Table des matières

Introduction

$\mathcal{L}$a logique mathématique est une discipline des mathématiques introduite à la fin du 19e siècle, qui vise à étudier les mathématiques en tant que langage.

À travers l'étude de la logique mathématique, les éléments de base sont des formules qui représentent des énoncés mathématiques, des preuves formelles qui représentent des inférences mathématiques et une sémantique qui a une signification mathématique. Ici, nous étudions la logique mathématique à l'aide du langage. Par exemple, toutes les formules mathématiques sont transformées en une phrase linguistique qui peut être vraie ou fausse.

Par conséquent, le vrai et le faux de toute formule de langage mathématique est ce autour duquel tourne le concept de logique mathématique.

1

Notions de logique

1.1 Logique

Définition 1.1. Une assertion est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps.

Exemple 1.1. ☞ 2+4=6.

☞ Pour tout $x \in \mathbb{R},\ -x^2 \leq 0$.

☞ Pour tout $z \in \mathbb{C},\ |z| = \sqrt{2}$.

Définition 1.2 (Une proposition)**.** Une proposition est une expression mathématique noté : $\{P, Q, F, ...\}$ à laquelle on peut attribuer la valeur de vérité vrai ou faux.

Exemple 1.2. ✈ Tout nombre premier est pair, cette proposition est fausse.

✈ 8 est supérieure à 5, cette proposition est vraie.

✈ $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel, cette proposition est vraie.

Notation 1.1. – On note que la proposition P est vraie par $\langle 1 \rangle$.

– On note que la proposition P est fausse par $\langle 0 \rangle$.

Définition 1.3 (La négation)**.** Soit P une proposition, la négation de P est une proposition désignant le contraire quŠon note $\overline{P}$, Voici sa table de vérité.

P	$\overline{P}$
1	0
0	1

Maintenant Si P est une assertion et Q est une autre assertion, nous allons définir de nouvelles assertions construites à partir de P et de Q.

1.2 Les opérateurs logiques

Soient P,Q sont deux propositions

1.2.1 La conjonction $\langle et \rangle$

Définition 1.4. La conjonction est l'opérateur logique : et noté $\langle \wedge \rangle$, la proposition $(PetQ)$ ou $(P \wedge Q)$ est la conjonction des deux propositions P, Q.

- ☞ L'assertion $P \wedge Q$ est vraie si P est vraie et Q est vraie.
- ☞ L'assertion $P \wedge Q$ est fausse sinon.

On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	$P \wedge Q$
1	0	0
0	1	0
1	1	1
0	0	0

TABLE 1.1 – Table de vérité de $P \wedge Q$

Exemple 1.3. Nous présentons deux cas :

- ☞ 6 est un nombre pair et 3 est un nombre impair, cette proposition est vraie.
- ☞ $\sqrt{3} < 1$ et $\sqrt{2} \geq 2$, cette proposition est fausse.

1.2.2 La disjonction $\langle ou \rangle$

Définition 1.5. La disjonction est l'opérateur logique : ou noté $\langle \vee \rangle$, la proposition $(PouQ)$ i.e : $(P \vee Q)$ est la disjonction des deux propositions P, Q.

- ☞ L'assertion $P \vee Q$ est fausse si P est fausse et Q est fausse.
- ☞ L'assertion $P \vee Q$ est vraie sinon.

On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	$P \vee Q$
1	0	1
0	1	1
1	1	1
0	0	0

TABLE 1.2 – Table de vérité de $P \vee Q$

Exemple 1.4. Nous présentons deux cas :

- ☞ 2 est un nombre pair ou 3 est un nombre premier, cette proposition est vraie.
- ☞ $3 \leq 1$ ou $2 \geq 4$, cette proposition est fausse.

1.2.3 L'implication $\langle \Rightarrow \rangle$

Définition 1.6. L'implication de deux propositions P, Q est notée : $P \Rightarrow Q$ on dit P implique Q ou bien si P alors Q.
Donc,

- ☞ $P \Rightarrow Q$ est fausse si P est vraie et Q est fausse,
- ☞ $P \Rightarrow Q$ est vraie dans les autres cas.

On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	0	0
0	1	1
1	1	1
0	0	1

TABLE 1.3 – Table de vérité de $P \Rightarrow Q$

Exemple 1.5. Nous présentons deux cas :

- ☞ $0 \leq x \leq 25 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 5$ cette proposition est vraie.
- ☞ $\sin(\theta) = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$, cette proposition est fausse. Car, pour $\theta = \frac{5\pi}{2}$, $\sin(\theta) = 1$.

1.2.4 L'équivalence $\langle \Leftrightarrow \rangle$

Définition 1.7. L'équivalence de deux propositions P, Q est notée $P \Leftrightarrow Q$, on peut aussi écrire $(P \Rightarrow Q) et (Q \Rightarrow P)$.
On dit que :

- ☞ $P \Rightarrow Q$ est vraie, si P et Q ont la même la nature de la valeur de vérité.
- ☞ $P \Rightarrow Q$ est fausse, si pour les autres cas.

On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	0	0
0	1	0
1	1	1
0	0	1

TABLE 1.4 – Table de vérité de $P \Leftrightarrow Q$

Exemple 1.6. Nous présentons deux cas :

- ☞ $x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$, cette proposition est vraie.
- ☞ $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$, cette proposition est vraie.

Propriétés 1.1. Soient P, Q et R sont trois propositions. Nous avons les équivalences (vraies) suivantes :

1. $P \Leftrightarrow \overline{\overline{P}}$
2. $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$
3. $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$
4. $\overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$ Lois de Morgan.
5. $\overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$ Lois de Morgan.

6. $(P \wedge (Q \vee R)) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
7. $(P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
8. $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$

Démonstration. Pour démontrer ces propriétés, nous utilisons la table de vérité.
Par exemple :

1. **la propriété $n°$5.**

P	Q	$P \vee Q$	$\overline{(P \vee Q)}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \wedge \overline{Q}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0

TABLE 1.5 – Table de vérité pour propriété n°5.

2. **la propriété $n°$8.**

P	Q	P\Rightarrow Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1

TABLE 1.6 – Table de vérité pour propriété n°8.

□

1.3 Les quantificateurs

1.3.1 Le quantificateur $\forall$

Une assertion P peut dépendre d'un paramètre x, par exemple $e^x > 1$, l'assertion $P(x)$ est vraie ou fausse selon la valeur de x.
Donc l'assertion,

$$\forall x \in E, P(x).$$

On lit l'assertion précédente : Quel que soit x appartenant à E, P(x).

Exemple 1.7. Nous pouvons donner plusieurs exemples :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$. Est une assertion vraie.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |x| = x$. Est une assertion vraie.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1$. Est une assertion fausse.

1.3.2 Le quantificateur $\exists$

Une assertion P peut dépendre d'un paramètre x, alors l'assertion $P(x)$ est vraie lorsque l'on peut trouver au moins un x_0 de E pour lequel P(x) est vraie.
Nous pouvons écrire :

$$\exists x \in E, P(x).$$

On lit l'assertion précédente : Il existe x appartenant à E, P(x).

Exemple 1.8. Nous pouvons donner plusieurs exemples :

- ✓ $\exists x \in \mathbb{R},\ P(x) = x^2 - 2x = 0$. Est une assertion vraie, car il existe deux valeurs $x_0 = 0$ et $x_1 = 2$, tels que $P(x_i) = 0,\ i = 0, 1$.
- ✓ $\exists n \in \mathbb{N},\ n\,(n+1)$ est pair. Est une assertion vraie.
- ✓ $\exists x \in \mathbb{R},\ |x| \leq 0$. Est une assertion fausse.

1.3.3 La négation des quantificateurs

Nous pouvons résumer cela dans le tableau suivant :

L'assertion P	La négation de l'assertion P.i.e :$\overline{P}$
$\forall x \in E,\ P(x)$	$\exists x \in E,\ \overline{P}(x)$
$\exists x \in E,\ P(x)$	$\forall x \in E, \overline{P}(x)$

1.4 Les méthodes du raisonnement mathématique

Dans cette section, nous mentionnons plusieurs méthodes du raisonnement, notamment :

- ☞ Méthode de raisonnement direct
- ☞ Méthode de raisonnement cas par cas ou bien (disjonction des cas)
- ☞ Méthode de raisonnement par contraposée
- ☞ Méthode de raisonnement par l'absurde
- ☞ Méthode de raisonnement par contre-exemple
- ☞ Méthode de raisonnement par récurrence

1.4.1 Méthode de raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion $(P \Rightarrow Q)$.On suppose que P est vraie, et on veut montrer qu'alors Q est vraie.

Exemple 1.9. Montrer que :

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ n : pair,\ et\ m : impair\ \Rightarrow\ n \times m : pair.$$

Démonstration. On a :
n nombre naturel pair, alors :$\exists k_1 \in \mathbb{N},\ n = 2k_1$
m nombre naturel impair, alors :$\exists k_2 \in \mathbb{N},\ n = 2k_2 + 1$
Donc,
$n \times m = 2k_1 \times (2k_2 + 1) = 2\,(2k_1 + k_2) = 2k_3,\ , k_3 \in \mathbb{N}, /k_3 = 2k1 + k_2$
alors, $n \times m$ est un nombre pair. □

1.4.2 Méthode de raisonnement cas par cas

Si l'on souhaite vérifier une assertion $P(x)$ pour tous les x dans un ensemble E, on montre l'assertion pour les x dans une partie A de E, puis pour les x dans une partie B de E. Sachant que A et B sont un partition de E. C'est la méthode de disjonction des cas ou du cas par cas.

$$\forall x \in E,\ P(x)\text{est vraie} \equiv \begin{cases} P(x), & \text{c'est vraie, } \forall x \in A \\ & \wedge \\ P(x), & \text{c'est vraie, } \forall x \in B \end{cases} \tag{1.1}$$

Exemple 1.10. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{n\,(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$$

Démonstration. Pour prouver que $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$, il faut prouver que :

$$\begin{cases} \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}, & \text{si : } n \text{ pair}, \\ & \wedge \\ \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}, & \text{si : } n \text{ impair}. \end{cases} \tag{1.2}$$

1. Pour, n pair, alors $\exists k_1 \in \mathbb{N},\ n = 2k_1$. Donc,

$$\frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{2k_1\,(2k_1+1)}{2} = k_1\,(2k_1+1) \in \mathbb{N}.$$

Car, le produit de deux nombres naturels k_1 et $2k_1 + 1$ est un nombre naturel. Donc le nombre $\frac{n(n+1)}{2}$ est un nombre naturel pour n est un nombre pair.

2. Pour, n impair, alors $\exists k_2 \in \mathbb{N},\ n = 2k_2 + 1$. Donc,

$$\frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{(2k_2+1)\,(2k_2+2)}{2} = (2k_2+1)\,(k_2+1) \in \mathbb{N}.$$

Car, le produit de deux nombres naturels $(2k_2 + 1)$ et $(k_2 + 1)$ est un nombre naturel. Donc le nombre $\frac{n(n+1)}{2}$ est un nombre naturel pour n est un nombre pair.

□

1.4.3 Méthode de raisonnement par contraposée

Le raisonnement par contra-position est basé sur l'équivalence suivante

$$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$$

Donc si l'on souhaite montrer le proposition $(P \Rightarrow Q)$, on montre en fait que si $\overline{Q}$ est vraie alors $\overline{P}$ est vraie.

Exemple 1.11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Démonstration. Pour démontre que n^2 est pair $\Rightarrow n$ est pair, alors En utilisons la méthode de raisonnement contraposée,
Donc,

$$\overline{n \text{ est pair}} \Rightarrow \overline{n^2 \text{ est pair}}$$

Autrement dit,

$$n \text{ est impair} \Rightarrow n^2 \text{ est impair}$$

supposons que n est impair. Donc, $\exists k_1 \in \mathbb{N}$, tel que $n = 2k_1 + 1$. Alors

$$n^2 = (2k_1+1)^2 = 4k_1^2+4k_1+1 = 2(2k_1^2+2k_1)+1 = 2k_2+1, \text{ tq :} k_2 = \left(2k_1^2 + 2k_1\right) \in \mathbb{N}$$

Et donc n^2 est impair.

Nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair. Par la démonstration de contra-position ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair. $\square$

1.4.4 Méthode de raisonnement par l'absurde

Pour montrer que l'assertion où bien le proposition R tels que $R = P \Rightarrow Q$ est une proposition vraie.
On suppose que $\overline{R}$, (i.e :$P \wedge \overline{Q}$) est vraie et on tombe sur une contradiction, et d'autre part pour démontrer que le proposition P est vraie, on supposons facilement que $\overline{P}$ est vraie et on tombe sur une contradiction.

Exemple 1.12. Soient $a, b \geq 0$. Montrer que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

Démonstration. Par l'absurde en supposant que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ et $a \neq b$.
On a, comme $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$, alors $a\,(1 + a) = b\,(1 + b)$, donc $a + a^2 = b + b^2$.
On obtient

$$a^2 - b^2 = b - a = -(a - b) \Rightarrow (a - b)\,(a + b) = -\,(a - b)$$

d'où,

$$a + b = -1.$$

On tombe sur une contradiction car, $a, b \geq 0$.

Enfin nous concluons : si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

$\square$

1.4.5 Méthode de raisonnement par contre-exemple

Le but de cet méthode est de trouver la valeur x pour cette proposition $P(x)$ qui la rend pas toujours vraie.

Exemple 1.13. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \ln(1+x) \neq 0$.

Démonstration. Dans cet exemple. le proposition est fausse. Car lorsque l'on prend le contre-exemple suivant : pour $x_0 = 0 \in \mathbb{R}_+$.
On trouve que $f(x) = 0$. □

1.4.6 Méthode de raisonnement par récurrence

Pour montrer que $P(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,\ P(n)$ est vraie on suit les étapes suivantes :

1. On montre que $P(n_0)$ est vraie, (n_0 : valeur initiale).
2. On suppose que $P(n)$ est vraie à l'ordre n.
3. On montre que $P(n+1)$ est vraie à l'ordre $n+1$, alors P est vraie pour tous $n \geq n_0$.

Exemple 1.14. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n > n$.

Démonstration.
1. Pour $n_0 = 0$, on obtient $1 > 0$, donc le proposition $P(n)$ est vraie pour la valeur initiale $n_0 = 0$.
2. Supposons que $P(n)$ soit vraie.(.ie :$\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n > n$)
3. Nous allons montrer que $P(n+1)$ est vraie.(.i.e :$\forall n \in \mathbb{N},\ 2^{n+1} > n+1$. (?))

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2^n + 2^n > n + 2^n, \text{ car par } P(n) \text{ nous savons } 2^n > n. \\ &> n+1, \text{ car : } 2^n \geq 1. \end{aligned}$$

□