Université de M'sila	**Correction d'examen**	Faculté : Maths-informatique
1^{er} Année Socle Commun	(Ratrappage)	Année scolaire : 2021/2022
Module Analyse 2		Durée : $1h30m$

Barème	**Exercice : 1** (6pt)
	(1) Soit la fonction $f(x) = x + \sqrt{x^2 + x}$.
	On développe la fonction $x \mapsto \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ au voisinage de $+\infty$ à l'ordre 2.
0.5	Posons $t = \frac{1}{x}$, donc, on a : $\begin{cases} t \to 0 \\ \text{si } x \to +\infty. \end{cases}$ Par suite, on aura :
1 + 1	$\sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2). \Rightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o(\frac{1}{x^2})$.
1	(2) Comme $f(x) = x + \sqrt{x^2 + x} = x + x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}$, Donc, on trouve
1.5	$f(x) = x + x(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o(\frac{1}{x^2})) = 2x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o(\frac{1}{x})$.
1	(3) Posons $(\Delta): \ y = 2x + \frac{1}{2}$, alors, on a :
1	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - y) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{1}{8x} + o(\frac{1}{x})) = 0$.
	C'est à dire (Δ) est une asymptote oblique de courbe de f au voisinage de $+\infty$.

Barème	**Exercice : 2** (7pt)
	Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{-2}{x^3 - x}$.
1	(1) $\forall x \in]1, +\infty[: f(x) = \frac{-2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$ $= \frac{(a+b+c)x^2 + (b-c)x - a}{x^3 - x}$.
1	Par comparaison les deux membres, on a : $\begin{cases} (a+b+c) = 0 \\ (b-c) = 0 \\ -a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{2}a = -1 \\ c = b \\ a = 2 \end{cases}$
0.5	donc, on a : $f(x) = \frac{-2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$.
1	(2) $I = \int \frac{-2}{x^3 - x}dx = \int \frac{2}{x}dx - \int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{1}{x+1}dx$.
1.5	Par conséquent $I = 2\ln x - \ln(x-1) - \ln(x+1) + c = \ln\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right) + c, \ c \in \mathbb{R}$.
	(3) $J = \int\limits_2^4 \frac{-2}{e^{-2t} - 1}dt$.
0.5	Faisons le changement, $x = e^{-x} \Rightarrow dx = -e^{-x}dt \Rightarrow dt = -\frac{dx}{x}$
0.5	On a aussi, $\begin{cases} x = 2 \\ t = e^{-2} \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 4 \\ t = e^{-4}. \end{cases}$

1	Alors, $J = \int_2^4 \frac{-2}{x^2-1}\frac{-dx}{x} = \int_{e^{-4}}^{e^{-2}} \frac{-2}{x^3-x}dx = \left[\ln\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)\right]_{e^{-4}}^{e^{-2}} = -4+\ln\left(\frac{e^{-4}-1}{e^{-8}-1}\right).$

Barème	**Exercice : 3** 6pt
	Soit l'équation différentielle : $y' + 2y = 3e^{-2x}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1)$
	(1) On résoudre l'équation homogène : $y' + 2y = 0.$ Alors, on a :
1	$y' + 2y = 0 \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = 2\int dx \Leftrightarrow \ln\lvert y\rvert = -2x + c$
1	$\Leftrightarrow y = ke^{-2x},\ k = \pm e^c \in \mathbb{R}.$
	(2) Montrons que $y_p = 3xe^{-2x}$ est une solution particulière de (1).
$0.5+1.5$	Alors, $y'_p = 3e^{-2x} - 6xe^{-2x} = 3(1-2x)e^{-2x}$, on a donc, $y'_p + 2y_p = 3e^{-2x}.$
1	(3) La solution générale est : $y_G = y_H + y_p.$ Alors, on a
	$y_G = ke^{-2x} + 3xe^{-2x} \Rightarrow y_G = (3x+k)e^{-2x},\ k \in \mathbb{R}.$
$0.5+0.5$	$y(1) = 1 \Rightarrow k = e^2 - 3.$ D'où $y = (3x + e^2 - 3)e^{-2x}.$