Université de M'sila **Le :18 /06/2022**
Faculté des sciences ***Durée :*** **1h30**
Département de Physique

Examen de Rattrapage de :

Fonction de la variable complexe (MATH4)

Exercice N° 1: (6pts)

1) Démontrer que la fonction $f(z) = \sin(iz)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

2) Déduire sa dérivée.

Exercice N° 2: (8 pts)

Calculer les intégrales :

$$\oint_C \frac{\mathbf{ze^{iz}}}{\boldsymbol{z^2+1}}\boldsymbol{dz} \quad ; \oint_C \frac{\mathbf{z^2+\cos z}}{\boldsymbol{(z-\pi)^3}}\boldsymbol{dz}$$

1. C est le cercle $|z-1| = \frac{1}{2}$

2. C est le cercle $|z| = 10$

Exercice N° 3 : (6 pts)

- Chercher la série de Laurent de la fonction $f(z) = \frac{1+z^2}{z^4(1-z)}$ autour de point $z = 0$
- Indiquer le type de singularité de 0
- Déduire le Résidu de $f(z)$ en 0 $(\mathrm{Res}(f,0))$

Bonne Chance

Correction de l'Examen

Solution de l' Exercice N° 1: :

$$f(z) = \sin iz = \sin(ix - y) = \sin ix \cos y - \cos ix \sin y \ldots\ldots\ldots(1pt)$$

avec : $\sin ix = i \operatorname{sh} x \ldots\ldots\ldots(0.5pt)$ *et* $\cos ix = \operatorname{ch} x \ldots\ldots\ldots(0.5pt)$

$$\Longrightarrow f(z) = \underbrace{-\operatorname{ch} x \sin y}_{P} + \mathrm{i}\, \underbrace{\operatorname{sh} x \cos y}_{Q} \ldots\ldots\ldots(0.5pt)$$

$f(z)$ *holomorphe* $\Leftrightarrow$ $f(z)$*vérifiée les conditions de Cauchy – Riemann* : $\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$ ....(0.5pt)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = -\operatorname{sh} x \sin y = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \ldots\ldots\ldots(0.5pt) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\operatorname{ch} x \cos y = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \ldots\ldots\ldots(0.5pt) \end{cases}$$

$\Longrightarrow$les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiée alors $f(z)$est holomorphe, et sa dérivée égale à :

$$f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -\operatorname{sh} x \sin y + i \operatorname{ch} x \cos y = i\,(i \operatorname{sh} x \sin y + \operatorname{ch} x \cos y) \ldots(1pt)$$

$$\Longrightarrow f'(z) = i(\cos\mathrm{i}\,\mathrm{x} \cos \mathrm{y} + \sin ix \sin y) = i\cos(ix - y) \ldots\ldots\ldots(0.5pt)$$

$$\Longrightarrow f'(z) = i\cos i(x + iy) = i\cos iz \ldots\ldots\ldots(0.5pt)$$

Solution de L' Exercice N° 2 :

I. Pour $\oint_C \frac{\boldsymbol{z}\mathbf{e}^{\mathbf{iz}}}{\boldsymbol{z}^2+\mathbf{1}}\boldsymbol{dz}$, On observe que $g_1(z) = \frac{\boldsymbol{z}\mathbf{e}^{\mathbf{iz}}}{\boldsymbol{z}^2+\mathbf{1}} = \frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z+i)(z-i)}$ n'est pas défini en $z_1 = -i$ et $z_2 = i$, et g(z) est holomorphe dans $\mathbb{C} - \{-i, i\}$ alors on a deux points singuliers:

1) Pour le chemin C_1: $|z - 1| = \frac{1}{2}$ les deux points singuliers $z_1 = -i$ et $z_2 = i$ sont à l'extérieur (0.5pt)de C_1, on applique alors le théorème de Cauchy :

$$\boldsymbol{I_1} = \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\boldsymbol{z}\mathbf{e}^{\mathbf{iz}}}{\boldsymbol{z}^2 + \mathbf{1}}\boldsymbol{dz} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1pt)$$

2) Pour le chemin C_2: $|z| = 10$, $z_1 = -i$ et $z_2 = i$ sont à l'intérieur de C_2(0.5pt), alors en utilisant la formule intégrale de Cauchy :

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}dz = 2\pi i f(z_0) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(0.5pt)$$

Dans ce cas on considère, $f(z) = \mathbf{z}\mathbf{e}^{\mathbf{iz}}$

Et on a la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{(z+i)(z-i)}$ donne :

$$\frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{(z+i)}\right) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..(1pt)$$

$$\Rightarrow \oint_{|z|=4} \frac{\mathbf{ze^{iz}}}{\mathbf{z^2+1}}\boldsymbol{dz} = \oint_{|z|=4} \frac{\mathbf{ze^{iz}}}{(z+i)(z-i)}\boldsymbol{dz} = \frac{1}{2i}\oint_{|z|=4}\left(\frac{z\mathbf{e^{iz}}}{z-i} - \frac{z\mathbf{e^{iz}}}{(z+i)}\right)\boldsymbol{dz}$$

$$= \frac{1}{2i}\left(2\pi i f(i) - 2\pi i f(-i)\right) = i\pi(e^{-1} - e)$$

$$= -2i\pi sh1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..(0.5pt)$$

II. Pour $\oint_C \frac{\mathbf{z^2+\cos z}}{(\boldsymbol{z-\pi})^3}\boldsymbol{dz}$, On observe que $g_2(z) = \frac{\mathbf{z^2+\cos z}}{(\boldsymbol{z-\pi})^3}$ n'est pas défini en $z_0 = \pi$, et $g_2(z)$ est holomorphe dans $\mathbb{C} - \{\pi\}$ alors :

1) Pour le chemin C_1: $|z-1| = \frac{1}{2}$ le point singulier $z_0 = \pi$ est à l'extérieur de C_1(0.5pt) alors en utilisant le théorème de Cauchy :

$$\boldsymbol{I_2} = \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\mathbf{z^2+\cos z}}{(\boldsymbol{z-\pi})^3}\boldsymbol{dz} = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..(1pt)$$

2) Pour le chemin C_2: $|z| = 10$, $z_0 = 2$ est à l'intérieur de C_2, (0.5pt) alors on utilise la 2[iem] formule intégrale de Cauchy :

$$\oint_{\gamma} \frac{\boldsymbol{f(z)}}{(\boldsymbol{z-z_0})^{\boldsymbol{n+1}}}\boldsymbol{dz} = \frac{\boldsymbol{2\pi i f^{(n)}(z_0)}}{\boldsymbol{n!}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..(0.5pt)$$

$$\boldsymbol{I_2} = \oint_{|z|=4} \frac{\mathbf{z^2+\cos z}}{(\boldsymbol{z-\pi})^3}\boldsymbol{dz} = \frac{\boldsymbol{2\pi i f''(\pi)}}{\mathbf{2!}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..(0.5pt)$$

Dont $f(z) = z^2 + \cos z \Rightarrow f''(z) = 2 - \cos z \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..\dots\dots\dots\dots..(0.5pt)$

$$\oint_{|z|=4} \frac{\mathbf{z^2+\sin z}}{(\mathbf{z-2})^3}\boldsymbol{dz} = \pi i(2 - \cos\pi) = \boldsymbol{3\pi i} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..(0.5pt)$$

<u>Solution de L'Exercice N° 3 :</u>

$$f(z) = \frac{1+z^2}{z^4(1-z)} = f(z) = \frac{1+z^2}{z^4}\frac{1}{(1-z)} = \left(\frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^2}\right)\left(\frac{1}{(1-z)}\right) \dots\dots\dots\dots\dots\dots..(1pt)$$

On a $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots \dots\dots\dots\dots\dots\dots..(1pt)$

$$\Longrightarrow f(z) = \left(\frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^2}\right)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots)$$

$$= \left(\frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots\right) + \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots\right)$$

$$\Longrightarrow f(z) = \underbrace{\frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \frac{2}{z}}_{Parie\ Principale(0.5pt)} + \underbrace{2 + 2z + 2z^2 + 2z^3 + 2z^4 + 2z^5 + \cdots}_{Parti\ Analytique(0.5pt)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1pt)$$

- La partie principale est finie $(0.5pt)$ $(a_{-5} = 0)$ alors la fonction $f(z) = \frac{1+z^2}{z^4(1-z)}$ a un pôle ***d'ordre 4*** en $z_0 = 0(0.5pt)$
- le Résidu de $f(z)$ en 0 est égal à:

$$\text{Res}(f, 0) = a_{-1} = 2 \ (1pt)$$