Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

1
Ensembles et applications

1.1 Ensembles

Définition 1.1. On appelle ensemble une collection des objets. Ces objets sont appelés les éléments de l'ensemble.

Exemple 1.1.
1. $\mathbb{N}$ = l'ensemble de tous les nombres entiers positifs.
2. $\mathbb{Z}$ = l'ensemble de tous les nombres entiers relatifs.
3. $\mathbb{Q}$ = l'ensemble des nombres rationnels $\frac{n}{m},\ n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N}^*$.
4. $\mathbb{R}$ = l'ensemble des nombres réels.
5. $\mathbb{R}_+$ = l'ensemble des nombres réels positifs.
6. $\mathbb{R}^*$ = l'ensemble des nombres réels non nuls.

1.1.1 Inclusion

Soit A est une ensemble dans E. On dit que A inclus dans E si tout élément de A est aussi un élément de E. Autrement dit :

$$A \subset E \Leftrightarrow \forall x \in A,\ x \in E.$$

On dit alors que A est un sous-ensemble de E ou une partie de E.(Voir la figure suivante)

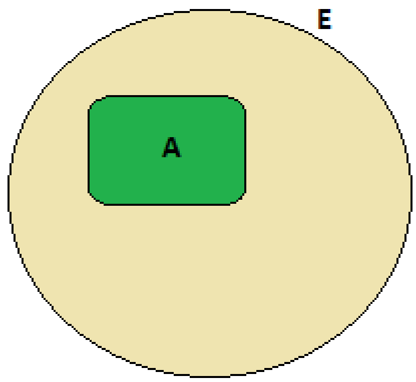

FIGURE 1.1 – $A \subset E$

1.1.1.1 Égalité deux ensembles

Soient A, B sont deux ensembles de E.

Définition 1.2. $A = B$ si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$. Autrement dit :

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A.$$

1.1.1.2 Ensemble des parties

Définition 1.3. Soit E un ensemble. L'ensemble des parties de E est l'ensemble, généralement noté $\mathcal{P}(E)$, dont les éléments sont les sous-ensembles de E :

$$A \in \mathcal{P}(E) \Longleftrightarrow A \subset E.$$

Propriétés 1.1. De la définition 1.3, on peut déduire les propriétés suivantes :

- ✈ $\mathcal{P}(E)$ n'est jamais vide car l'ensemble vide $\varnothing$ et E sont toujours des parties de E :

$$\varnothing \in \mathcal{P}(E), \text{avec } E \in \mathcal{P}(E)$$

✈ Si E est un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Alors,

$$Card(E) = n, \; Card\mathcal{P}(E) = 2^n.$$

tels que :

- n : est le nombre d'éléments de l'ensemble E.
- 2^n : est le nombre de sous-ensembles dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$.

✈ Si $Card(E) = 0, \Leftrightarrow \; E = \varnothing$

Exemple 1.2. Si $A = \{1, 2, 3\}$, les parties de A sont :

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, A, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$$

On note que :

☞ $Card(A) = 3$.

☞ $Card\,(\mathcal{P}(A)) = 2^3 = 8$.

1.1.1.3 Complémentaire d'un ensemble

Définition 1.4. Le complémentaire de l'ensemble A noté C_EA est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à l'ensemble A. Alors,

$$SiA \subset E, \Leftrightarrow \; C_EA = \{x \in E \land x \notin A\}$$

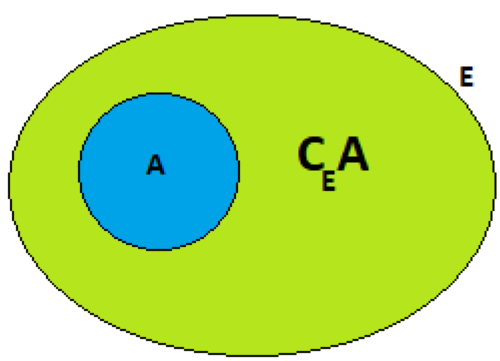

FIGURE 1.2 – C_EA

1.1.2 Union deux ensembles

Soient A, B sont deux ensembles dans E

Définition 1.5. L'union de deux ensembles A et B est l'ensemble noté $A \cup B$ qui contient tous les éléments qui appartiennent à A ou appartiennent à B. E on la dit A union B.
La formule suivante montre l'union des ensembles A et B.

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$$

1.1.3 Intersection deux ensembles

Définition 1.6. L'intersection de deux ensembles A et B, se note $A \cap B$ et désigne l'ensemble des éléments qui appartiennent (à la fois) à A et à B. C'est lŠensemble des éléments communs à A et à B. On lit (A inter B) et pour tout x, on écrit :

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$$

La figure suivante 1.3 montre l'union et l'intersection.

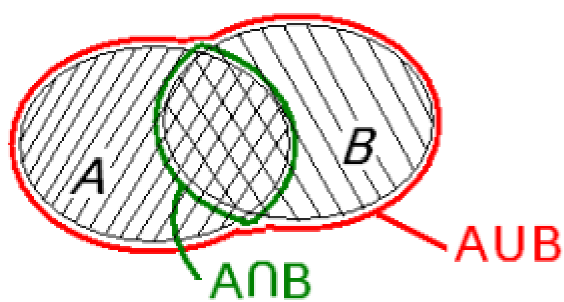

FIGURE 1.3 – L'union $A \cup B$, l'intersection $A \cap B$.

1.2 Propriétés algébriques des ensembles

Soient A, B, C des parties d'un ensemble E.

☞ L'union ($resp.$ L'intersection) est commutative, c'est-à-dire :

$$A \cup B = B \cup A.(resp.)\ A \cap B = B \cap A.$$

☞ L'union ($resp.$ L'intersection) est associative, c'est-à-dire :

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).(resp.)\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

☞ L'union est distributive sur l'intersection, c'est-à-dire :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

☞ L'intersection est distributive sur l'union, c'est-à-dire :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

☞ $A \cup \varnothing = A,\ A \cup A = A,\ A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

☞ $A \cap \varnothing = \varnothing,\ A \cap A = A,\ A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

☞ $C_E\,(C_E A) = A$ et donc $A \subset B \Leftrightarrow C_E B \subset C_E A$.

☞ Lois de Morgan
- $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$.
- $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$.

Voici les dessins pour les deux dernières propriétés .

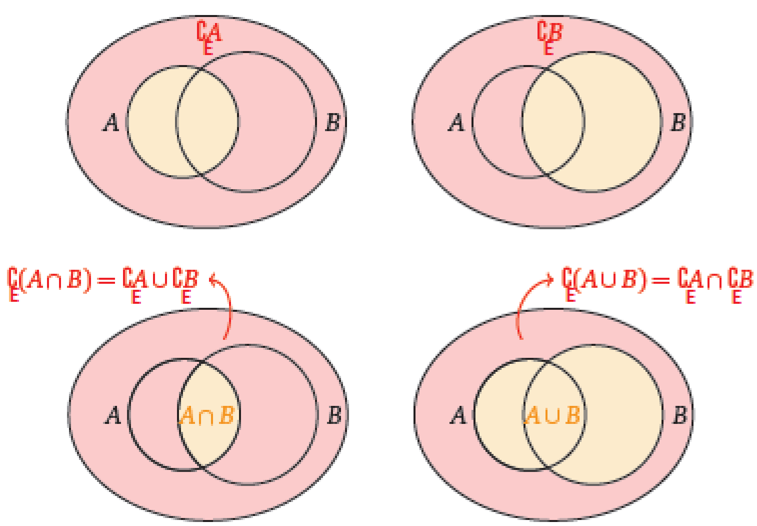

FIGURE 1.4 – Lois de Morgan

1.2.1 Produit cartésien de deux ensembles

Soient A et B deux ensembles de E.

Définition 1.7. Le produit cartésien de l'ensemble A par l'ensemble B est l'ensemble noté $A \times B$ de tous les couples (x, y) dont l'origine est un élément de l'ensemble A et l'extrémité est un élément de l'ensemble B. Alors,

$$A \times B = \{(x, y)\,, \text{tel que} : x \in A \wedge y \in B\}$$

Exemple 1.3. Soit les ensembles $A = \{m, n, e\}$ et $B = \{0, 1, 3\}$.

Alors : $A \times B = \{(m, 0), (m, 1), (m, 3), (n, 0), (n, 1), (n, 3), (e, 0), (e, 1), (e, 3)\}$.

Remarque 1.1. Nous concluons quelques remarques sur le produit cartésien, notamment :

- ☞ Le produit cartésien n'est pas commutatif.
- ☞ Le produit cartésien $A \times A$ est généralement noté A_2 et est appelé le carré cartésien de A.
- ☞ Si l'ensemble A comprend m éléments et l'ensemble B comprend n éléments, alors le produit cartésien $A \times B$ comprend $m \times n$ éléments.

1.3 Les applications

1.4 Application

Définition 1.8. Soit E et F deux ensembles. Une application ou fonction de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. On écrit :

$$f : E \longrightarrow F, \text{ ou } E \xrightarrow{f} F.$$

- ☞ Pour un élément $x \in E$ l'élément de F qui lui est associé est noté $f(x)$, et on écrit $x \mapsto f(x)$.
- ☞ L'élément $f(x)$ est appelé l'image de x par f et x est dit l'antécédent de $f(x)$.

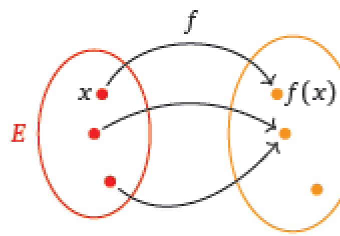

FIGURE 1.5 – L'application $f : E \longrightarrow F$

L'autre représentation est celle des fonctions continues de $E = \mathbb{R}$ dans $F = \mathbb{R}$.
Soit l'application f,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

L'association $x \longmapsto f(x)$ est représentée par le point $(x, f(x))$.

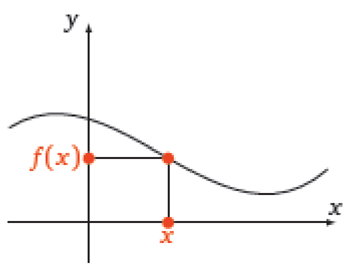

FIGURE 1.6 – Présentation le point $(x, f(x))$ par lŠapplication $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Exemple 1.4. Soit l'application suivante :

1.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto 2n + 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 - 1 \end{aligned}$$

Remarques 1.1. Selon la définition de l'application, nous savons :

- L'application

$$\begin{aligned} Id_E : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto y = x \end{aligned}$$

est appelée application identité sur E.

- L'application

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto y = f(x) = a, \ a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

est appelée application constante sur E.

- On dit que deux applications f et g sont égales si :
  1. Elles ont un même ensemble de départ E et un même ensemble d'arrivée F.
  2. $\forall x \in E, \ f(x) = g(x)$.

Définition 1.9. Soit l'application f

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

une application bijective. On définit alors une application de F vers E, en associant à tout élément y de F son seul antécédent. Cette application, appelée application réciproque de f et notée f^{-1}.

$$\begin{aligned} f^{-1} : F &\longrightarrow E \\ y &\longmapsto f^{-1}(y) \end{aligned}$$

Avec,

$$\forall x \in E; \forall y \in F, y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

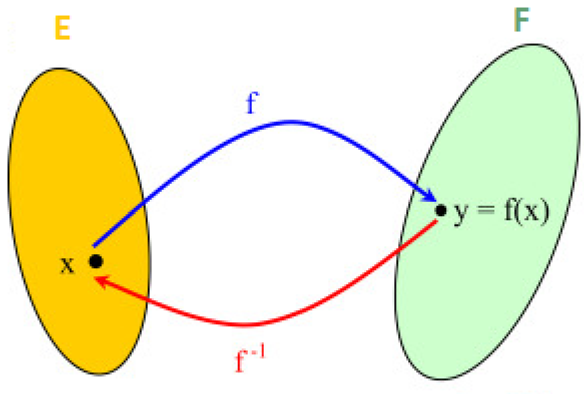

FIGURE 1.7 – L'application f et f^{-1}

1.5 Image directe et image réciproque

Soient E et F deux ensembles, A, B deux sous-ensembles de E et F respectivement

Définition 1.10. (Image directe) Soit $A \subset E$ et $f : E \longrightarrow F$, l'image directe de A par f est l'ensemble :

$$f(A) = \{f(x),\ x \in A\} \subset F$$

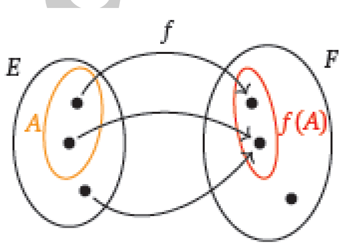

FIGURE 1.8 – Image directe de A par l'application f

Définition 1.11. (Image réciproque) Soit $B \subset E$ et $f : E \longrightarrow F$, l'image réciproque de B par f est l'ensemble :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E,\ f(x) \in B\} \subset E$$

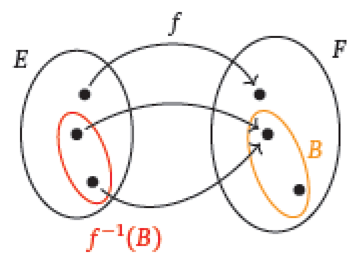

FIGURE 1.9 – Image réciproque de B par l'application f^{-1}

Exemple 1.5. Soit f une application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longmapsto 2x+3 \end{aligned}$$

1. Image directe
   Soit, $A = \{0, 1, 2, 3\}$, alors

$$\begin{aligned} f(A) &= \{f(x),\ x \in A\} \\ &= \{f(0), f(1), f(2), f(3)\} \\ &= \{3, 5, 7, 9\} \end{aligned}$$

2. Image réciproque
   Soit, $B = \{9\}$

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \{x \in E,\ f(x) \in B\} \\ &= \{x \in E,\ f(x) = 9\} \\ &= \{x \in E,\ 2x+3 = 9\} \\ &= \{3\} \end{aligned}$$

Propriétés 1.2. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soient A, B deux parties (sous-ensembles) de E, et D, C deux parties (sous-ensembles) de F Alors,

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

2. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
3. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.
4. $D \subset C \Rightarrow f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C)$.
5. $f^{-1}(D \cup C) = f^{-1}(D) \cup f^{-1}(C)$.
6. $f^{-1}(D \cap C) = f^{-1}(D) \cap f^{-1}(C)$.

Démonstration. La preuve de ces propriétés est en **TD.** $\square$

1.5.1 Restriction et prolongement d'une application

Soit G un sous-ensemble de E, $(D \subset E)$. et f une application définie de E dans F

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Soit g une application définie de D dans F

$$\begin{aligned} g : D &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto g(x) = f(x) \end{aligned}$$

Alors, $g(x) = f(x)$ est appelée la **restriction** de f à D et on écrit $g = f/D$ et on dit aussi que f est le **prolongement** de g à E.

Exemple 1.6. Soit l'application f et g définis comme suit,

$$\begin{aligned} f : &\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \sin(x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : &D = [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = \sin(x) \end{aligned}$$

Donc, on note que :

☞ g est la restriction de f à la partie $D = [0, 2\pi]$. On écrit : $g = f/[0, 2\pi]$.

☞ f est le prolongement de g sur $\mathbb{R}$.

Pour plus d'explications, la figure suivante montre ce qui a été mentionné dans cet exemple.

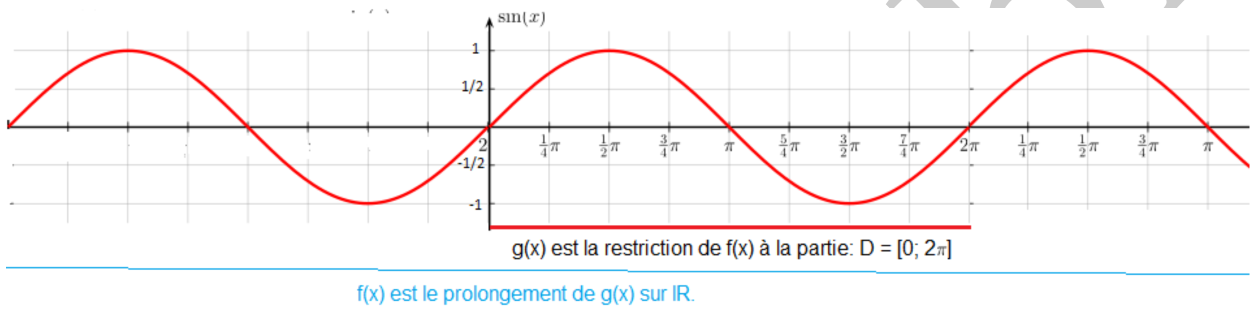

FIGURE 1.10 – la restriction de f et le prolongement de g

1.5.2 Composition d'applications

Définition 1.12 (Composée de deux applications)**.** Soient E, F et G trois ensembles quelconques. Soient deux applications :

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

On définit la composée de f par g, notée : $g \circ f$, par :

$$\forall x \in E, (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} f \circ g : &E \longrightarrow G \\ &f(x) \longmapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

Exemple 1.7. Soit les deux applications, f et g, définies comme suit :

$$\begin{aligned} f : &\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ &x \longmapsto f(x) = \cos(x), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : &\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ &x \longmapsto g(x) = x^2. \end{aligned}$$

Alors, on a

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \cos(x^2),$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \cos^2(x).$$

Remarque 1.2. La composition de fonctions n'est généralement pas commutative :

$$g \circ f \neq f \circ g.g \circ f \neq f \circ g.$$

Théorème 1.1. *Soient E, F et G trois ensembles et f, g deux applications telles que $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$*

- ✗ *Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.*
- ✗ *Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.*
- ✗ *Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.*
- ✗ *Si f et g sont bijectives, alors $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

1.6 Injection, surjection, bijection

Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F.

1.6.1 Injection

Définition 1.13. f est injective si pour tout $x_1, x_2 \in E$ avec $f(x_1) = f(x_2)$ alors $x_1 = x_2$. Autrement dit :

$$\forall x_1, x_2 \in E,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

L'implication précédente équivaut à sa contraposée :

$$\forall x_1, x_2 \in E,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

C'est-à-dire que f est injective si et seulement si tout élément y de F a au plus un antécédent. Voir la figure suivante.

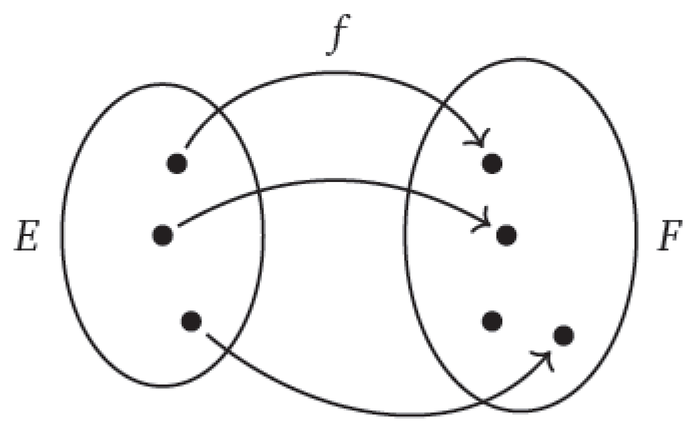

FIGURE 1.11 – Application injective

Exemple 1.8. On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; f(x) = 3x + 2$$

On peut dire que l'application f est injective car :
Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow 3x_1 + 2 = 3x_2 + 2 \\ &\Leftrightarrow 3x_1 = 3x_2 \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Alors,

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Ainsi f est injective.

1.6.2 Surjection

Définition 1.14. f est surjective si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Autrement dit :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, \text{Tq} : \; y = f(x)$$

C'est-à-dire que f est surjective si et seulement si tout élément y de F a au moins un antécédent dans E. Voir la figue suivante.

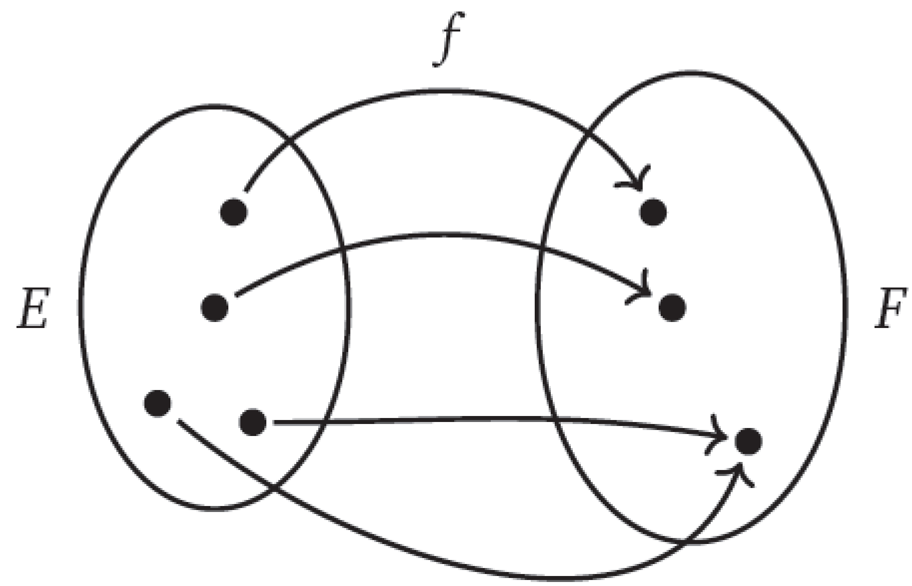

FIGURE 1.12 – Application surjective

Remarque 1.3. L'application f est surjective si et seulement si l'équation $y = f(x)$ admet **au moins une solution** x **de** E **pour tout élément** y **de** F**.**

Exemple 1.9. On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2x - 1$$

D'après la remarque 1.3, f est-elle surjective ?.
Soit $y \in \mathbb{R}$, essayons de résoudre l'équation $y = f(x)$.

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = 2x - 1 \\ &\Leftrightarrow y + 1 = 2x \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2} \end{aligned}$$

Il est clair que : $\frac{y+1}{2}$ est définie $\forall y \in \mathbb{R}$.
Ainsi f est surjective.

Remarque 1.4. Soit l'application f est définie par :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

f est surjective si et seulement si $f(E) = F$

1.6.3 Bijection

Définition 1.15. Une application f de E dans F est dite bijective si elle est à la fois injective et surjective. Tout élément de l'espace d'arrivée F a un antécédent et un seul dans E. Autrement dit :

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x).(\exists! : \text{signifie unique})$$

Lemme 1.1. *L'application f est dite bijective (ou f est une bijection) si et seulement si elle est à la fois surjective et injective.*

Exemple 1.10. D'après l'exemple (1.9). Est-ce-que f est bijective ?.
On a,

$$\boxed{f \text{ est bijective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective + injective.}}$$

1. f est surjective. Voir l'exemple (1.9).
2. f est injective. Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow 2x_1 - 1 = 2x_2 - 1 \\ &\Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

   Alors,

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

   Ainsi f est injective.

Donc, d'après 1 et 2, f est bijective.