UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF-M'SILA — DÉPARTEMENT DE L'INFORMATIQUE
Première année informatique — 2022-2023

Série d'exercices N°02.
Algèbre 1

Exercice 01 :

a) Soit l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Les propositions suivantes sont elles vraies ?. Justifiez votre réponse.

$$0 = \emptyset, 1 \subset E, \emptyset \in E, \emptyset \subset E, \{\emptyset\} \cup E = E, \{\emptyset\} \cap E = \emptyset.$$

b) Soient, $B = \{0, 2\}$ et $D = \{2, 3, 5\}$ deux ensembles.

1. Déterminer : $B \cap D$, $B \cup D$, $C_E(B)$, $C_E(D)$, $E - B$ et $B \Delta D$.
2. Déterminer : $B \times D$, $B \times \emptyset$, $B \times \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(B)$ et $\mathcal{P}(D)$.
3. Peut-on écrire : $C_D(B)$. Justifiez votre réponse.

Exercice 02 :
Soient A, B, C trois parties de l'ensemble E. Montrer que :

1. $A \cup B = A \cap B \ \Rightarrow A = B$
2. $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset C_E(B)$
3. $A \subset B \Leftrightarrow C_E(B) \subset C_E(A)$
4. $C_E(C_E(A)) = A$
5. $C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B)$, $C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B)$ (*)
6. $A \Delta B = C_E(A) \Delta C_E(B)$
7. $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$
8. $A \subset B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$

Exercice 03 :
Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$. Démontrer que :

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B),$
2. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B),$
3. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),$(*),
4. $\forall C, D \in \mathcal{P}(F), \quad f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D),$
5. $\forall D \in \mathcal{P}(F), \quad f^{-1}(F \backslash D) = E \backslash f^{-1}(D).$(*)

Exercice 04 :
Soient :

$$
\begin{aligned}
f :&\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\
&x \longmapsto f(x) = |x|
\end{aligned}
$$

1. f est-elle Injective ? Surjective ? (Justifier).
2. Soit $A = [-2, 0]$ et $B = [0, 1]$. Calculer : $f(A)$ et $f^{-1}(B)$.

Exercice 05 :
Soient $E = [0, 1]$, $F = [-1, 1]$, et $G = [0, 2]$ trois intervalles de $\mathbb{R}$. Considérons l'application f de E dans G définie par :

$$
\begin{aligned}
f :&E \longrightarrow G \\
&x \longmapsto f(x) = 2 - x
\end{aligned}
$$

et l'application g de F dans G définie par :

$$
\begin{aligned}
f :&F \longrightarrow G \\
&x \longmapsto g(x) = x^2 + 1
\end{aligned}
$$

1. Déterminer $f(1/2)$, $f^{-1}(0)$, $g([-1, 1])$, et $g^{-1}([0, 2])$.
2. L'application f est-elle bijective ? justifier.
3. L'application g est-elle bijective ? justifier.

Exercice 06 : (Devoir à la maison)

1. Soit l'application

$$
\begin{aligned}
f :&\mathbb{R} \longrightarrow \,]\,0, +\infty\,] \\
&x \longmapsto f(x) = \ln(1 + e^x)
\end{aligned}
$$

   ☞ Montrer que f est bijective et expliciter la fonction f^{-1}.

2. Même travail avec l'application g :

$$
\begin{aligned}
g :&\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\
&x \longmapsto g(x) = x^2 + x
\end{aligned}
$$