UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF M'SILA
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de l'Informatique
Module : Analyse 01
Année universitaire : 2022/2023

Chapiter N°1 : Corps des nombres réels

0.1 Représentation de l'ensemble $\mathbb{R}$

Dans cette section on va rappeler par quelques définitions et propriétés des sous ensembles dans $\mathbb{R}$

Définition 0.1.1 *Il est admis qu'il existe un ensemble dit l'ensemble des entiers naturels ayants les propriétés suivantes :*
— *Il existe un petit élément de* $\mathbb{N}$, *désigne par* 0.
— *pour tout entiers naturel* n *il existe un élément naturel* $n* = n + 1$ *(appeler le suivant de n.)*
— *pour tout entier naturel* n, $n^* \neq 0$.
— *pour tous entiers naturels* n, m *si* $n^* = m^*$ *alors* $n = m$.
— ***Postulat de récurrence :*** *soit* P *une propriété définie sur* $\mathbb{N}$, *si* $P(0)$ *est vérifié alors* $P(n+1)$ *est vérifiée donc* P *pour tout* n *naturel.*

On écrit $\mathbb{N} = \{0, 1, 3, ...\}$. On note par $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}/\{0\}$, c'est l'ensemble des élément naturels non-nuls.

Exemple 0.1.2 *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : 2^n > 0$

Remarque 0.1.3 *L'ensemble des entiers naturels* $\mathbb{N}$, *a un défaut évident, car si* n *et* m *deux entiers naturels tels que* $n > m$ *alors l'équation*

$$n + x = m \tag{1}$$

n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}$.
$\star$ *Idée : on va prolonger* $\mathbb{N}$ *vers un autre ensemble appeler l'ensemble des nombres relatifs.*

Définition 0.1.4
1. *Un entier relatif positif est un entier naturel.*
2. *Un entier relatif négatif est une solution* p *de l'équation* (1), $p = n - m$ *et la solution c'est* $x = -p$

Par exemple : $x + 7 = 3,$, $p = 7 - 3$ *et* $x = -4$.
L'ensemble des entiers relatifs, on le note par $\mathbb{Z}\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Remarque 0.1.5 *L'ensemble des entiers relatifs* $\mathbb{Z}$, *a un défaut aussi car si* n *est un entier relatif non nul alors l'équation* $n.x = m$ *n'admet pas de solution dans* $\mathbb{Z}$, *sauf si* n *divise* m, *sinon si* $PGCD(n, m) = r$ *alors il existe* a *et* b *tels que :* $n = ra$, $m = rb$ *et la solution c'est* $x = \frac{m}{n} = \frac{b}{a}$ *et* $PGCD(a, b) = 1$, x *appeler nombre rationnel et l'ensemble des nombres rationnels définie par :* $\mathbb{Q} = \{\frac{b}{a}/a \in \mathbb{N}^*, b \in \mathbb{Z}\, et\, PGCD(a, b) = 1\}$

Remarque 0.1.6 • *Pour tout entier* $n \in \mathbb{N}^*$, *alors l'équation* $n.x = 1$, *admet une solution unique* $x = \frac{1}{n}$
• *Pour tout entier* $n \in \mathbb{N}^*$, *alors l'équation* $n.x = -1$, *admet une solution unique* $x = -\frac{1}{n}$

Par exemple : $-6x = 8$, la solution est $x = -\frac{4}{3}$

Remarque 0.1.7 *Tout nombre rationnel peut être représenter par un développement décimale périodique.*

Par exemple : $\frac{11}{7} = 1,571428571428...$, $\quad \frac{11}{7} = 1,\underline{5714285}$
$\frac{2}{7} = 0,285714285714.....$, $\quad \frac{11}{7} = 0.\underline{285714}$ On peut voir facilement que les nombres rationnels possède un défaut aussi, car l'équation $x^2 = 2$, n'admet pas de solution dans $\mathbb{Q}$. Donc on va prolongé l'ensemble $\mathbb{Q}$ vers un autre ensemble, c'est l'ensemble des nombres réels où l'équation indiquer précédente admet une solution.

Définition 0.1.8 *l'ensemble des nombres réels, c'est l'ensemble des abscisse des points sur le repère linéaire (O, i)*
— *Les nombres réels positifs sont les abscisses des points a droite de O*
— *Les nombres réels négatifs sont les abscisses des points à gauche de O*

Remarque 0.1.9 *Un nombre non rationnel est dit irrationnel et l'ensemble de ces nombres c'est l'ensemble irrationnel noté par $\mathbb{R}/(Q)$*

Par exemple : $\sqrt{2}, e, \pi...$

0.1.1 Structure algébrique de $\mathbb{R}$

On muni $\mathbb{R}$ par deux lois de compositions internes $+\, et\, x\, (ou.)$ ayant les propriétés suivantes : pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$ on a

1. $x + y = y + x$ (on dit que + est commutative)
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (on dit que + est associative)
3. $0 + x = x + 0 = x$ (0 est l'élément neutre de +)
4. Il existe $(-x)$ dit l'élément symétrique de x par rapport à + tel que $x + (-x) = (-x) + x = 0$
5. $x.y = y.x$ (. est commutatif)
6. $(x.y).z = x.(y.z)$ (. est associative)
7. $(x + y).z = (x.z) + (y.z)$, $x.(y + z) = (x.y) + (x.z)$ (la loi . est distributive par rapport à +)
8. $1.x = x.1 = x$ (1 est l'élément neutre de .)
9. tout $x \neq 0$ admet un inverse noté par $\frac{1}{x}$ où bien x^{-1} pour . tel que $x.\frac{1}{x} = \frac{1}{x}.x = 1$

On dit que $(\mathbb{R}, +, .)$ est un corps commutatif.

Corollary 0.1.10 — *l'élément neutre* 0 *est unique.*
— *l'élément neutre* 1 *est unique.*
— *l'inverse d'un nombre réel non nul est unique.*

Proposition 0.1.11 *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a :*
— $0.x = x.0 = 0$
— $x.y = 0$ *si et seulement si* $x = 0$ *ou* $y = 0$
— $(-1).x = -x$

0.1.2 Ordre dans $\mathbb{R}$

On muni $\mathbb{R}$ par la relation binaire $\leq$; $(\mathbb{R}, \leq)$

Définition 0.1.12 — *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x \leq x$ (on dit $\leq$ est réflexive)*
— *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}, x \leq y\, et\, y \leq x$ alors $x = y$ (on dit que $\leq$ est antisymétrique)*
— *Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$ on a $x \leq y\, et\, y \leq z$ alors $x \leq z$ (on dit que $\leq$ est transitive)*

D'où $\leq$ est une relation d'ordre. De plus si pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $x \leq$ ou $y \leq x$ on dit $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonné.

Remarque 0.1.13 *Soit $x, y \in \mathbb{R}$*

— *Si $x \leq y$ on peut écrit $y \geq x$*
— *Si $x \leq y$ et $x \neq y$ on écrit $x < y$*
— *Si $x \geq y$ et $x \neq y$, on peut écrit $x > y$*

0.1.3 Majorants, Minorants, bornes supérieure et inférieure

Définition 0.1.14 *Soit A un ensemble non vide de $\mathbb{R}$*

1. *On dit que A est majorant, s'il existe $M \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in A : x \leq M$ (ou bien M major A)*
   *Le plus petit major de A et la **borne supérieure** de A, on la note par $sup(A)$.*
   *Si $sup(A) \in \mathbb{R}$, on l'appelle **maximum** de A et on le note $max(A)$.*
   De manière similaire

2. *On dit que A est minorant, s'il existe $m \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in A : m \leq x$ (ou bien Mm minor A)*
   *Le plus petit minore de A et la **borne inférieure** de A, on la note par $inf(A)$.*
   *Si $inf(A) \in \mathbb{R}$, on l'appelle **minimum** de A et on le note $min(A)$.*

Remarque 0.1.15 *On dit que A est borné s'il est majoré et minoré au même temps*

0.1.3.1 Caractérisation de la borne supérieure et de la borne inférieure

Théorème 0.1.16 *Soit A un ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et soit M majorant de A.*
$M = sup(A)$ une borne supérieure de A si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists x \in A : sup(A) - \epsilon < x \leq sup(A)$$

Théorème 0.1.17 *Soit A un ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et soit m minorant de A.*
$m = inf(A)$ une borne inférieure de A si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists x \in A : inf(A) \leq x < inf(A) + \epsilon$$

Par exemple $A = [-1, 2[$. A est borné on a : $inf(A) = -1, min(A) = -1, sup(A) = 2$, maximum de A, n'existe pas.

Proposition 0.1.18 *La borne supérieure ou inférieure s'il existe est unique.*

• Si A n'est pas majorante, on écrit par convention $sup(A) = +\infty$.
• Si A n'est pas minorante, on écrit par convention $inf(A) = -\infty$.

Proposition 0.1.19 *Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$*

1. *Si $A \subset B$ alors $sup(A) \leq sup(B)$ et $inf(A) \geq inf(B)$*
2. *$sup(A \bigcup B) = max\{sup(A), sup(B)\}$*
3. *$inf(A \bigcup B) = min\{inf(A), inf(B)\}$*

Preuve 0.1.20 *fait pendant le cours*

Exercice 1 : Déterminer L'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, sup, inf, min, max des ensembles suivantes :

$$A =]1, 5]; \ B =]-\infty, 2]; \ C = [-1, 0[\cup [3, 4]$$

Axiom 0.1.21 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $(a > 0)$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $b \leq na$*

Théorème 0.1.22 *L'ensemble $\mathbb{N}$, n'est pas majorant, Les ensemble $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ne sont pas ni minorants ni majorants.*

Théorème 0.1.23 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe unique $n \in \mathbb{Z}$, tel que $n \leq x \leq n + 1$*

Définition 0.1.24 *Soit $x \in \mathbb{R}$, l'entier relatif n qui vérifie $n \leq x \leq n + 1$ est dit la partie entier de x noté par $[x]$ ou $E(x)$. On a alors*

$$E(x) \leq x < E(x) + 1$$

Par exemple $E(1, 5) = 1, E(0.35) = 0, E(-1.5) = -2$
Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations

$$1)\ E(\frac{x-1}{2}) = -2, \quad 2)\ E(2x) = x - 1, \quad 3)\ E(\frac{1}{x}) = 3, \quad 4)\ E(x) + |x - 1| = x$$

0.1.3.2 Valeur absolue et intervalles

Un intervalle borné est définie par deux inégalités strictes ou larges.

$$[a,b] = \{x \setminus a \leq x \leq b\}, [a,b[= \{x \setminus a \leq x < b\},]a,b] = \{x \setminus a < x \leq b\},]a,b[= \{x \setminus a < x < b\}$$

Par exemple, soit $A =]a,b]$; b est borne supérieure de A, comme il appartient à A, toute autre borne supérieure b' de A doit satisfaire l'inégalité $b \leq b'$.
L'intervalle fermé $[a,b]$ contient sa borne supérieure et inférieure alors que l'intervalle ouvert $]a,b[$ ne contient ni l'un ni l'autre.
→ **La valeur absolue** $|x|$ de $x \in \mathbb{R}$ est définie par

$$|x| = sup\{x, -x\}.$$

Autrement dit

$$|x| = \{x; x \geq 0 - x; x < 0\}$$

Théorème 0.1.25 *Quels que soient $x, y \in \mathbb{R}, |xy| = |x||y|$ et $|x+y| \leq |x| + |y|$ avec égalité si et seulement si $xy \geq 0$.*

Preuve 0.1.26 *fait pendant le cours*

Propriétés : Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a :

- $|x| \geq 0; \quad |x| = |-x|, \quad x \leq |x|$
- $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$
- $|x| = x$ si et seulement si $x \geq 0$
- $||x| - |y|| \leq |x - y|, \quad ||x| - |y|| \leq |x + y|,$
- $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|} \quad y \neq 0$
- Soit $\alpha > 0; |x| \leq \alpha$ si et seulement si $-\alpha \leq x \leq \alpha$.
  De meme $|x| < \alpha$ si et seulement si $-\alpha < x < \alpha$

Exercice 3 : Soient a, b deux réels

$$E(a) + E(b) \leq E(a+b) \leq E(a) + E(b) + 1$$

Exercice 4 : Soit x, y deux réels non nuls. Démontrer que

$$max(|x|, |y|)|\frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|}| \leq 2|x - y|$$

UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF M'SILA
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de l'Informatique
Module : Analyse 01
Année universitaire : 2022/2023

Chapiter N°3 : Suites réelles

0.2 Introduction

L'étude des suites numériques a pour objet la compréhension de l'évolution de séquences de nombres (réels, complexes...). Ceci permet de modéliser de nombreux phénomènes de la vie quotidienne. Supposons par exemple que l'on place une somme S à un taux annuel de dix pour cent. Si S_n représente la somme que l'on obtiendra après n années, on a

$$S_0 = S, \quad S_1 = S.1,1, ..., \quad S_n = S.(1,1)^n.$$

Au bout de $n = 10ans$, on possédera donc $S_{10} = S.(1.1)^{10} \approx S.2,59$.

Définition 0.2.1 *On appelle suite de nombres réels une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Cette application sera souvent notée $n \mapsto u_n$ (au lieu de $n \mapsto u(n)$) et on dira que u_n est le **terme général de la suite**, on notera alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou plus simplement (u_n), la suite ainsi définie.*

Les trois suites ci-dessous sont définies par la donnée de leur terme général :

$$u_n = n; \quad u_n = \frac{1}{n}; \quad u_n = \frac{n}{n+1}$$

Étant donné un réel a, la suite $u_n = a$, est appelée *suite constante*. On peut aussi définir une suite par une relation de récurrence. Ainsi, a et u_0 étant des réels donnés, la suite $u_n = a + u_{n-1}$ est une suite arithmétique dont le terme général est $u_n = u_0 + a.n$

Une suite est donc une application particulière. Le point fondamental est que le domaine de définition est $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$. D'autre part, l'objectif principal dans l'étude d'une suite n'est pas tant cette application elle-même que son comportement à l'infini. Ceci s'oppose notamment au cas des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ où l'on s'intéresse aussi à ce qui se passe autour des valeurs finies de la variable.

0.3 Convergence et divergence des suites numériques et propriétés

Définition 0.3.1

1. *On dit que la suite (u_n) converge ou qu'elle est convergente s'il existe un réel l (appelé limite) tel que :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \, tel\, que \, \forall n \in \mathbb{N}, (n > N) \Rightarrow |u_n - l| < \epsilon$$

On dit que (u_n) tend vers l, et on écrit $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$

2. *Si (u_n) n'est pas convergente, on dit qu'elle diverge ou qu'elle est divergente.*
3. *On dit q'une suie (u_n) tend vers $+\infty$ si :*

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N} \, tel\, que \, \forall n \in \mathbb{N}, (n > N) \Rightarrow u_n > A$$

4. *On dit q'une suie (u_n) tend vers $-\infty$ si :*

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N} \, tel\, que \, \forall n \in \mathbb{N}, (n > N) \Rightarrow u_n < -A$$

Remarquons que :

— La suite (u_n) converge vers l si et seulement si la suite de terme général $v_n = u_n - l$ converge vers 0.

- Pour tour ϵ (aussi petit soit-il), l'intervalle $l-\epsilon, l+\epsilon$ contient tous les éléments de la suite sauf un nombre fini de termes, les N premiers.
- Il résulte immédiatement de cette définition que la nature d'une suite (sa convergence ou non convergence) ne change pas, si l'on modifie un nombre fini de termes de la suite, ou si l'on démarre la suite par un indice plus grand que 0.
- La convergence de la suite (u_n) peut s'écrire entièrement avec des quantificateurs :

$$\exists l, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \; tel \; que \; \forall n \in \mathbb{N}, (n > N) \Rightarrow |u_n - l| < \epsilon$$

  Cette écriture avec uniquement des quantificateurs facilite l'expression de la divergence.
- On peut montrer que la définition de la convergence donnée plus haut est équivalente à :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \; tel \; que \; \forall n \in \mathbb{N}, (n > N) \Rightarrow |u_n - l| < \epsilon$$

Proposition 0.3.2 *(unicité de la limite)*
La limite d'une suite convergent est unique

Preuve 0.3.3 -. *Supposons qu'il existe deux limites distinctes l_1, l_2 Sans restreindre la généralité, nous pouvons noter l_1 la plus grande des deux, soit $l_1 > l_2$. Posons $\epsilon = \frac{(l_1-l_2)}{2}$, alors puisque, la suite u_n converge respectivement vers l_1 et l_2 :*

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \; tel \; que \; \forall n \in \mathbb{N}, (n > N) \Rightarrow |u_n - l_1| < \epsilon$$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \; tel \; que \; \forall n \in \mathbb{N}, (n > N) \Rightarrow |u_n - l_2| < \epsilon$$

On obtient alors pour $n > max(N_1, N_2)$:

$$l_1 - l_2 = |l_1 - l_2| = |l_1 - u_n + u_n - l_2| \leq |l_1 - u_n| + |u_n - l_2| \leq 2\epsilon$$

ce qui est absurde.

Lorsque vous étudiez la suite $u_n = (-1)^n$ vous avez envie de dire que pour n pair la suite est constante $u_{2n} = 1$ donc convergente et pour n impair la suite est aussi constante $u_{2n+1} = -1$ donc convergente, ce qui est faux puisque cela donnerait une suite convergente avec deux limites distinctes ! L'erreur de raisonnement est que vous considérez deux sous-suites et non pas la suite dans sa totalité dont les termes oscillent constamment de 1 à -1.

Proposition 0.3.4 *La suite (u_n) converge vers l, alors la suite $(|u_n|)$ converge vers $|l|$*

Pour démontrer ce résultat il suffit d'utiliser l'inégalité $||u_n| - |l|| \leq |u_n - l|$

Exemple 0.3.5 *1. La suite $-\dfrac{3n-2}{2n+5}$ a pour limite $l = -\dfrac{3}{2}$ car*

$$|-\frac{3n-2}{2n+5} + \frac{3}{2}| = \frac{19}{4n+10}$$

Nous voyons alors que pour $\epsilon > 0$, donné, il suffit de choisir l'entier N tel que

$$\frac{19}{4N+10} \leq \epsilon \quad N \geq \frac{19}{4\epsilon} - \frac{5}{2}$$

Alors pour $n > N$ on a :

$$|u_n - l| = \frac{19}{4n+10} < \frac{19}{4N+10} \leq \epsilon;$$

Ce qui montre que $u_n \to l$.

Examinons la suite $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$.
On peut écrire

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \leq \frac{1}{2n}$$

puisque $\sqrt{n^2+1} \geq n$
Pour tout $\epsilon > 0$ on prend N entier tel que $n \geq \frac{1}{2\epsilon}$, alors pour $n > N$ on a :

$$|u_n| = u_n \leq \frac{1}{2n} < \frac{1}{2N} \leq \epsilon$$

Définition 0.3.6 *On dit qu'une suie u_n est diverge s'il n'est pas converge*

Par exemple la suite définie par : $u_n = (-1)^n$ est diverge.

Théorème 0.3.7 *Soit (u_n), (v_n) deux suites convergent successivement vers l, l'. Alors :*

1. *Pour tout α, $\beta \in \mathbb{R}$, la suite $\alpha(u_n) + \beta(v_n)$ converge vers $\alpha l + \beta l'$.*
2. *Si $l' \neq 0$, la suite $(\dfrac{u_n}{v_n})$ converge vers $\frac{l}{l'}$*
3. *La suite $(u_n.v_n)$ converge vers $l.l'$*
4. *La suite $(|u_n|)$ converge vers $|l|$*
5. *S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq n_0$, alors $l \leq l'$*

0.3.1 Suite majorée ou minorée

Définition 0.3.8 *Une suite (u_n) est dite **majorée** (resp. **minorée**) s'il existe un réel M (resp. m) tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M(resp. \quad m \leq u_n)$$

*Une suite (u_n) est dite **bornée**, si elle est à la fois majorée et minorée.*

En reprenant les définitions du chapitre 1, on voit que la suite (u_n) est majorée si et seulement si l'ensemble $A = \{u_n, \quad n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble majoré, il en est de même pour minorée ou bornée. On a donc un résultat similaire à celui démontré dans le chapitre 1, à savoir :
Une suite (u_n) est bornée si et seulement si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$.
D'autre part on remarque que pour qu'une suite soit majorée, il suffit qu'il existe un nombre réel M' tel que $u_n \leq M'$ à partir d'un certain rang N. En effet,

$$M = max\{u_0, u_1, ..., u_{N-1}, M'\}$$

est alors un majorant de la suite complète.
De même une suite est bornée s'il existe un réel M positif, tel que, à partir d'un certain rang N, on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n > N) \Rightarrow (|u_n| \leq M).$$

Proposition 0.3.9 *Toute suite convergente est bornée*

Preuve 0.3.10 *Partons de la définition de la convergence et donnons nous un $\epsilon > 0$. La suite (u_n) étant convergente, possède une limite l et il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$(n > N) \Rightarrow |u_n - l| < \epsilon$$

Comme, par ailleurs :

$$|u_n - l| < \epsilon \Leftrightarrow l - \epsilon < u_n < l + \epsilon$$

si on définit les nombres M et m par

$$M = max\{u_0, u_1, ..., u_{N-1}, l + \epsilon\}, \; m = \{u_0, u_1, ..., u_{N-1}, l - \epsilon\}$$

0.3.2 Suite croissante ou décroissante

Définition 0.3.11 *Une suite (u_n) est dite croissante (resp. décroissante) si :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}(resp, u_{n+1} \leq u_n)$$

*Une suite est dite **monotone** si elle est **croissante** ou **décroissante**.*

Théorème 0.3.12 *Toute suite croissante et majorée est convergente. De même, toute suite décroissante et minorée est convergente.*

Preuve 0.3.13 *Puisque* (u_n) *est une suite majorée, l'ensemble* $A = \{u_n, \quad n \in \mathbb{N}\}$ *est majoré. D'après la propriété de la borne supérieure définie pour tout sous-ensemble non vide borné de* $\mathbb{R}$ *au chapitre précédent,* A *admet une borne supérieure* L*. La caractérisation de la borne supérieure permet de dire que* $\forall \epsilon > 0$, $L - \epsilon$ *n'est pas un majorant de* A *donc*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } L - \epsilon < u_N < L$$

Mais comme la suite est croissante, nous avons :

$$\forall \epsilon > 0, (n > N) \Rightarrow L - \epsilon < u_N < u_n$$

D'autre part, comme L est un majorant de (u_n), nous avons ainsi montré que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}(n > N) \Rightarrow L - \epsilon < u_n < L$$

Soit

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}(n > N) \Rightarrow 0 \leq L - u_n < \epsilon$$

ce qui montre le résultat.
On démontre de la même manière qu'une suite décroissante et minorée est convergente.

Théorème 0.3.14 *(Théorème de comparaison)*

1. *Soit* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite convergente de limite* l*. On a*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0 \Rightarrow l \geq 0$$

2. *Soient* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *deux suite convergentes de limites respectives* l, l' *On a*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq v_n \Rightarrow l \geq l'.$$

3. *Soient* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *deux suite convergentes ayant la même limite* l *et soit* $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite telle que* $u_n \leq w_n \leq v_n$*. Alors la suite* $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est convergente et a pour limite* l*.*
4. *Soit* $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite convergente vers* 0 *et soit la suite* (u_n) *telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \geq v_n$$

. Alors la suite (u_n) *tend vers* 0*.*

Corollary 0.3.15 *Soit* (v_n) *une suite converge vers zéro et soit* (u_n) *une suite bornée, alors la suite* $(u_n v_n)$ *tend vers zéro.*

0.4 Suites particulières

0.4.1 Suites adjacentes

Théorème 0.4.1 *Soient* (u_n) *et* (v_n) *deux suites de nombres réels, telles que :*

— *la suite* (u_n) *est croissante,*
— *la suite* (v_n) *est décroissante,*
— *la suite* $(v_n - u_n)$ *tend vers 0. Alors les suites* (u_n) *et* (v_n) *convergent toutes deux vers la même limite.*

Preuve 0.4.2 - *La suite* (v_n) *est décroissante par hypothèse. Comme la suite* (u_n) *est croissante, la suite* $(-u_n)$ *est décroissante, de sorte que la suite* $(v_n - u_n)$ *est aussi décroissante. Comme en outre, cette dernière suite converge vers* 0 *par hypothèse, nous en déduisons que tous ses termes* $(v_n - u_n)$ *sont positifs ou nuls, soit :*

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq v_n.$$

nous en déduisons aussitôt que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0.$$

Ainsi la suite (u_n) est majorée par par v_0, tandis que la suite (v_n) est minorée par u_0. La suite (u_n) croissante et majorée, est convergente, et soit l sa limite. De même la suite (v_n) est décroissante et minorée par v_0, est convergente vers L sa limite. Il reste à démontrer que $l = L$.
Sachant que les suites (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers l et L, nous en déduisons que la suite $(v_n - u_n)$ converge vers $L - l$. Sachant par ailleurs que cette suite converge vers 0, nous arrivons à $L - l = 0$, du fait de l'unicité de la limite d'une suite.

Le théorème précédent, très utilisé, nous conduit à la définition suivante :

Définition 0.4.3 *deux suites (u_n) et (v_n) possédant les propriétés du théorème précédent, sont dites* ***adjacentes.***

Lorsque deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles vérifient :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : u_m \leq v_n.$$

Autrement dit chaque terme de la suite (u_n) est inférieur à tous les termes de la suite (v_n). Ceci se vérifie en écrivant que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (m \leq n) : u_m \leq u_n \leq v_n \leq v_m$$

Exemple 0.4.4 *Les suites données par $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$*

$$u_n = 1 - \frac{1}{n}, \quad v_n = 1 + \frac{1}{n}$$

Sont adjacentes. En effet la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante car : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n(n+1)} \geq 0.$
La suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante car : $v_{n+1} - v_n = -\dfrac{1}{n(n+1)} \leq 0$. De plus $u_n - v_n = \dfrac{-2}{n} \hookrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$.
Donc $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes. On déduit que $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont convergentes vers la même limite 1.

0.4.2 Suites de Cauchy

Lorsque l'on ne connaît pas la limite éventuelle d'une suite, pour démontrer qu'elle est convergente, on peut montrer qu'elle est croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) ou utiliser les suites de Cauchy.

Définition 0.4.5 *Une suite (u_n) est une suite de Cauchy si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \; tel\ que \, \forall n, m \in \mathbb{N} (m \geq n \geq N) \Rightarrow |u_m - u_n| < \epsilon$$

cela est équivalent à :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N} (n \geq N) \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| < \epsilon$$

cette propriété signifie que, aussi petit que soit ϵ , à partir d'un certain rang tous les éléments de la suite se trouvent dans un intervalle de longueur ϵ.

Exemple 0.4.6 *Les suites $(\frac{sin(n)}{2^n})$ et $cos(\frac{1}{n})$ sont de Cauchy.*

Proposition 0.4.7 *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

Théorème 0.4.8 *Une suite de nombres réels est convergente si et seulement si c'est une suite de Cauchy.*

0.4.3 Suites récurrentes

On peut définir une suite (u_n) :

— soit, en donnant une formule explicite exprimant u_n en fonction de n, par exemple $u_n = 1 + \frac{1}{n}$,

— soit exprimant u_n en fonction de n et de certains termes précédents, par exemple

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Un cas particulier de cette deuxième méthode de construction de suites est le suivant :
f étant une application de $\mathbb{R}$ dans lui-même supposée connue, on pose :

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad n \geq 0, \end{cases}$$

On dit alors que l'on a une suite récurrente d'ordre 1 (ordre 1 signifiant que seul le terme u_n intervient explicitement dans la définition de u_{n+1}).

Proposition 0.4.9 *Si la fonction f vérifie la condition suivante, dite **condition de Lipschitz** :*

$$\exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| < K|x - y|,$$

si de plus $0 < K < 1$, et s'il existe $l \in \mathbb{R}$, tel que $f(l) = l$, alors la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l.

démonstration-. Puisque $l = f(l)$, et que f vérifie une condition de Lipschitz on a

$$|u_n - l| = |f(u_{n-1}) - f(l)| \leq K|u_{n-1} - l|$$

En itérant, on obtient

$$0 \leq |u_n - l| \leq K^n |u_0 - l|.$$

K^nest une suite qui converge vers 0. En utilisant la comparaison de suites on déduit que la suite $(|u_n - l|)$ converge vers 0. D'ou la suite $(u_n - l)$ converge vers 0 et la suite (u_n) converge vers l.

Exercice 1 : Etudier la convergence des suites suivantes et donner leur limite quand elle existe.

1. $u_n = \dfrac{cos(n\pi)}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$
2. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$
3. $\ln(n+1) - \ln(n), \quad n \in \mathbb{N}.$
4. $\dfrac{a^n + b^n}{a^n - b^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq a < b.$
5. $u_n = \sum_{k=0}^{n} k, \quad n \in \mathbb{N}$
6. $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{5^k}, \quad n \in \mathbb{N}.$
7. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$
8. $u_n = \dfrac{2^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$
9. $u_n = \dfrac{2^n}{n^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$

Exercice 2 : Soit la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_n = 0, \\ u_n = 1, \\ u_n = 1 - \frac{1}{n}, \text{lorsque } n \text{ est pair, strictement positif,} \\ u_n = 1 - \frac{1}{n-2}, \text{lorsque } n \text{ est impair, strictement plus grand que 1.} \end{cases}$$

1. Calculer les 6 premiers termes.
2. Calculer $sup\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ (faire une démonstration rigoureuse).
3. Donner la limite de la suite (un) (faire une démonstration rigoureuse).
4. La suite est-elle croissante à partir d'un certain rang ?