Université Mohamed Boudiaf-M'sila — Département de l'informatique
Première année informatique — 2022-2023

Série d'exercices N°01.
Algèbre 1

Exercice 01 :

Voici les propositions suivantes, sont-elles **vraies** ou **fausses** ?. Justifiez votre réponse.

1. $2+5=7$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}, n+1=2$.
3. Il existe $n \in \mathbb{N}, n+3=3$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}, n$ est pair.
5. Pour tout $z \in \mathbb{C}, |z|=1$.
6. Pour tout $z \in \mathbb{C}, z=\overline{z},$ si : $z \in \mathbb{R}$.
7. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et, $x, y \in \mathbb{R}$, tq : $z=x+iy,\ |z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Exercice 02 :

Exprimer les assertions suivantes à l'aide des quantificateurs et répondre aux questions :

a) Le produit de deux nombres pairs est-il pair ?

b) Le produit de deux nombres impairs est-il impair ?

c) Le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est-il pair ou impair ?

d) Un nombre entier est pair si et seulement si son carré est pair ? (*).

Exercice 03 :

Soient les propositions suivantes :

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R},\ \alpha+\beta>0$
2. $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R},\ \alpha+\beta>0$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R},\ \alpha^2+\beta^2 \geq 0$
4. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, |\alpha| \geq 0$
5. $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R},\ \beta^2>\alpha$ (*).

Ces propositions sont elles vraies ou fausses ? Donner leur négation.

Exercice 04 :

Dans quels cas les propositions suivantes sont elles vraies ?

a) $\overline{P} \vee P$

b) $(P \Rightarrow Q) \wedge \left(\overline{P} \Rightarrow Q\right)$

c) $\overline{P \wedge \left(\overline{Q \wedge R}\right)} \Leftrightarrow Q$

d) $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$

e) $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow (\overline{P} \vee \overline{Q})$

f) $((P \vee Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$ (*).

Exercice 05 :

1. En utilisant le raisonnement par l'absurde démontrer que
   a) $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.
   b) Si $n \in \mathbb{N}^*$ alors n^2+1 n'est pas le carré d'un entier naturel.
2. Monter par récurrence
   a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$.
   b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   c) $\forall a \in \mathbb{R}^+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (1+a)^n \geq 1+na$.

Exercice 06 : (À domicile)
On considère les propositions suivantes :

☞ $\mathcal{P}(n)$: $4^n - 1$ est divisible par 3.

☞ $\mathcal{Q}(n)$: $4^n + 1$ est divisible par 3.

1. Montrer que les propositions $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{Q}(n)$ sont héréditaires.
2. Montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Que peut-on dire pour $\mathcal{Q}(n)$?

Exercice 07 : (À domicile)
On rappelle que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

1. Démontrer que si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a + b\sqrt{2} = 0$, alors $a = b = 0$.
2. En déduire que si m, n, p et q sont des entiers relatifs, alors

$$m + n\sqrt{2} = p + q\sqrt{2} \Leftrightarrow (m = p \text{ et } n = q)\,.$$