)}<1$, on pout déduire que F est une contraction et d'après le théorème de Banach F admet un seul point fixe qui est une solution du problème (I).

Exercice N° 3: Résoudre le problème :
$$\begin{cases} \mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} y(t)-2y^{''}(t)=f(t), \quad t>0 \\ y(0)=y^{'}(0)=0 \\ \mathcal{D}_{0^+}^{\alpha-n+k} y(0)=b_{k+1},\ k=0,...,n-1 \end{cases} \tag{II}$$
Utilisant la transformée de Laplace, on a
$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} y\right](s) &= s^{\alpha}\mathcal{L}[y](s)-\sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1}\left(\mathcal{I}_0^{n-\alpha} y\right)^{(k)}(0) \\ &= s^{\alpha}\mathcal{L}[y](s)-\sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha-n+k} y(0)=s^{\alpha}\mathcal{L}[y](s)-\sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} b_{k+1},\end{aligned}$$
et la transformée de Laplace de la dérivée classique
$$\mathcal{L}\left[\mathcal{D}^2 y\right](s)=s^2\mathcal{L}[y](s)-sy(0)-y^{'}(0)=s^2\mathcal{L}[y](s).$$
Soit $Y(s),\ F(s)$ la transformée de Laplace de $y(t),\ f(s)$ resp. En appliquant la transformée de Laplace sur (II),
$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} y(t)-2y^{''}(t)\right](s) &= \mathcal{L}[f(t)](s) \\ s^{\alpha}Y(s)-\textstyle\sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1}b_{k+1}-2s^2Y(s) &= F(s) \\ \left(s^{\alpha}-2s^2\right)Y(s) &= F(s)+\textstyle\sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1}b_{k+1}\end{aligned}$$
donc
$$Y(s)=\frac{F(s)}{(s^{\alpha}-2s^2)}+\sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1}\frac{s^{\alpha-k-1}}{(s^{\alpha}-2s^2)}=\frac{F(s)}{s^2\left(s^{\alpha-2}-2\right)}+\sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1}\frac{s^{\alpha-k-3}}{s^{\alpha-2}-2}.$$
Maintenant en appliquant la transformée inverse de Laplace
$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s^2\left(s^{\alpha-2}-2\right)}\right](t)+\sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-k-3}}{s^{\alpha-2}-2}\right](t) \\ &= f(t)*\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-2-\alpha}}{\left(s^{\alpha-2}-2\right)}\right](t)+\sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-2-(k+1)}}{s^{\alpha-2}-2}\right](t) \\ &= f(t)*t^{\alpha-1}E_{\alpha-2,\alpha}\left(2t^{\alpha-2}\right)+\sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1}t^k E_{\alpha-2,k+1}\left(2t^{\alpha-2}\right).\end{aligned}$$

Remarque: Pour $\alpha,\beta>0,\ \lambda\in\mathbb{R}$, on a
$$\mathcal{L}\left[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(\lambda t^{\alpha}\right)\right](s)=\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-\lambda},\ s>0,\ |\lambda s^{\alpha}|<1.$$