Université de M'sila		**Faculté : Maths-informatique**
1^{er} Année Socle Commun	**Correction d'examen**	**Année scolaire : 2021/2022**
Module Analyse 2	**(Remplacement)**	**Durée : $1h30m$**

Barème

Exercice : 1 6pt

1. Soit la fonction $f(x) = Argth(x)$ $x \in]-1,1[$.

1.5 (a) Alors, le développement de $\frac{1}{1-x}$ au $V(0)$ à l'ordre 3 est :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3).$$

1.5 (b) Le développement de $\frac{1}{1+x}$ au $V(0)$ à l'ordre 3 est :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3).$$

2. Donc, on en déduit

1.5 $$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1+x} = \Big(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)\Big) \times \Big(1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)\Big)$$

0.5 $$= 1 + x^2 + o(x^3).$$

3. Comme $\forall x \in]-1,1[$: $Argth'(x) = \frac{1}{1-x^2}$, et $Argth(0) = 0$. Alors, par

1.5 intégration on a : $\int_0^x Argth'(t)dt = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt = \int_0^x (1 + t^2 + o(t^3))dt$

0.5 C'est à dire, $Argth(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$.

Barème

Exercice : 2 7pt

Soit l'intégrale $I = \int e^{-x} \sin 2x dx$.

1. On intègre I par parties deux fois, donc, on pose,

0.5 $\begin{cases} u(x) = \sin 2x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 2\cos 2x \\ v(x) = -e^{-x}, \end{cases}$ alors, on trouve :

0.5 $I = -e^{-x} \sin 2x + 2\int e^{-x} \cos 2x dx$

10.5 Posons aussi $I_1 = \int e^{-x} \cos 2x dx$, et $\begin{cases} w(x) = \cos 2x \\ z'(x) = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w'(x) = -2\sin 2x \\ z(x) = -e^{-x}. \end{cases}$

0.5 Donc, on obtient :$I_1 = -e^{-x} \cos 2x - 2\int e^{-x} \sin 2x dx$

Par conséquent, on a , $I = -e^{-x} \sin 2x - 2e^{-x} \cos 2x - 4\int e^{-x} \sin 2x dx$

0.5 Donc, $5I = 5\int e^{-x} \sin 2x dx = -e^{-x} \sin 2x - 2e^{-x} \cos 2x$

0.5 D'où, $I = \frac{-1}{5} e^{-x}(\sin 2x + 2\cos 2x),\ c \in \mathbb{R}$.

2. F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R} : F'(x) = f(x)$, donc on a :

1 $\forall x \in \mathbb{R} : [(\lambda \cos 2x + \mu \sin 2x)e^{-x} + c]' = e^{-x} \sin 2x$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : ((2\mu - \lambda)\cos 2x + (-2\lambda - \mu)\sin 2x)e^{-x} = e^{-x}\sin 2x.$$

Par comparaison les deux membres, on aura

1 $\begin{cases} 2\mu - \lambda = 0 \\ -2\lambda - \mu = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = \dfrac{-1}{5} \\ \lambda = \dfrac{-2}{5}. \end{cases}$

0.5 On obtient donc, $I = \int f(x)dx = F(x) + c = -\frac{1}{5}(2\cos 2x + \sin 2x)e^{-x} + c,\ c \in \mathbb{R}.$

1 (3) $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x}\sin 2x dx = \left[-\frac{1}{5}(2\cos 2x + \sin 2x)e^{-x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}.$

0.5 D'où $J = \frac{-1}{5}e^{-\frac{\pi}{4}} + \frac{2}{5}.$

Barème **Exercice : 3** 6pt

Soit l'équation différentielle : $y' - \frac{y}{x+1} = \frac{x}{x^2+1}, \quad x \in]-1, +\infty[. \quad (1)$

(1) On résoudre l'équation homogène : $y' - \frac{y}{x+1} = 0.$ Alors, on a

1 $y' - \frac{y}{x+1} = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+1} \Rightarrow \ln|y| = \ln(x+1) + \ln c,\ c > 0$

1 $\Rightarrow y = k(x+1),\ k = \pm c \in \mathbb{R}.$

(2) On cherche une solution particulière y_p par la méthode de variation de la constante.

0.5 Posons $y_p = k(x)(x+1)$, on a donc $y_p' = k'(x)(x+1) + k(x).$

1.5 $y_p' - \frac{y_p}{x+1} = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow k'(x) = \frac{x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{-1}{2(x+1)} + \frac{x+1}{2(x^2+1)}$

$$\Rightarrow k(x) = \frac{-1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+1}dx = -\frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx + d,\ d \in \mathbb{R}.$$

0.5 i.e, $y_p = (x+1)[-\frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x + d],\ d \in \mathbb{R}.$

(3) La solution générale est : $y_G = y_H + y_p.$ Alors, on a

0.5 $y_G = (x+1)[-\frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x + \lambda],\ \lambda = k + d \in \mathbb{R}.$

0.5 $y(0) = 4 \Rightarrow \lambda = 1.$

0.5 D'où $y = (x+1)[-\frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x + 1].$