

---

---

# CHAPITRE 1

---

## RAPPELS ET COMPLÉMENTAIRES

Ce chapitre semble servir de base pour les chapitres à venir en fournissant une révision et un complément des concepts clés nécessaires pour comprendre le matériel qui sera abordé par la suite. Voici un résumé de ce qui sera traité dans ce chapitre :

Espaces de Banach : Il s'agit d'espaces vectoriels normés complets, où la notion de convergence est définie.

Espaces vectoriels topologiques : Ces espaces combinent à la fois une structure vectorielle et une topologie, ce qui permet de parler de notions de continuité et de convergence dans un cadre plus général.

Dualité et topologie faible : Ce concept concerne les espaces vectoriels topologiques et leurs espaces duaux, ainsi que la notion de topologie faible et faible\*.

Espaces des fonctions régulières : Ces espaces sont souvent utilisés pour étudier des propriétés de régularité des fonctions.

Espace des fonctions test : C'est un espace de fonctions spécifiquement conçu pour étudier les distributions et la théorie des distributions.

Espaces de Lebesgue : Ces espaces sont utilisés pour étudier les fonctions mesurables et les intégrales de Lebesgue, produit de convolution et transformation de Fourier.

Mesure de Radon : Il s'agit d'une mesure sur les espaces topologiques, souvent utilisée en analyse fonctionnelle et en analyse harmonique.

Domaines réguliers : Ces sont des sous-ensembles réguliers d'un espace, souvent utilisés dans le contexte de l'intégration.

Intégrale sur le bord : Cette notion concerne l'intégration des fonctions sur les bords des domaines.

Il est noté que ce chapitre ne plonge pas dans les détails des preuves, mais plutôt présente brièvement les définitions et les résultats clés. Les personnes désireuses d'approfondir leurs connaissances sont encouragées à consulter les références mentionnées dans le polycopié pour obtenir des informations plus détaillées et des preuves complètes.

## 1.1 Espaces de Banach

Nous rencontrerons de nombreux exemples d'espaces de Banach (espaces de Lebesgue, espaces de Sobolev ... etc), ce qui nous oblige à évoquer brièvement certaines des caractéristiques des espaces de Banach.

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Définition 1.1** : Soit  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  une application.

i) On dit que  $p$  est une semi-norme ssi :

\*  $p$  est homogène, i.e.  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E : p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$ .

En particulier :  $p(0) = 0$ .

\*  $p$  satisfait l'inégalité triangulaire, i.e.  $\forall x \in E, \forall y \in E : p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ .

ii) Si de plus :  $\forall x \in E, p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ,

on dit que  $p$  est une norme sur  $E$ .

**Définition 1.2** : On appelle espace vectoriel normé le couple  $(E, \|\cdot\|)$  formé d'un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , et une norme définie sur  $E$ .

**Définition 1.3** : Deux normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  de  $E$  sont appelées équivalentes s'il existe  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  tels que

$$\forall x \in E : \alpha \|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq \beta \|\cdot\|_1$$

**Proposition 1.1** : Un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$  est un espace métrique dont la distance  $d$  est définie par

$$d(x, y) = \|x - y\|, \forall x, y \in E.$$

**Proposition 1.2** : Les boules ouvertes et fermées sont convexes. On dit que  $(E, \|\cdot\|)$  est localement convexe.

**Définition 1.4** : On dit qu'un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$  est uniformément convexe si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$ , tel que pour tous  $x, y \in B_E$  on a :

$$\left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\| \geq 1 - \delta \Rightarrow \|x - y\| \leq \varepsilon.$$

**Proposition 1.3** : Une application linéaire  $f : E \rightarrow F$  est continue si et seulement si

$$\exists M > 0; \forall x \in E : \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E.$$

Il résulte que toute application linéaire continue est Lipschitzienne.

**Définition 1.5** : On note  $\mathcal{L}(E; F)$  l'espace des applications linéaires continues de  $E$  dans  $F$ . On appelle dual topologique de  $E$  et on note  $E' = \mathcal{L}(E; \mathbb{R})$  l'espace des formes linéaires continues sur  $E$ .

**Proposition 1.4** : La quantité  $\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F$  est une norme sur  $\mathcal{L}(E; F)$ .

**Définition 1.6** : On dit qu'un espace vectoriel normé est un espace de Banach s'il est un espace métrique complet.

**Théorème 1.1** : Si  $F$  est un espace de Banach, alors ;  $\mathcal{L}(E; F)$  est un espace de Banach. En particulier  $E'$  est un espace de Banach.

**Théorème 1.2 (Banach-Steinhaus)** : Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach,  $(f_n)$  une suite des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ . Si  $(f_n(x))$  est une suite bornée, alors elle est uniformément bornée, i.e :

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N} : \sup_{x \neq 0} \frac{\|f_n(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq M.$$

**Définition 1.7 (opérateur compact)** : Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés,  $A$  une application (opérateur) linéaire de  $E$  dans  $F$ . On dit que  $A$  est compact si l'image de la boule d'unité  $B_E(0, 1)$  est relativement compact dans  $F$ .

**Remarque 1.1** : Si  $A$  est un opérateur compact de  $E$  dans  $F$  alors : de toute suite bornée  $\{u_j\}_{j=1}^{+\infty}$  dans  $E$ , on peut extraire une sous suite  $\{u_{j,k}\}$  telle que  $A(u_{j,k})$  converge dans  $F$ .

## 1.2 Espaces vectoriels topologiques

Les espaces vectoriels topologiques sont des espaces vectoriels munit d'une structure topologique compatible avec les deux opérateurs internes (+) et externe (.) de ces espaces. Parmi ces espaces on trouve par exemple des espaces des fonctions régulières et leurs dualités.

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Définition 1.8** : On dit que  $E$  est un espace vectoriel topologique, si l'on muni d'une structure topologique ayant les propriétés suivantes :

- i) L'addition  $(x, y) \rightarrow x + y$  est une application continue de  $E \times E$  dans  $E$ .
- ii) Le produit  $(\lambda, X) \rightarrow \lambda.x$  est une application continue de  $\mathbb{R} \times E$  dans  $E$ .

**Exemple 1.1** Toute espace vectoriel normé est un espace vectoriel topologique. Les boules ouvertes composent un système fondamental de voisinage de cet espace.

La topologie d'un espace vectoriel normé est invariante par la translation et homothétie, par conséquent on peut engendrer cette topologie, en utilisant les voisinages de l'origine 0.

Parmi les méthodes de construction des espaces vectoriels topologiques, il y a deux méthodes :

**Méthode 1** : on définit un système fondamental de voisinages de 0 par la définition d'une famille de semi-normes, ce système fondamental est par exemple les boules ouvertes.

**Méthode 2** : On construit une famille de sous-espaces vectoriels munis de topologies du type mentionné ci-dessus. Cette méthode utilise la notion de limite inductive de l'ensemble des espaces localement convexes. C'est la méthode qui est appliquée sur l'espace  $\mathcal{D}(\Omega)$  par exemple.

**Définition 1.9** : On appelle un espace localement convexe toute espace vectoriel topologique tel que 0 admet un système de voisinages convexes.

**Définition 1.10** : Soit  $E$  un espace vectoriel topologique. On dit qu'un ensemble  $A \subset E$  est borné si pour tout voisinage  $V$  de 0, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| \geq n \Rightarrow A \subset \lambda V.$$

On dit que  $E$  est localement borné, s'il contient au moins un ouvert non vide et borné.

### 1.3 Fonctionnelles, dual topologique

**Définition 1.11** : On appelle fonctionnelle toute fonction numérique  $f$ , définie sur un espace vectorielle  $E$ .

**Proposition 1.5** :

1. Toute fonctionnelle linéaire sur un espace vectoriel topologique a dimension finie est continue.
2. Toute fonctionnelle linéaire sur un espace vectoriel topologique, continue à un point, est continue sur toute l'espace.

**Théorème 1.3** : Soit  $f$  une fonctionnelle linéaire sur un espace vectoriel topologique  $E$ . Alors :  $f$  est continue sur  $E$  ss'il existe un voisinage  $V$  de 0 dont la fonctionnelle  $f$  soit borné sur  $V$ .

**Définition 1.12** : Soit  $E$  un espace vectoriel topologique. On appelle dual de  $E$  et on le note par  $E'$  l'espace des fonctionnelle linéaires continues sur  $E$ .

**Définition 1.13** : Soit  $E$  un espace vectoriel topologique localement convexe et séparé. On appelle bidual de  $E$  et on le note par  $E''$  l'espace dual de l'espace  $E'$ .

Il existe une injection de  $E$  dans  $E''$ , on le note par  $\pi$ .

Si  $\pi(E) = E''$  et  $\pi$  continue par la topologie forte de  $E''$ , on dit que  $E$  est réflexif. Dans ce cas là les espaces  $E$  et  $E''$  sont isomorphes.

Soit  $E$  un espace vectoriel topologique séparée, localement convexe et  $E'$  son dual topologique.

**Définition 1.14 (topologie forte sur  $E'$ ) :** On munit  $E'$  d'une topologie séparée et localement convexe, dite la topologie forte, en prenant le système fondamentale des voisinages de 0 suivant :

$$\{x \in A, |f(x)| < M\}, M > 0, A \text{ borné.}$$

**Définition 1.15 (topologie faible sur  $E$ ) :** La topologie faible sur un espace vectoriel topologique  $E$  consistent en une système fondamentale des voisinages ouverts de 0 de la forme

$$\{x \in E : |f_i(x)| < M\}, M > 0, i = 1, \dots, n.$$

Cette topologie est la plus faible (moins fine) topologie pour que les fonctionnelles linéaires soit continues.

On dit qu'une suite  $(x_n)$  est converge faiblement dans  $E$  vers  $x \in E$  et on le note par  $x_n \rightharpoonup x$  ssi pour tout  $f \in E'$  on a :  $f(x_n)$  converge vers  $f(x)$ .

**Définition 1.16 (topologie faible sur  $E'$  (faible\*) :** On munit  $E'$  d'une topologie dite la topologie faible de  $E'$ , en prenant le système fondamentale des voisinages de 0 suivant :

$$\{f \in E', |f(x_i)| < M\}, M > 0, i = 1, \dots, n.$$

On dit qu'une suite des fonctionnelles linéaires  $(f_n)$  est converge faiblement dans  $E'$  (où faiblement\*) vers  $f \in E'$  ssi pour tout  $x \in E$  on a :  $f_n(x)$  converge vers  $f(x)$ .

## 1.4 Espaces de Fréchet

**Définition 1.17 :** Un espace localement convexe est dite métrisable, s'il est muni d'une famille des semi-normes  $(p_j)$  croissante (ie :  $\forall x \in E, \forall j \in \mathbb{N} : p_j(x) \leq p_{j+1}(x)$ ) telle que :

$$(\forall j \in \mathbb{N} : p_j(f) = 0) \Leftrightarrow f = 0$$

**Proposition 1.6 :** Soit  $(\alpha_j)$  une suite des réels strictement positifs telle que la série  $\sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha_j$  converge. Soit  $E$  un espace localement convexe et métrisable. On note par  $(p_j)$  la famille des semi-normes de cette espace. L'application  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  définit par :

$$\forall (f, g) \in E^2 : d(f, g) = \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j \min(1, p_j(f - g))$$

est une distance sur  $E$ .

**Définition 1.18 (Espace de Fréchet) :** On dit qu'un espace localement convexe, métrisable, et muni d'une topologie défini par la distance ci-dessus est de Fréchet s'il est complet.

**Proposition 1.7** : Soient  $E$  un espace de Fréchet pour la famille des semi-normes  $(p_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ,  $F$  un espace de Fréchet pour la famille des semi-normes  $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $L$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . Alors :  $L$  est continue ssi :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists c > 0, j \in \mathbb{N}, \forall x \in E : q_k(L(x)) \leq cp_j(x).$$

**Théorème 1.4 (Hahn-Banach)** : Soient  $E$  un espace vectoriel topologique,  $G$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $p$  une application de  $G$  dans  $\mathbb{R}$ , vérifiant :

$$\forall \lambda > 0, \forall x \in E : p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad \forall x, y \in E : p(x + y) \leq p(x) + p(y).$$

Soit  $g$  une application linéaire d'un dans  $\mathbb{R}$ , vérifiant :

$$\forall x \in G : g(x) \leq p(x).$$

Alors, il existe un prolongement linéaire  $f$  de  $g$  sur  $E$ , vérifiant :

$$\forall x \in G : g(x) = f(x), \quad \forall x \in E : f(x) \leq p(x).$$

**Corollaire 1.1** : Soient  $E$  un espace vectoriel topologique,  $G$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $g \in G'$ , de la norme :  $\|g\|_{G'} = \sup_{x \in G, \|x\| \leq 1} |g(x)|$ . Alors, il existe un prolongement  $f \in E'$  de  $g$  avec :  $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$ .

**Théorème 1.5 (Banach-Steinhaus)** : Soient  $E$  un espace de Fréchet pour la famille des semi-normes  $(p_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ,  $F$  un espace de Fréchet pour la famille des semi-normes  $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et soit  $(L_\alpha) : E \rightarrow F$  une famille des applications linéaires continues. Supposons que pour toute  $x \in E$  on a  $(L_\alpha(x))$  est borné dans  $F$ . Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists c > 0, j \in \mathbb{N}, \forall x \in E, \forall \alpha : q_k(L_\alpha(x)) \leq cp_j(x).$$

**Corollaire 1.2** : Soit  $E$  un espace de Fréchet, et  $F$  un espace localement convexe métrisable, et soit  $L_j : E \rightarrow F$  une suite des applications linéaires continues. Supposons que pour toute  $x \in E$  la suite  $L_j(x)$  converge dans  $F$  vers un élément  $L(x)$ . Alors :

1. L'application  $L : E \rightarrow F$  qui associe  $x \in E$  l'élément  $L(x)$  est linéaire et continue.
2.  $x_j \rightarrow x$  dans  $E$  implique que  $L_j(x_j) \rightarrow L(x)$  dans  $F$ .

## 1.5 Espaces des fonctions régulières

Soit  $\Omega$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.19** : Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $k \in \mathbb{N}$ . On dit que est  $f$  de classe  $\mathcal{C}^k(\Omega)$  si et seulement si  $D^\alpha f$  existe et continue pour toute multi-indices  $\alpha$  tel que  $|\alpha| \leq k$ .

Si  $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$  pour toute  $m \in \mathbb{N}$  on dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$

**Proposition 1.8** Soit  $K \subset \Omega$  un compact et  $m \leq k$  deux entiers naturelles. La quantité

$$P_{K,m}(f) = \sup_{|\alpha| \leq m, x \in K} |D^\alpha f(x)|, f \in \mathcal{C}^k(\Omega),$$

définie une semi-norme sur  $\mathcal{C}^k(\Omega)$ .

On munit l'espace  $\mathcal{C}^k(\Omega)$  d'une structure topologique compatible aux dérivées successives j'usqua  $k$  en utilisant une famille des semis normes  $(P_{K,m})$ , où  $K$  parcourt l'ensemble des compacts inclus dans  $\Omega$  et  $m$  parcourt l'ensemble  $\{0, 1, \dots, k\}$ .

L'espace  $\mathcal{C}^k(\Omega)$  muni de la structure topologique ci-dessus est un espace vectoriel topologique, localement convexe, séparé. De plus,  $\mathcal{C}^k(\Omega)$  est un espace de Fréchet.

De même manière, on munit  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$  d'une structure topologique, par conséquent l'espace vectoriel topologique  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$  est un espace localement convexe, séparé et de Fréchet.

On donne une définition pratique de la convergence dans  $\mathcal{C}^k(\Omega)$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ .

**Définition 1.20 :**

i) Soit  $k \in \mathbb{N}$ . On dit qu'une suite des fonctions  $(f_j) \subset \mathcal{C}^k(\Omega)$  est converge vers  $f$  dans  $\mathcal{C}^k(\Omega)$  si pour tout compact  $K \subset \Omega$  et pour tout entier naturel  $m \leq k$  on a :

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} P_{K,m}(f_j - f) = 0.$$

ii) On dit qu'une suite des fonctions  $(f_j) \subset \mathcal{C}^\infty(\Omega)$  est converge vers  $f$  dans  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$  si pour tout compact  $K \subset \Omega$  et pour tout entier naturel  $m \in \mathbb{N}$  on a :

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} P_{K,m}(f_j - f) = 0.$$

## 1.6 Espace $\mathcal{D}(\Omega)$

Soit  $\Omega$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.21 :** Soit  $f$  une fonction défini presque par tout (ppt) sur  $\Omega$ .

On appelle ouvert d'annulation de  $f$  le plus grand ouvert  $\mathcal{O}_f$  tel que  $f \equiv 0$  ppt.  $\text{supp } f$  (support de  $f$ ) est par définition  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}_f$ , le complémentaire de  $\mathcal{O}_f$ .

**Proposition 1.9** On a :  $\text{supp } f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$

**Définition 1.22 :** Soit  $K \subset \Omega$  un compacte et soit  $m \in \mathbb{N}$ .

- i)  $\mathcal{D}_K^m(\Omega)$  est l'espace des fonctions de  $\mathcal{C}^m(\Omega)$ , à support compact inclus dans  $K$ .
- ii)  $\mathcal{D}^m(\Omega)$  est l'espace des fonctions de  $\mathcal{C}^m(\Omega)$ , à support compact inclus dans  $\Omega$ .
- iii)  $\mathcal{D}_K(\Omega)$  est l'espace des fonctions de  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ , à support compact inclus dans  $K$ .
- iv)  $\mathcal{D}(\Omega)$  est l'espace des fonctions de  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ , à support compact inclus dans  $\Omega$ .

**Remarque 1.2 :**

1.  $\mathcal{D}(\Omega)$  est appelé l'espace des fonctions test.
2. On utilise parfois les notations suivantes :  
 $\mathcal{K}(\Omega)$  où  $\mathcal{C}_0^0(\Omega)$  pour l'espace  $\mathcal{D}^0(\Omega)$ .  
 $\mathcal{C}_0^m(\Omega)$  pour l'espace  $\mathcal{D}^m(\Omega)$ .  
 $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  pour l'espace  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

**Exemple 1.2 :** Soit  $\varphi$  la fonction défini par : 
$$\begin{cases} \varphi(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}} & : x \in ]-1, 1[ \\ \varphi(x) = 0 & : x \notin ]-1, 1[ \end{cases}$$

On peut montrer que  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

**Proposition 1.10 :** On a : 
$$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{K \subset \Omega, K \text{ compact}} \mathcal{D}_K(\Omega).$$

**Proposition 1.11 :**

1. Si  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  et  $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ , alors :  $\varphi \cdot \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .
2. Si  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , alors :  $\lambda\varphi + \mu\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .

On munit l'espace  $\mathcal{D}(\Omega)$  d'une topologie dite limite inductive stricte des espaces de Fréchet de type  $\mathcal{D}_K(\Omega)$ , où  $K$  sont des compacts parcourus  $\Omega$ . La topologie définie sur les espaces  $\mathcal{D}_K(\Omega)$  est la topologie induite par celle de  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ .

On peut alors donner une caractérisation de la convergence dans l'espace  $\mathcal{D}(\Omega)$  comme suivant :

**Définition 1.23 :** On dit qu'une suite des fonctions de test  $(\varphi_j)$  est converge vers  $\varphi$  dans  $\mathcal{D}(\Omega)$  s'il existe un compact  $K \subseteq \Omega$  tel que :

1.  $\text{supp } \varphi_j \subseteq K$  pour toute  $j$  et  $\text{supp } \varphi \subseteq K$ .
2. Pour tout  $m \in \mathbb{N}$  on a :  $\lim_{j \rightarrow +\infty} P_{K,m}(\varphi_j - \varphi) = 0$ .

**Définition 1.24 :** On dit qu'une suite  $\{\rho_j\}_{j=1}^{+\infty}$  dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  est une suite régularisante si pour toute  $j \in \mathbb{N}$  il existe  $\varepsilon_j$  ( $\varepsilon_j \rightarrow 0$  lorsque  $j \rightarrow +\infty$ ) tel que :

$$\rho_j \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \rho_j(x) dx = 1, \quad \text{supp } \rho_j \subseteq B(0, \varepsilon_j).$$

Une telle fonction  $\varphi_j$  est appelée une fonction «pic» sur  $B(0, \varepsilon_j)$ .

**Exemple 1.3 :** Soit  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  telle que  $\text{supp } \psi \subseteq B(0, 1)$  et on pose :  $\rho = \frac{\psi}{\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx}$ .  
On a :  $\text{supp } \rho \subseteq B(0, 1)$ . Pour toute suite positif  $(\varepsilon_j)$  tend vers 0 on pose :  $\rho_j(x) = \frac{1}{\varepsilon_j^n} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon_j}\right)$ .  
On peut vérifier que cette suite est régularisante. Cette famille est appelé «**approximation de l'unité**».

**Définition 1.25 :** Soit  $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire. On dit que  $T$  est continue ssi :  
Pour toute suite  $(\varphi_j)$  converge vers  $\varphi$  dans  $\mathcal{D}(\Omega)$  la suite  $T(\varphi_j)$  converge vers  $T(\varphi)$  dans  $\mathbb{R}$ .



## 1.7 Quelques résultats principaux

Soit  $\Omega$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposition 1.12** : *Il existe toujours une suite (dite exhaustive) des compacts  $(K_j)$  dans  $\Omega$  telle que :*

1.  $\forall j \in \mathbb{N} : K_j \Subset K_{j+1}, (K_j \subset \overset{0}{K}_{j+1}),$
2.  $\Omega = \bigcup_{j=0}^{+\infty} K_j.$

**Théorème 1.6 (Lemme d'Urysohn)** : *Soit  $K, F$  deux parties disjointes de  $\mathbb{R}^n$ , telles que  $K$  est compacte et  $F$  est fermée. Alors, il existe  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  telle que :*

- i)  $0 \leq \varphi \leq 1,$
- ii)  $\varphi = 0$  au voisinage  $V$  de  $F,$
- iii)  $\varphi = 1$  au voisinage  $W$  de  $K.$

**Corollaire 1.3** : *Soit  $K$  un compact de  $\Omega$ , Alors, il existe  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  telle que :*

- i)  $0 \leq \varphi \leq 1,$
- ii)  $\varphi = 1$  au voisinage de  $K$  (on peut le choisir compact).

**Définition 1.26** : *Soit  $(\Omega_j)$  une suite exhaustive des ouverts de  $\Omega$ , On dit qu'une suite  $(\varphi_j) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  est une suite troncative sur  $\Omega$  si on a pour tout  $j$  :*

- i)  $0 \leq \varphi_j \leq 1,$
- ii)  $\varphi_j = 1$  au voisinage de  $\overline{\Omega}.$

**Proposition 1.13** : *Tout ouvert admet une suite troncative.*

**Théorème 1.7 (partition de l'unité)** : *Soit  $K$  un compact inclus dans un union fini des ouverts  $(\Omega_j)_{j=1}^N$ . Alors, il existe une famille de fonctions  $(\varphi_j)_{j=1}^N$  telles que :*

- i)  $\varphi_j \in \mathcal{D}(\Omega_j),$
- ii)  $0 \leq \varphi_j \leq 1,$
- ii)  $\sum_{j=1}^N \varphi_j = 1.$

## 1.8 Espaces de Lebesgue

On muni  $\mathbb{R}^n$  de la tribu borélienne (ou de Lebesgue), et par la mesure de Lebesgue usuelle  $dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ . Soit  $\Omega$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.27** : *Soit  $f$  une fonction mesurable sur  $\Omega$ . On dit que  $f$  est Lebesgue intégrable, si  $f$  est mesurable et  $\int_{\Omega} |f(x)| dx < +\infty$ .*

*On désigne par  $\mathcal{L}^1(\Omega)$  l'espace des fonctions Lebesgue intégrables sur  $\Omega$ .*

On désigne par  $L^1(\Omega)$  l'espace quotient  $\mathcal{L}^1(\Omega)/\sim$ , où  $\sim$  est la relation d'équivalence :

$$f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega), f \sim g \text{ si et seulement si } f = g \text{ p.p sur } \Omega.$$

On munit  $L^1(\Omega)$  de la norme suivante :  $|f|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f(x)| dx$ .

**Définition 1.28** De même manière, l'espace  $L^p(\Omega)$  ( $p > 1$ ) est l'espace des classes des fonctions mesurables  $f$  telles que  $f^p \in L^1(\Omega)$ , ie  $\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty$ .

On munit  $L^p(\Omega)$  de la norme suivante :  $|f|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ .

**Définition 1.29** L'espace  $L^\infty(\Omega)$  est l'espace des classes des fonctions mesurables  $f$  telles que  $\text{ess sup}(f) = \inf\{c \geq 0, |f| < c \text{ p.p sur } \Omega\} < +\infty$ .

On munit  $L^\infty(\Omega)$  de la norme suivante :  $|f|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess sup}(f)$ .

**Définition 1.30** L'espace  $L^p_{loc}(\Omega)$  ( $p > 1$ ) est l'espace des classes des fonctions mesurables  $f \in L^p(K)$  pour tout compact  $K \subset \Omega$ .

**Théorème 1.8 :**

1. L'espace  $L^p(\Omega)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) munit de la norme  $|\cdot|_{L^p(\Omega)}$  est un espace de Banach.
2. L'espace  $L^2(\Omega)$  est un espace de Hilbert, muni de produit scalaire :

$$f, g \in L^2(\Omega) : (f, g) = \int_{\Omega} f(x) \cdot g(x) dx.$$

3. L'espace  $L^p(\Omega)$  ( $1 < p < \infty$ ) est uniformément convexe.
4. L'espace  $L^p(\Omega)$  ( $1 < p < \infty$ ) est réflexif.
5. L'espace  $L^p(\Omega)$  ( $1 \leq p < \infty$ ) est séparable.
6.  $L^1(\Omega), L^\infty(\Omega)$  ne sont pas réflexifs.  $L^\infty(\Omega)$  n'est pas séparable.

**Théorème 1.9 (inégalité de Hölder) :** Soient  $p, p' \in ]1, +\infty[$  tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Alors : pour tous  $f \in L^p(\Omega), g \in L^{p'}(\Omega)$  on a  $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ . De plus :  $\|f \cdot g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}$ .  $p'$  est appelé le conjugué de  $p$  et on a :  $p' = \frac{p}{p-1}$ .

En particulier, on a l'inégalité de Cauchy-Schwartz :  $\forall f, g \in L^2(\Omega) : \|f \cdot g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^2(\Omega)}$ .

**Remarque 1.3 :**

- i) Soient  $p_1, p_2, \dots, p_k \in [1, +\infty]$  et  $p \geq 1$  tel que  $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k}$ . Soit  $f_1 \in L^{p_1}(\Omega), f_2 \in L^{p_2}(\Omega), \dots, f_k \in L^{p_k}(\Omega)$  et  $f = f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_k$ . Alors :  $f \in L^p(\Omega)$  et on a l'inégalité de Hölder généralisée :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \cdot \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \cdot \dots \cdot \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

ii) Si  $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$  avec  $1 \leq p \leq q \leq +\infty$  alors :  $f \in L^r(\Omega)$  pour tout  $p \leq r \leq q$  et on a l'inégalité d'interpolation :

$$\forall \alpha \in [0, 1] : \|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^\alpha \cdot \|f\|_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha}.$$

**Théorème 1.10** : Soit  $p, q \in [1, +\infty]$  tel que  $p \leq q$ . Alors :

1.  $L^q_{loc}(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$ .
2.  $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$  si  $\Omega$  est borné.

**Théorème 1.11** : Soit  $f$  une fonction mesurable sur  $\Omega$  tel que  $\int_A f(x)dx = 0$  pour tout compact (ouvert)  $A \subset \Omega$ . Alors :  $f = 0$  p.p sur  $\Omega$ .

**Théorème 1.12 (Représentation de Riesz)** : Soit  $p \in ]1, +\infty[$  et soit  $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ , le dual de  $L^p(\Omega)$ . Alors : il existe  $g \in L^{p'}(\Omega)$  ( $p'$  le conjugué de  $p$ ) telle que :

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_{\Omega} f(x).g(x)dx, \forall f \in L^p(\Omega).$$

On peut alors identifier  $(L^p(\Omega))'$  par  $L^{p'}(\Omega)$ .

On peut aussi identifier  $(L^1(\Omega))'$  par  $L^\infty(\Omega)$ . On a : pour  $\varphi \in (L^1(\Omega))'$ , il existe  $g \in L^\infty(\Omega)$  telle que :

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_{\Omega} f(x).g(x)dx, \forall f \in L^1(\Omega).$$

On a :  $L^1(\Omega) \subset (L^\infty(\Omega))'$ , et l'inclusion est stricte.

**Théorème 1.13 (Convergence dominée de Lebesgue)** : Soit  $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  une suite des fonctions dans  $L^p(\Omega)$  ( $p \in [1, +\infty[$ ). Supposons que :

1.  $\{f_j\}$  converge p.p. vers une fonction  $f$ .
2. Il existe une fonction  $g \in L^p(\Omega)$  telle que  $|f_j| \leq g$  p.p. pour tout  $j$ .

Alors :  $f \in L^p(\Omega)$  et  $f_j \xrightarrow{L^p(\Omega)} f$ .

**Remarque 1.4** On peut remplacer la suite  $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  par une famille des fonctions  $\{f_t\}_{t \in (a,b)}$ ,  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ . La limite va prendre au point  $t_0 \in [a, b]$ .

**Théorème 1.14** : L'espace  $\mathcal{D}(\Omega)$  est dense dans l'espace  $L^p(\Omega)$  pour tout  $p \in [1, +\infty[$ .

## 1.9 Mesure de Radon

On munit  $\mathbb{R}^n$  de la tribu Borélienne  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  et soit  $\Omega$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.31** : Une mesure de Borel sur  $\Omega$ , finie sur les compacts est une mesure  $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$ , dont on a :  $\mu(K) < \infty$  pour tout compact  $K \subset \Omega$ .

Une telle mesure est régulière, i.e : pour toute partie mesurable  $A \subset \Omega$  on a :

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \inf\{\mu(O), O \supset A \text{ ouvert}\}, \\ &= \sup\{\mu(K), K \subset A \text{ compact}\}.\end{aligned}$$

**Définition 1.32 :**

- i) Une mesure de Radon (signée) est la différence de deux mesures de Borel, finie sur les compacts.
- ii) On note par  $\mathcal{M}(\Omega)$ , l'espace des mesures de Radon sur  $\Omega$ .

**Proposition 1.14 :** Soit  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ . Alors : la fonction  $A \in \mathcal{B}(\Omega) \mapsto \int_A f(x)dx$  définit une mesure de Radon sur  $\Omega$ . Une telle mesure est dite mesure absolument continue, et  $f$  sa densité.

**Remarque 1.5 :** On a :  $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{M}(\Omega)$ . L'espace  $\mathcal{M}(\Omega)$  est plus grand que  $L^1_{loc}(\Omega)$ . Par exemple : la masse de Dirac  $\delta_x$  au point  $x$ , définie par :

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 0 & : x \notin A, \\ 1 & : x \in A, \end{cases} \quad (1.1)$$

est une mesure de Radon, mais n'est pas une fonction.

**Théorème 1.15 (Riesz) :** On peut identifier l'espace  $\mathcal{M}(\Omega)$  par l'espace  $\mathcal{K}'(\Omega)$ , le dual topologique de l'espace  $\mathcal{K}(\Omega)$  des fonctions continues, à support compact dans  $\Omega$ , de sorte que :

$$\forall \mu \in \mathcal{M}(\Omega), \exists c_\mu > 0, \forall \varphi \in \mathcal{K}(\Omega), \forall K \subset \Omega \text{ (compact)} : \left| \int_K \varphi d\mu \right| \leq c_\mu \sup_{x \in K} |\varphi(x)|.$$

L'espace  $\mathcal{M}(\Omega)$  considéré comme dual de  $\mathcal{K}(\Omega)$  est un espace de Fréchet.

## 1.10 Domaines réguliers, intégration sur le bord

Soit  $\Omega$  un ouvert non bornée de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $\Gamma = \partial\Omega$  la frontière de  $\Omega$ . On désigne par  $Q, Q_+, Q_0$  les sous ensembles suivants :

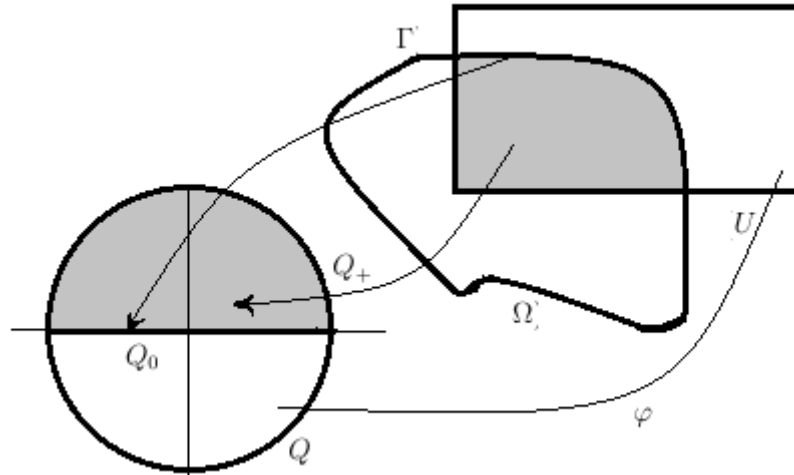
$$Q := \{x \in \mathbb{R}^n : |x'| < 1; |x_n| < 1\}$$

$$Q_+ := \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : |x'| < 1; 0 < x_n < 1\}$$

$$Q_0 := \{(x', 0) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} : |x'| < 1; \}$$

**Définition 1.33 :** On dit que  $\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  si pour tout  $x \in \Gamma$ , il existe un couple  $(U, \varphi)$ , où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  contenant  $x$ , et  $\varphi \in \mathcal{C}^k(U)$  un difféomorphisme de  $U$  dans  $Q$  tel que pour  $\psi = \varphi^{-1}$  on a :

1.  $\varphi \in \mathcal{C}^k(\overline{Q})$  ;
2.  $\varphi(U \cap \Gamma) = Q_0$  ;
3.  $\varphi(U \cap \Omega) = Q_+$  ;



**Définition 1.34** : on notera  $\nu(x)$  le vecteur unitaire normal extérieur au point  $x \in \Gamma$ . Si  $u$  est une fonction assez régulière définie sur  $\overline{\Omega}$ , on a la dérivée normale de  $u$  sur  $\Gamma$  :

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$$

**Remarque 1.6** : Si  $\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ , on peut extraire une paramétrisation  $x_i = \phi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ , où  $\phi$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ . Dans ce cas là  $\Gamma$  est le graphe de  $\phi$  dans un repère orthonormé, et on a  $\nu_y = \frac{(\nabla \phi(y), -1)}{\sqrt{1 + (\nabla \phi(y))^2}}$ .

On peut dire que le bord d'un ouvert de classe  $\mathcal{C}^k$  à une paramétrisation par une fonction de classe  $\mathcal{C}^k$ .

**Définition 1.35** :  $\Omega$  est lipschitzien si  $\Gamma$  à une paramétrisation par une fonction lipschitzienne.

**Proposition 1.15** : Supposons que  $\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . On peut toujours décomposer  $\Gamma$  en une union disjoint, tel que  $\Gamma_i$  est le graphe d'une fonction  $\phi_i$  dans un repère orthonormé comme dans la remarque précédant. On définit l'intégral curviligne pour une fonction  $f$  définie sur  $\Gamma$  comme suivant :

$$\int_{\Gamma} f d\sigma(x) = \sum_i \int_{\Gamma_i} f(y, \phi(y)) \sqrt{1 + (\nabla \phi_i(y))^2} dy$$

**Théorème 1.16** [ *formule d'Ostrogradsky* ] : Soit  $\Omega$  un ouvert borné de classe  $\mathcal{C}^1$ , et  $\Gamma$  son bord. Soit  $F$  un champ de vecteurs, i.e une fonction de  $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . Alors :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F(x) dx = \int_{\Gamma} f(x) \cdot \nu(x) d\sigma(x)$$

**Corollaire 1.4** [ *formule de Green* ] : Soit  $\Omega$  un ouvert borné de classe  $\mathcal{C}^1$ , et  $\Gamma$  son bord. Soit  $u$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ ,  $v$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ . Alors :

$$\int_{\Omega} v(x) \Delta u(x) dx + \int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla u(x) dx = \int_{\Gamma} v(x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) d\sigma(x)$$

## Exercices

**Exercice 1.1** : Soit la fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & : |x| < 1 \\ 0 & : |x| \geq 1 \end{cases}$$

On définit la suite des fonctions  $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$  comme suivant :  $\varphi_j(x) = \varphi(jx)$ .

1. Est-ce que  $\varphi_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ?
2. Donner le support de  $\varphi_j$ .
3. Donner une généralisation de  $\varphi$  à  $\mathbb{R}^n$ .

**Exercice 1.2** : Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(]0, 2[)$  telle que  $\varphi \geq 0$  et  $\varphi = 1$  sur  $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ , et soit la suite des fonctions  $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  défini par :  $\forall j \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R} : \varphi_j(x) = \varphi(x + j)$ .

1. Soit la fonction  $\psi$  défini par :  $\psi(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi_j(x)$ .

Est-ce que  $\psi$  défini? Est-ce que  $\psi \geq 1$ ?

2. Soit la suite des fonctions  $(u_j)$  défini par :  $\forall j \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R} : u_j(x) = \frac{\varphi_j(x)}{\psi(x)}$ .

Est-ce que  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ?

Vérifie la relation :  $\forall x \in \mathbb{R} : \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j(x) = 1$ .

**Exercice 1.3** : Soit  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  un compact, et soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . est-ce que les deux implications suivants sont vrais ?

1.  $\psi = 0$  au voisinage de  $K \Rightarrow \text{supp } \psi \subset (\mathbb{R}^n \setminus K)$ .
2.  $\psi = 0$  sur  $K \Rightarrow \text{supp } \psi \subset (\mathbb{R}^n \setminus K)$ .

**Exercice 1.4** : Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

pour toute  $t \in \mathbb{R}^*$  on pose :  $\varphi_t(x) = \frac{\varphi(x + th) - \varphi(x)}{t}$ .

1. Montrer que  $\varphi_t \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  pour toute  $t \neq 0$
2. Montrer que si  $t$  tend vers 0,  $\varphi_t$  converge dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  vers une fonction que l'on déterminera.

**Exercice 1.5** : Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite de fonctions de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} \exp\left(-\frac{1}{1-\frac{x^2}{n^2}}\right) & : |x| < n \\ 0 & : |x| \geq n \end{cases}$$

Montrer que, pour chaque  $k \geq 0$ , la suite de fonctions  $(f_n^{(k)})$  converge uniformément sur tout compact  $K$  vers une fonction  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  que l'on précisera.

A-t-on convergence dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  ?

## Solutions d'exercices

**Solution 1.1** :

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & : |x| < 1 \\ 0 & : |x| \geq 1 \end{cases}, \quad \varphi_j(x) = \varphi(jx), j \in \mathbb{N}^*.$$

1. Pour montrer que  $\varphi_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ , il suffit de montrer que  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ .

il est clair que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ . On montre que  $\varphi$  est infiniment dérivable aux points  $-1, 1$ . On a :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = 0.$$

Faisant le changement de variable  $y = \frac{1}{1-x^2}$  sur  $] -1, 1[$ , on trouve :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{-y} = 0.$$

Donc :  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\varphi(x) - \varphi(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x - 1} = 0.$$

Faisant le changement de variable  $y = \frac{1}{1+x}$  au voisinage  $-1$  à droite et  $y = \frac{1}{1-x}$  au voisinage  $-1$  à gauche, on trouve :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\varphi(x) - \varphi(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x - 1} = \lim_{y \rightarrow +\infty} y e^{-\frac{y^2}{2y-1}} = 0.$$

Donc :  $\varphi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on a :  $\varphi'(x) = \begin{cases} -\frac{2x}{(1-x^2)^2} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & : |x| < 1 \\ 0 & : |x| \geq 1 \end{cases}$

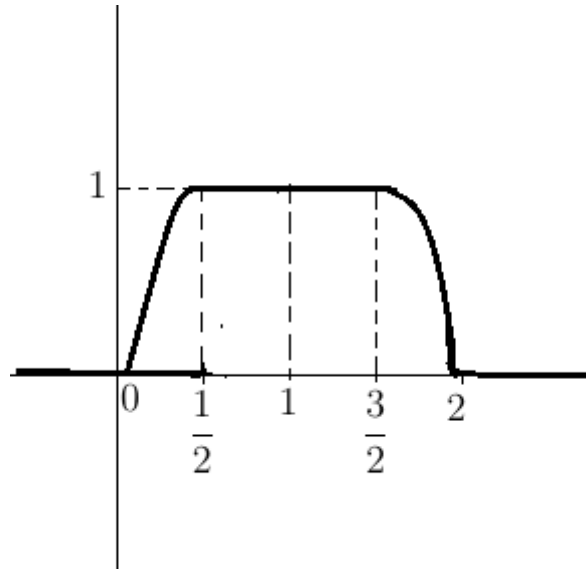
Suivant la même méthode, on trouve que  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ , alors  $\varphi_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ .

2. On a :  $\text{supp } \varphi = [-1, 1]$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $x \in \text{supp } \varphi_j$  ssi  $jx \in [-1, 1]$ .

$$\text{Donc } \text{supp } \varphi_j = \left[-\frac{1}{j}, \frac{1}{j}\right].$$

3. Généralisation de  $\varphi$  à  $\mathbb{R}^n$  :  $\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}} & : \|x\| < 1 \\ 0 & : \|x\| \geq 1 \end{cases}$ .

**Solution 1.2** :  $\varphi \in \mathcal{D}(]0, 2[)$ ,  $\varphi \geq 0$ ,  $\varphi = 1$  sur  $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ ,  $\forall j \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R} : \varphi_j(x) = \varphi(x + j)$ .



$$1. \psi(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi_j(x), x \in \mathbb{R}.$$

Soit  $j \in \mathbb{Z}$ . Comme  $\text{supp } \varphi \subset ]0, 2[$ , on a : pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $\varphi_j(x) = 0$  si  $j \leq -x$  ou  $j \geq 2 - x$ . Donc :  $\psi(x) = \sum_{-x < j < 2-x} \varphi_j(x)$ , i.e  $\psi$  est défini.

Il existe toujours  $j \in \mathbb{Z}$  tel que  $j + x \in \left[ \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$ . Donc :  $\psi(x) \geq \varphi(1) = 1$ .

$$2. \forall j \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R} : u_j(x) = \frac{\varphi_j(x)}{\psi(x)}.$$

Puisque  $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  et  $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \psi > 0$ , alors :  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ?

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\varphi_j(x)}{\psi(x)} = \frac{\sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi_j(x)}{\psi(x)} = \frac{\psi(x)}{\psi(x)} = 1.$$

**Solution 1.3** :  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  compact,  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .

1.  $\psi = 0$  au voisinage de  $K \Rightarrow \text{supp } \psi \subset (\mathbb{R}^n \setminus K)$  vrais, en effet :

Supposons que  $\psi = 0$  au voisinage de  $K$ . Donc : Il existe un ouvert  $O \supset K$  tel que  $\psi = 0$  sur  $O$ . Donc :  $O$  inclus dans l'ouvert d'annulation de  $\psi$ .

Alors :  $\text{supp } \psi \subset \mathbb{R}^n \setminus O \subset (\mathbb{R}^n \setminus K)$ .

2.  $\psi = 0$  sur  $K \Rightarrow \text{supp } \psi \subset (\mathbb{R}^n \setminus K)$  faux, en effet :

Considérons  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  telle que  $\text{supp } \varphi \subset B(0, 2)$  et  $\varphi = 1$  sur  $B(0, 1)$ . On pose :  $\psi(x) = \theta(x) \cdot \varphi(x)$ , où  $\theta(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ .

$\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  et  $\psi = 0$  sur le compact  $K = \{0\}$ , mais  $\text{supp } \psi \supset B(0, 1)$ .

**Solution 1.4** :  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \forall t \in \mathbb{R}^* : \varphi_t(x) = \frac{\varphi(x + th) - \varphi(x)}{t}$ .

1. Les fonctions :  $x \mapsto \varphi(x + th), x \mapsto \varphi(x)$  appartient à  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  et  $t$  constant par rapport à  $x$ . Alors :  $\varphi_t \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  pour toute  $t \neq 0$ .

2. On a :  $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_t(x) = \varphi'_h(x)$ , où  $\varphi'_h$  est la dérivée de  $\varphi$  à la direction de vecteur  $h$ .

Comme  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , alors :  $\varphi'_h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , de plus,  $\text{supp } \varphi'_h \subset \text{supp } \varphi$ .



Pour  $t$  assez petit, on peut trouver un compact  $K \subset \mathbb{R}^n$  tel que  $\text{supp } \varphi_t \subset K$  et bien sûr  $\text{supp } \varphi'_h \subset K$ .

Finalemnt, on a pour tout  $m \in \mathbb{N}$  :

$$\lim_{t \rightarrow 0} P_{K,m}(\varphi_t(x) - \varphi'_h(x)) = \lim_{t \rightarrow 0} \sup_{x \in K, |\alpha| \leq m} |D^\alpha(\varphi_t(x) - \varphi'_h(x))| = 0.$$

Donc : si  $t$  tend vers 0,  $\varphi_t$  converge dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  vers  $\varphi'_h$ .

**Solution 1.5** :  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suite de fonctions de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} \exp\left(-\frac{1}{1-\frac{x^2}{n^2}}\right) & : |x| < n \\ 0 & : |x| \geq n \end{cases}$$

On considère la fonction  $\varphi$ , définie comme suivant :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & : |x| < 1 \\ 0 & : |x| \geq 1 \end{cases}$$

Comme la première exercice, on peut montrer que  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , de plus on a :  $f_n = \frac{1}{2^n} \varphi \circ g_n$  où  $g_n(x) = \frac{x}{n}$ . Donc :  $f_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  et  $\text{supp } f_n = [-n, n]$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on a :  $f_n^{(k)} = \frac{1}{n^k \cdot 2^n} \varphi^{(k)} \circ g_n$ . Donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(k)}(x) = 0$

Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}$ . On a :

$$\sup_{x \in K} |f_n^{(k)}(x) - 0| = \frac{1}{n^k \cdot 2^n} \sup_{x \in K} |\varphi^{(k)} \circ g_n| \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Alors : pour chaque  $k \geq 0$ , la suite de fonctions  $(f_n^{(k)})$  converge uniformément sur tout compact  $K$  vers la fonction  $f = 0$ .

Comme  $\text{supp } f_n = [-n, n]$ , on ne peut pas trouver un compact  $K$  contient tous les supports de la suite  $(f_n)$ . Alors : on a pas une convergence dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ .